

## КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ СЕНДВІЧ-ПЛАСТИН І ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Розглядається задача про згин тришарової пологої оболонки, що опирається на пружну основу, при дії поперечного навантаження. Припускається, що нижній і верхній шари виготовлені з функціонально-градієнтних матеріалів, а заповнювач – з ізотропного матеріалу (метал або кераміка). Для математичного моделювання задачі використано уточнену теорію пластин першого порядку типу Тимошенка, яка враховує деформації згину. Пружна основа оболонки моделюється двопараметричною моделлю типу Пастернака. Ефективні пружні властивості функціонально-градієнтних матеріалів змінюються за степеневим законом. Запропонований алгоритм розв'язання задач згину базується на використанні теорії  $R$ -функцій і варіаційного методу Рітца. Створене програмне забезпечення, що реалізує запропонований підхід, апробовано на тестових задачах для прямокутних пластин і пологих оболонок з різними схемами укладання шарів і різними характеристиками пружної основи. Ефективність методу продемонстровано на прикладі оболонки з шестикутним отвором і круглими вирізами на сторонах. Розглянуто різні умови закріплення отвору та зовнішнього контуру оболонки. Вивчено вплив градієнтного індексу та характеристик пружної основи на величину максимального прогину. Отримані результати подано у вигляді таблиць і графіків та використано для дослідження функціонально-градієнтних пластин і пологих оболонок на пружній основі зі складною формою плану.

**Ключові слова:** згин, функціонально-градієнтний матеріал, сендвіч-пластини, пологі оболонки, пружна основа, теорія  $R$ -функцій, варіаційний метод Рітца.

Шаруваті конструкції широко використовуються у багатьох галузях промисловості: авіаційній, морській, геотехнічній, автомобільній тощо. Для зменшення ваги та підвищення міцності таких конструкцій найчастіше використовують сучасні матеріали, до яких відносяться функціонально-градієнти матеріали (ФГМ). На практиці часто такі конструкції опираються на пружну основу у вигляді фундаментів різних споруд. Тому питання розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) подібних конструкцій є актуальним при їх проектуванні.

Зазвичай моделювання пружної основи шаруватих структур виконується за моделлю Вінклера або більш загальною двопараметричною моделлю Пастернака.

Математичне моделювання ФГМ здійснюється за різними підходами, але більшість дослідників розглядають пружні властивості як величини, які змінюються уздовж товщини об'єкту. При цьому коефіцієнт Пуассона вважається постійним через його невелику варіацію, наприклад, від металеві до керамічної фази. Для визначення ефективних властивостей ФГМ здебільшого використовується модель Фойгта [25] на основі степеневого або експоненційного закону, а також модель Морі – Танака [14].

Для розрахунку НДС у загальному випадку застосовуються наближені числові або аналітично-числові методи та різні теорії, які моделюють напружений стан оболонки або пластини. У роботах [10, 13, 23] наведено широкий огляд теорій моделювання та аналізу функціонально-градієнтних пластин і оболонок. Як зазначено в роботі [23], одним із ефективних і достатньо простих підходів до розрахунку шаруватих оболонок, є підхід, який базується на застосуванні еквівалентних теорій для одношарових оболонок. Такий підхід застосовується у рамках класичної теорії оболонок, а також

<sup>✉</sup> ktv\_ua@yahoo.com

деформаційних теорій першого та вищого порядків, які враховують деформації поперечного зсуву. Автори роботи [13] пропонують враховувати ці деформації за допомогою нової гіперболічної деформаційної теорії зсуву. Запропонований підхід використано для аналізу втрати стійкості і вільних коливань товстих функціонально-градієнтних багатошарових пластин. Автори праці [24] для аналізу двояко криволінійних оболонок, що опираються на пружну основу Вінклера – Пастернака, застосовують метод узагальнених диференціальних квадратур (*GDQ*).

У роботі [12] для дослідження функціонально-градієнтних ( $\Phi\Gamma$ ) пластин на пружній основі використано узагальнену квазітривимірну теорію високого порядку (*HSDT*) гібридного типу. В роботі [21] на основі синусоїдальної деформаційної теорії пластин (*SDPT*) одержано рівняння руху багатошарових  $\Phi\Gamma$  сендвіч-пластин на пружній основі при термічних навантаженнях. Автори цієї роботи порівнюють результати, отримані за допомогою *SDPT*, з результатами, що отримані за допомогою класичної теорії пластин (*CPT*) деформаційної теорії пластин першого порядку (*FDPT*) і теорії вищих порядків (*HDPT*). Низку досліджень НДС було проведено для шаруватих пластин із зовнішніми шарами, виготовленими із  $\Phi\Gamma\text{М}$  (ізотропним металевим або керамічним заповнювачем) [6, 20, 21, 26].

У сучасній літературі значна увага приділяється вивченню динамічної поведінки  $\Phi\Gamma\text{М}$  сендвіч-пластин та оболонок, зокрема оболонок на пружній основі [15, 16, 18, 19]. Наприклад, у роботах [5, 7, 11, 22, 26] пропонується комплексний огляд різних методів, що використовуються для вивчення статичної і динамічної поведінки  $\Phi\Gamma$  пластин. Розглянуто як аналітичні, так і числові методи. Зокрема, в роботі [26] виконано порівняльний аналіз різних характеристик НДС (частот, прогинів, напружень), які були одержані з використанням різних теорій (деформаційної теорії зсуву першого порядку, *3D*-теорії пружності, *SDPT* теорії та інших). Розширений і детальний огляд найбільш важливих робіт, опублікованих останнім часом і присвячених аналізу статичної та динамічної поведінки  $\Phi\Gamma$  шаруватих пластин та оболонок, наведено в роботах [8, 17, 23]. Автори цих робіт звертають увагу на деякі недостатньо вивчені проблеми: дослідження взаємодії оболонки з пружними основами; використання теорій вищого порядку для розв'язання складних задач; незначна кількість робіт, у яких розглядаються оболонки складної геометричної форми.

З огляду на ці факти, розглядувана робота присвячена розв'язанню задачі про згин тришарових  $\Phi\Gamma$  пологих оболонок, що опираються на пружну основу і перебувають під дією поперечного навантаження, для випадків складної геометричної форми плану оболонки та різного типу граничних умов. Запропонований підхід відноситься до аналітично-числових і базується на спільному використанні варіаційного методу Рітца та методу теорії *R*-функцій (*RFM*) [2–4, 9]. Одержано аналітичні вирази для обчислення модуля пружності та густини матеріалу, які залежать від температури та положення точки, у припущенні, що коефіцієнт Пуассона є постійним та однаковим для всіх шарів. Розв'язки тестових задач підтверджують достовірність та ефективність запропонованого підходу та створеного на його основі програмного забезпечення. Метод використано для розрахунку пологих оболонок складної геометричної форми плану, досліджено вплив кривини оболонки, характеристик пружної основи та пружних властивостей  $\Phi\Gamma\text{М}$  на НДС оболонок.

**1. Математична модель сформульованої задачі.** Будемо розглядати тришарову пологу оболонку, середній шар якої (заповнювач) виготовлено з ізотропного матеріалу (кераміки), а нижній і верхній шари виготовлено з функціонально-градієнтних матеріалів (суміші металу та кераміки). Оболонка опирається на пружну основу і перебуває під дією поперечного навантаження  $q(x, y)$  (рис. 1).

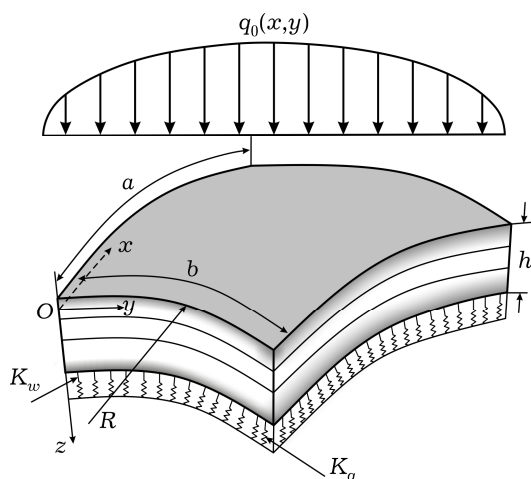


Рис. 1

Товщини шарів оболонки можуть бути різними, але загальна товщина оболонки  $h$  є постійною. Позначимо товщини шарів знизу до верху через  $h_1, h_2, h_3$  (рис. 2).

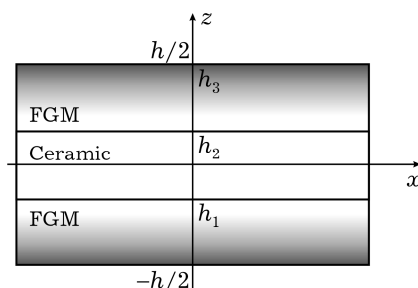


Рис. 2

Пружні властивості матеріалів оболонки змінюються гладко та неперервно. Ефективні матеріальні властивості ФГМ оболонки  $P_{\text{eff}}$  (модуль Юнга  $E$ , густини маси  $\rho$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu$ ) подамо як

$$P_{\text{eff}} = (P_c - P_m)V_c^{(r)} + P_m, \quad (1)$$

де  $P_c$  та  $P_m$  – характеристики кераміки і металу відповідно,  $V_c^{(r)}$  – об'ємна частка кераміки [18, 20, 26] в  $r$ -му шарі. Для оболонок, розглянутих у цій роботі, величини  $V_c^{(r)}$  визначаємо як [3]

$$\begin{aligned} V_1^{(1)} &= \left( \frac{z + h/2}{h_1 + h/2} \right)^{p_1}, & z \in [-h/2, h_1], \\ V_1^{(2)} &= 1, & z \in [h_1, h_2], \\ V_1^{(3)} &= \left( \frac{z - h/2}{h_2 - h/2} \right)^{p_3}, & z \in [h_2, h/2]. \end{aligned} \quad (2)$$

Для побудови математичної моделі задачі про згин пологої оболонки на пружній основі під дією поперечного навантаження використаємо уточнену теорію пологих оболонок першого порядку типу Тимошенка, яка враховує деформації згину. Згідно з цією теорією компоненти переміщень  $u_1, u_2, u_3$  у точці  $(x, y, z)$  виражаються через функції переміщень  $u, v, w$  середин-

ної поверхні в напрямках осей  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  відповідно за формулами

$$u_1 = u + z\Psi_x, \quad u_2 = v + z\Psi_y, \quad u_3 = w. \quad (3)$$

У виразах (3) функції  $\Psi_x$ ,  $\Psi_y$  – кути повороту нормалі до серединної поверхні відносно осей  $Ox$  та  $Oy$  відповідно [11, 15, 19]. Компоненти тензорів деформацій  $\{\varepsilon\} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})^\top$ ,  $\{\chi\} = (\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12})^\top$  у довільній точці оболонки знаходимо за формулами

$$\varepsilon_{11} = u_{,x} + w/R_x, \quad \varepsilon_{22} = v_{,y} + w/R_y, \quad \varepsilon_{12} = u_{,y} + v_{,x},$$

$$\varepsilon_{13} = w_{,x} + \Psi_x, \quad \varepsilon_{22} = w_{,y} + \Psi_y, \quad (4)$$

$$\chi_{11} = \Psi_{x,x}, \quad \chi_{22} = \Psi_{y,y}, \quad \chi_{12} = \Psi_{x,y} + \Psi_{y,x}. \quad (5)$$

Вектор зусиль  $\{N\} = (N_{11}, N_{12}, N_{22})^\top$  у серединній площині, згинальні та крутильний моменти  $\{M\} = (M_{11}, M_{12}, M_{22})^\top$ , а також перерізувальні сили  $\{Q\} = (Q_x, Q_y)^\top$  обчислюємо інтегруванням відповідних напружень у напрямку осі  $Oz$  [18, 20]:

$$\{N\} = [\mathbf{A}]\{\varepsilon\} + [\mathbf{B}]\{\chi\}, \quad \{M\} = [\mathbf{B}]\{\varepsilon\} + [\mathbf{D}]\{\chi\}. \quad (6)$$

Елементи  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 6$ , матриць  $[\mathbf{A}]$ ,  $[\mathbf{B}]$ ,  $[\mathbf{D}]$  у формулах (6) обчислюємо за формулами

$$A_{ij} = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} dz, \quad B_{ij} = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} z dz, \quad D_{ij} = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} z^2 dz, \quad (7)$$

де  $z_1 = -h/2$ ,  $z_2 = h_1$ ,  $z_3 = h_2$ ,  $z_4 = h/2$ . Величини  $Q_{ij}^{(r)}$ ,  $i, j = 1, 2, 6$ , визначаємо як

$$Q_{11}^{(r)} = Q_{22}^{(r)} = \frac{E^{(r)}}{1 - (v^{(r)})^2}, \quad Q_{12}^{(r)} = \frac{v^{(r)} E^{(r)}}{1 - (v^{(r)})^2}, \quad Q_{66}^{(r)} = \frac{E^{(r)}}{2(1 + v^{(r)})}. \quad (8)$$

Перерізувальні сили  $Q_x$ ,  $Q_y$  обчислюємо за формулами

$$Q_x = K_s^2 A_{33} \varepsilon_{13}, \quad Q_y = K_s^2 A_{33} \varepsilon_{23}, \quad (9)$$

де  $K_s^2$  – коефіцієнт зсуву. У цій роботі вважаємо, що  $K_s^2 = 5/6$ .

Надалі прийнемо, що коефіцієнти Пуассона металу та кераміки є однаковими:  $\nu_m = \nu_c = 0.3$ . Значення показників степеневого закону  $p_r$ ,  $r = 1, 2, 3$ , для всіх шарів оболонки для об'ємних часток  $V_c^{(r)}$  є однаковими:  $p_1 = p_2 = p_3 = p$ . Тоді можна одержати аналітичні вирази для обчислення елементів  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  відповідних матриць. Наведемо ці формули:

$$A_{11} = \nu_0 \left( E_{cm} \left( \frac{as1 - as2}{p+1} + as21 \right) + E_m h \right), \quad (10)$$

$$B_{11} = \nu_0 E_{cm} \left( \frac{(as1)^2 - (as2)^2}{p+2} - \frac{h(as1 + as2)}{2(p+1)} + \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} \right), \quad (11)$$

$$D_{11} = \nu_0 \left( E_{cm} \left( \frac{h^2(as1 - as2)}{4(p+1)} - \frac{h((as1)^2 + (as2)^2)}{p+2} + \frac{(as1)^3 - (as2)^3}{p+3} + \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} \right) + \frac{E_m}{12} h^3 \right). \quad (12)$$

Тут для зручності введено позначення

$$v_0 = \frac{1}{1 - v^2}, \quad E_{cm} = E_c - E_m,$$

$$as1 = \frac{h}{2} + h_1, \quad as2 = h_2 - \frac{h}{2}, \quad as21 = h_2 - h_1.$$

Зауважимо, що величини  $A_{12}$ ,  $A_{66}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{66}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{66}$  визначаються для різних схем розташування шарів як

$$R_{12} = vR_{11}, \quad R_{22} = vR_{11}, \quad R_{66} = \frac{1-v}{2} R_{11}.$$

**2. Метод розв'язування.** Для розв'язання задачі застосуємо варіаційний метод Рітца у поєднанні з теорією  $R$ -функцій. Варіаційна постановка сформульованої задачі зводиться до знаходження мінімуму функціонала

$$I = U - P, \quad (13)$$

де  $U$  – потенціальна енергія, а  $P$  – робота зовнішнього навантаження:

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11}\varepsilon_{11} + N_{22}\varepsilon_{22} + N_{12}\varepsilon_{12} + M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + M_{12}\chi_{12} +$$

$$+ Q_x\varepsilon_{13} + Q_y\varepsilon_{23} + K_W w + K_P(\nabla w)^2) dx dy,$$

$$P = \iint_{\Omega} q(x, y)W(x, y) dx dy. \quad (14)$$

Тут  $K_W$  і  $K_P$  – характеристики пружної основи.

Згідно з методом Рітца для розв'язання варіаційної задачі шуканий розв'язок, тобто функції  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ ,  $w(x, y)$ ,  $\psi_x(x, y)$ ,  $\psi_y(x, y)$ , необхідно подати у вигляді

$$u = \sum_{i=1}^{N_1} a_i u_i, \quad v = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} a_i v_i, \quad w = \sum_{i=N_2+1}^{N_3} a_i w_i,$$

$$\psi_x = \sum_{i=N_3+1}^{N_4} a_i \psi_{xi}, \quad \psi_y = \sum_{i=N_4+1}^{N_5} a_i \psi_{yi}, \quad (15)$$

де  $\{u_i\}$ ,  $\{v_i\}$ ,  $\{w_i\}$ ,  $\{\psi_{xi}\}$ ,  $\{\psi_{yi}\}$  – деякі повні системи базисних функцій, які задовольняють задані крайові умови (принаймні головні). Такі функції для складної геометричної форми та різних типів крайових умов можна побудувати за допомогою теорії  $R$ -функцій [4].

Коефіцієнти розвинень  $\{a_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_5$ , у формулах (15) визначаємо з умови мінімуму функціонала (13), тобто як результат розв'язання алгебраїчної системи рівнянь

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_5. \quad (16)$$

Зауважимо, що для побудови базисних функцій, які задовольняють головні граничні умови, часто достатньо побудувати рівняння границі плану оболонки або якоїсь її частини. Наприклад, якщо оболонка жорстко закріплена по всій границі, тобто граничні умови мають вигляд

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \psi_x = 0, \quad \psi_y = 0, \quad (17)$$

то відповідні базисні функції можна вибрати так:

$$u_i = \omega(x, y)\phi_i^{(1)}, \quad v_i = \omega(x, y)\phi_i^{(2)}, \quad w_i = \omega(x, y)\phi_i^{(3)},$$

$$\psi_{xi} = \omega(x, y)\phi_i^{(4)}, \quad \psi_{yi} = \omega(x, y)\phi_i^{(5)}, \quad (18)$$

де  $\{\phi_i^{(k)}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$ , – деяка повна система функцій (степеневих поліномів, поліномів Чебишова, тригонометричних поліномів, сплайнів тощо),  $\omega(x, y) = 0$  – рівняння межі області, яке можна побудувати за допомогою теорії  $R$ -функцій практично для довільної області [1–4].

**3. Числові результати.** Наведемо розв’язки деяких тестових задач, які розв’язано з метою апробації запропонованого підходу та розробленого програмного забезпечення.

**Задача 1.** Розглянемо задачу про згин тришарової вільно опертої пластини на пружній основі прямокутної форми ( $2a \times 2b$ ) в плані під дією синусоїдального навантаження (рис. 1). Зовнішній і внутрішній шари пластини виготовлено з ФГМ Al/ZrO<sub>2</sub>, а середній шар (заповнювач) виготовлено з кераміки ZrO<sub>2</sub>, механічні характеристики яких є такими:

$$\text{алюміній (Al)} - E_m = 70 \text{ ГПа}, \quad \rho_m = 2707 \text{ кг/м}^3, \quad \nu_m = 0.3,$$

$$\text{цирконій ZrO}_2 - E_c = 151 \text{ ГПа}, \quad \rho_c = 3000 \text{ кг/м}^3, \quad \nu_c = 0.3.$$

Поперечне навантаження пластини задаємо у вигляді

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi(a-x)}{2a} \sin \frac{\pi(b-y)}{2b} \quad (19)$$

або

$$q(x, y) = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}, \quad (20)$$

де  $q_0$  – інтенсивність навантаження у центрі пластини.

Геометричні параметри пластини:  $h/2a = 0.1$ ,  $a/b = 1$ . Коефіцієнт зсуву  $K_s^2 = 5/6$ .

У табл. 1 і табл. 2 наведено порівняння обчислених запропонованим підходом *RFM* значень безрозмірного прогину  $\bar{w} = \frac{10hE_0}{(2a)^2 q_0} w(0,0)$  (табл. 1) і

напружень  $\bar{\sigma}_{11} = \frac{10h^2 E_0}{(2a)^2 q_0} \sigma_{11} \left(0, 0, \frac{h}{2}\right)$  (табл. 2) у центрі вільно опертої тришарової ФГ квадратної пластини при  $E_0 = 1$  ГПа з результатами, отриманими *FSDT* і *TSDT* у роботі [26]. Розрахунки виконано для різних значень градієнтного індексу  $p$  і для різних співвідношень товщин шарів  $h_1 : h_2 : h_3$ .

Таблиця 1

$p$	Метод	$\bar{w} = \frac{10hE_0}{(2a)^2 q_0} w(0,0)$			
		Відношення товщин шарів $h_1 : h_2 : h_3$			
		1:0:1	2:1:2	1:1:1	1:2:1
0	<i>RFM</i>	0.19607	0.19607	0.19607	0.19607
	[26] ( <i>FSDT</i> )	0.19607	0.19607	0.19607	0.19607
1	<i>RFM</i>	0.32485	0.30750	0.29301	0.27167
	[26] ( <i>FSDT</i> )	0.32484	0.30750	0.29301	0.27167
2	<i>RFM</i>	0.37514	0.35409	0.33441	0.30370
	[26] ( <i>FSDT</i> )	0.37514	0.35408	0.33441	0.30370
5	<i>RFM</i>	0.41121	0.39419	0.37357	0.33631
	[26] ( <i>FSDT</i> )	0.41120	0.39418	0.37356	0.33631
10	<i>RFM</i>	0.41920	0.40658	0.38788	0.34996
	[26] ( <i>FSDT</i> )	0.41919	0.40657	0.38787	0.34996

Таблиця 2

p	Метод	$\bar{\sigma}_{11} = \frac{10h^2 E_0}{(2a)^2 q_0} \sigma_{11} \left(0, 0, \frac{h}{2}\right)$			
		Відношення товщин шарів $h_1 : h_2 : h_3$			
		1:0:1	2:1:2	1:1:1	1:2:1
1	RFM	1.5679	1.4847	1.4146	1.3109
	[26] (TSDT)	1.57923	1.49587	1.42617	1.32309
	[26] (FSDT)	1.53245	1.45167	1.38303	1.28096
2	RFM	1.8112	1.7113	1.6165	1.4674
	[26] (TSDT)	1.82167	1.72144	1.62748	1.47988
	[26] (FSDT)	1.77085	1.67496	1.58242	1.43580
5	RFM	1.98268	1.90521	1.8069	1.6265
	[26] (TSDT)	1.99272	1.91302	1.81580	1.63814
	[26] (FSDT)	1.93576	1.86479	1.76988	1.59309
10	RFM	2.0184	1.9642	1.8760	1.6930
	[26] (TSDT)	2.0303	1.9712	1.88376	1.70417
	[26] (FSDT)	1.96780	1.92165	1.83754	1.6544

Дані у табл. 1, 2 свідчать про добре співпадіння отриманих результатів з відомими.

**Задача 2.** Виконано обчислення для квадратної в плані шаруватої пологої оболонки, що опирається на пружну основу і знаходиться під дією синусоїдального навантаження (19). Співвідношення товщин шарів  $h_1 : h_2 : h_3 = 2 : 1 : 2$ , значення градієнтного індексу  $p = 2$ .

У табл. 3 подано результати обчислення прогину  $\bar{w}$  в центрі пологої оболонки при  $h/2a = 0.1$  і  $E_0 = 1$  ГПа. Розрахунки виконано для різних

співвідношень між параметрами пружної основи  $\bar{K}_j = \frac{E_c h^3}{(2a)^4} K_j$ ,  $j = W, P$ , та

для різних співвідношень кривин  $k_{r1} = \frac{2a}{R_x}$ ,  $k_{r2} = \frac{2a}{R_y}$  для випадків вільного

опирання (S) і жорсткого закріплення (C) оболонки по всій границі. Матеріали шарів оболонки такі, як у **задачі 1**.

Таблиця 3

$(\bar{K}_W, \bar{K}_P)$	$\bar{w} = \frac{10hE_0}{(2a)^2 q_0} w(0, 0)$							
	$(k_{r1}, k_{r2})$							
	(0, 0)	(0.5, 0)	(0.5, 0.5)	(0.5, -0.5)	(0, 0)	(0.5, 0)	(0.5, 0.5)	(0.5, -0.5)
	Вільне опирання (S)				Жорстке закріплення (C)			
(0, 0)	0.35407	0.28587	0.18118	0.35407	0.1376	0.1099	0.08465	0.09971
(10, 0)	0.2307	0.1996	0.14232	0.2307	0.1163	0.09591	0.07606	0.08804
(20, 0)	0.1711	0.1534	0.1171	0.1711	0.1007	0.08503	0.06904	0.07876
(50, 0)	0.09639	0.09051	0.07651	0.09639	0.07165	0.06329	0.05394	0.05973
(100, 0)	0.05579	0.05376	0.04849	0.05579	0.04811	0.04416	0.03938	0.04239
(0, 10)	0.03064	0.03003	0.02831	0.03064	0.02614	0.02479	0.02302	0.02418
(10, 10)	0.02929	0.02872	0.02715	0.02929	0.02519	0.02394	0.02289	0.02337
(20, 10)	0.02805	0.02753	0.02608	0.02805	0.02431	0.2315	0.02160	0.02261
(50, 10)	0.02488	0.02477	0.02332	0.02488	0.02205	0.02115	0.01976	0.02061
(100, 10)	0.02095	0.02065	0.01983	0.022095	0.01899	0.01828	0.01730	0.01794

На рис. 3 і рис. 4 наведено залежність прогину  $\bar{w}$  в центрі сферичної оболонки ( $k_{r1} = 0.5$ ,  $k_{r2} = 0.5$ ) від значення градієнтного індексу  $p$  при значеннях характеристик пружної основи  $\bar{K}_W = 50$ ,  $\bar{K}_P = 0$  (рис. 3) та  $\bar{K}_W = 50$ ,  $\bar{K}_P = 10$  (рис. 4). Розглядаємо два випадки: оболонка жорстко закріплена по всій границі або вільно оперта. Обчислення виконано для різних співвідношень товщин шарів  $h_1 : h_2 : h_3$ . Криві 1–4 на рисунках відповідають випадку жорстко закріпленої (C) по всьому контуру оболонки для таких співвідношень товщин:

$$1 - 1: 0: 1, \quad 2 - 1: 1: 1, \quad 3 - 1: 2: 1, \quad 4 - 2: 1: 2,$$

Криві 5–8 відповідають випадку вільно опертої (C) оболонки для таких співвідношень товщин:

$$5 - 1: 0: 1, \quad 6 - 1: 1: 1, \quad 7 - 1: 2: 1, \quad 8 - 2: 1: 2.$$

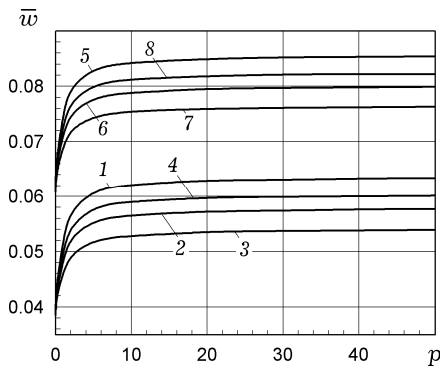


Рис. 3

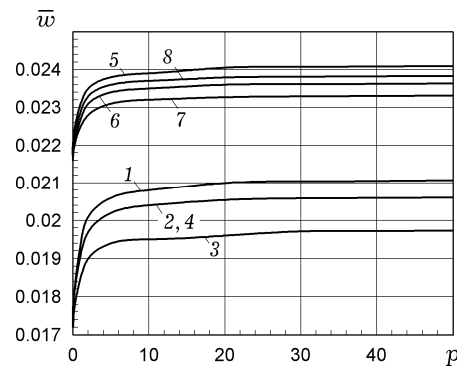


Рис. 4

Бачимо, що усі криві монотонно зростають. Більше зростання прогину спостерігається для  $0 \leq p \leq 10$ , а для  $10 \leq p \leq 50$  значення прогину зростає неістотно. Значення прогину для вільно опертої оболонки є значно більшими, ніж для жорстко закріпленої оболонки, що відповідає фізичному змісту задачі. Слід звернути увагу також на вплив коефіцієнта Пастернака  $K_P$  пружної основи на величини прогину. Збільшення цього коефіцієнта істотно зменшує значення прогину оболонки. При збільшенні товщини керамічного шару (серединний шар) значення прогину також зменшуються.

**Задача 3.** Дослідимо НДС тришарової пологої циліндричної оболонки складної геометричної форми плану з отвором у вигляді шестикутника і круглими вирізами на сторонах оболонки (рис. 5). Як і у **задачах 1, 2**, приймаємо, що оболонка опирається на пружну основу, поперечне навантаження задаємо у вигляді (20). Схема укладання шарів  $h_1 : h_2 : h_3 = 2 : 1 : 2$ .

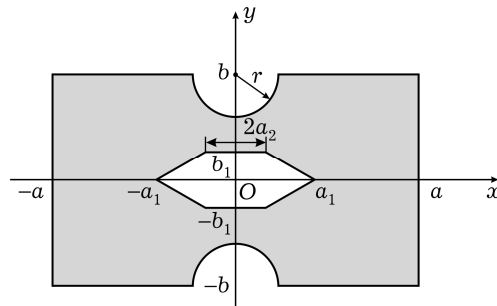


Рис. 5



Для обчислень вибрали такі геометричні розміри оболонки:

$$\frac{h}{2a} = 0.1, \quad \frac{a}{b} = 1.5, \quad \frac{a_1}{2a} = 0.3, \quad \frac{a_2}{2a} = 0.15,$$

$$\frac{b_1}{2a} = 0.15, \quad \frac{r}{2a} = 0.15, \quad k_{r1} = 0.5, \quad k_{r2} = 0.$$

Досліджено залежність максимальних значень прогину  $\bar{w}_{\max} = \frac{10hE}{(2a)^2 q} w$  оболонки від типу граничних умов, величини градієнтного індексу  $p$  та значень коефіцієнтів пружності основи. Для граничних умов введемо такі позначення:

**CC** – оболонка жорстко закріплена на зовнішньому контурі та на отворі, тобто на всій границі;

**CF** – оболонка жорстко закріплена на зовнішньому контурі та має вільний отвір;

**FC** – зовнішній контур оболонки вільний, а отвір жорстко закріплений.

У табл. 4 наведено значення максимального прогину при значеннях коефіцієнтів пружності основи  $\bar{K}_W = 0$ ,  $\bar{K}_P = 0$  і  $\bar{K}_W = 50$ ,  $\bar{K}_P = 0$  для різних значень  $p$ .

Таблиця 4

$p$	$\bar{w}_{\max} = \frac{10hE}{(2a)^2 q} w$					
	$\bar{K}_W = 0, \bar{K}_P = 0$			$\bar{K}_W = 50, \bar{K}_P = 0$		
	<b>CC</b>	<b>CF</b>	<b>FC</b>	<b>CC</b>	<b>CF</b>	<b>FC</b>
0	0.01168	0.06673	0.2211	0.01117	0.05782	0.06671
1	0.01694	0.09940	0.3364	0.01589	0.08089	0.06966
2	0.01919	0.11316	0.3847	0.01785	0.08978	0.07180
5	0.02136	0.12593	0.4282	0.01981	0.09762	0.07341
7	0.02183	0.12860	0.4369	0.02011	0.09922	0.07371
10	0.02219	0.13057	0.4431	0.02042	0.1003	0.07392

На рис. 6 зображено залежності максимального прогину  $\bar{w}_{\max}$  оболонки від градієнтного індексу  $p$  для значень коефіцієнтів пружності  $\bar{K}_W = 50$ ,  $\bar{K}_P = 10$  (криві 1–3 відповідають умовам закріплення оболонки **CC**, **CF**, **FC**) і  $\bar{K}_W = 50$ ,  $\bar{K}_P = 50$  (криві 4–6 відповідають умовам закріплення оболонки **CC**, **CF**, **FC**).

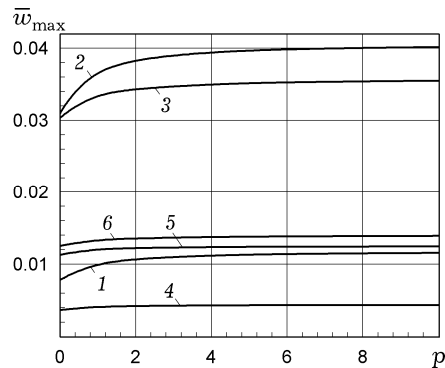


Рис. 6

Бачимо, що на максимальний прогин оболонки пружна основа та умови закріплення оболонки має істотний вплив. Прогин значно зменшується при збільшенні коефіцієнтів пружності основи, особливо коефіцієнта Пастернака  $K_p$ . При жорсткому закріпленні прогин у цьому випадку має найменші значення (крива 4).

**Висновки.** Розглянуто застосування теорії  $R$ -функцій до розв'язання задач про згин шаруватих оболонок на пружній основі з керамічним заповнювачем і зовнішніми шарами, виготовленими з функціонально-градієнтного матеріалу. Сформульовано математичну постановку задачі в рамках уточненої теорії першого порядку типу Тимошенка для пологих функціонально-градієнтних оболонок. Показано, що застосування теорії  $R$ -функцій разом з варіаційним методом Рітца дозволяє розв'язувати широке коло задач згину пологих оболонок на пружній основі. За допомогою створеного програмного забезпечення протестовано достовірність розробленого підходу та розв'язано ряд задач з метою дослідження впливу на НДС оболонок граничних умов, пружної основи, градієнтного індексу та товщини шарів. Розв'язано задачу про згин тришарової оболонки складної геометричної форми з отвором у вигляді шестикутника та круглими вирізами на сторонах оболонки. Проаналізовано залежність поведінки такої оболонки від типу закріплення отвору оболонки, значень градієнтного індексу, характеристик пружної основи та інших параметрів. Одержані результати подано у вигляді таблиць і графіків.

1. Курпа Л. В. Метод  $R$ -функцій для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. – Харьков: НТУ Пресс, 2009. – 408 с.
2. Курпа Л. В., Мазур О. С., Шматко Т. В. Применение теории  $R$ -функцій к решению нелинейных задач динамики многослойных пластин. – Харьков: ООО «В деле», 2016. – 492 с.
3. Курпа Л. В., Шматко Т. В. Дослідження вільних коливань і стійкості функціонально-градієнтних тришарових пластин за допомогою теорії  $R$ -функцій і варіаційних методів// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 1. – С. 155–172.  
 The same: Kurpa L. V., Shmatko T. V. Investigation of free vibrations and stability of functionally graded three-layer plates by using the  $R$ -functions theory and variational methods // J. Math. Sci. – 2020. – **249**, No. 3. – P. 496–520. – <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04955-2>.
4. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функцій и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
5. Alibeigloo A., Liew K. M. Free vibration analysis of sandwich cylindrical panel with functionally graded core using three-dimensional theory of elasticity // Compos. Struct. – 2014. – **113**. – P. 23–30. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.03.004>.
6. Huang Z. Y., Lu C. F., Chen W. Q. Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations // Compos. Struct. – 2008. – **85**, No. 2. – P. 95–104. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.10.010>.
7. Jin G., Shi Sh., Su Zh., Li Sh., Liu Zh. A modified Fourier-Ritz approach for free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with general boundary conditions // Int. J. Mech. Sci. – 2015. – **93**. – P. 256–269. – <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.02.006>.
8. Kulkarni P., Dhoble A., Padole P. A review of research and recent trends in analysis of composite plates // Sadhana. – 2018. – **43**, No. 6. – <https://doi.org/10.1007/s12046-018-0867-1>.
9. Kurpa L., Shmatko T., Timchenko G. Free vibration analysis of laminated shallow shells with complex shape using the  $R$ -functions method // Compos. Struct. – 2010. – **93**, No. 1. – P. 225–233. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.016>.
10. Li Q., Iu V. P., Kou K. P. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates // J. Sound Vib. – 2008. – **311**, No. 1-2. – P. 498–515. – <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.09.018>.

11. *Liew K. M., Zhao Xin, Ferreira A. J. M.* A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells // *Compos. Struct.* – 2011. – **93**, No. 8. – P. 2031–2041.  
– <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.02.018>.
12. *Mantari J. L., Granados E. V., Hinojroza M. A., Guedes Soares C.* Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT // *Compos. Struct.* – 2014. – **118**. – P. 455–471.  
– <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.039>.
13. *Meiche N. E., Tounsi A., Ziane N., Mechab I., Adda Bedia E. A.* A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate // *Int. J. Mech. Sci.* – 2011. – **53**, No. 4. – P. 237–247.  
– <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.01.004>.
14. *Mori T., Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // *Acta Metallurgica.* – 1973. – **21**, No. 5. – P. 571–574.  
– [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(73\)90064-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(73)90064-3).
15. *Neves A. M. A., Ferreira A. J. M., Carrera E., Cinefra M., Jorge R. M. N., Soares C. M. M.* Buckling analysis of sandwich plates with functionally graded skins using a new quasi-3D hyperbolic sine shear deformation theory and collocation with radial basis functions // *ZAMM – Z. Angew. Math. Mech.* – 2012. – **92**, No. 9. – P. 749–766.  
– <https://doi.org/10.1002/zamm.201100186>.
16. *Pradhan S. C., Loy C. T., Lam K. Y., Reddy J. N.* Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions // *Appl. Acoust.* – 2000. – **61**, No 1. – P. 111–129.
17. *Punera D., Kant T.* A critical review of stress and vibration analyses of functionally graded shell structures // *Compos. Struct.* – 2019. – **210**. – P. 787–809.  
– <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.084>.
18. *Reddy J. N.* Analysis of functionally graded plates // *Int. J. Num. Meth. Eng.* – 2000. – **47**, Nos. 1-3. – P. 663–684.  
– [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000110/30\)47:1/3<663::AID-NME787>3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000110/30)47:1/3<663::AID-NME787>3.0.CO;2-8).
19. *Sayyid A. S., Ghugal Y. M.* On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results // *Compos. Struct.* – 2015. – **129**. – P. 177–201.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.007>.
20. *Shen H. S.* Functionally graded materials: nonlinear Analysis of plates and shells. – Boca Raton: CRC Press., 2009. – 280 p.  
– <https://doi.org/10.1201/9781420092578>.
21. *Sobhy M., Zenkour A. M.* Thermodynamical bending of FGM sandwich plates resting on Pasternak's elastic foundations // *Adv. Appl. Math. Mech.* – 2015. – **7**, No. 1. – P. 116–134.  
– <https://doi.org/10.4208/aamm.2013.m143>.
22. *Swaminathan K., Naveenkumar D. T., Zenkour A. M., Carrera E.* Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates – A state-of-the-art review // *Compos. Struct.* – 2015. – **120**. – P. 10–31.  
– <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.09.070>.
23. *Thai H.-T., Kim S.-E.* A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells // *J. Compos. Struct.* – 2015. – **128**. – P. 70–86.  
– <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.010>.
24. *Tornabene F., Fantuzzi N., Viola E., Reddy J. N.* Winkler–Pasternak foundation effect on the static and dynamic analyses of laminated doubly-curved and degenerate shells and panels // *Composites: Part B.* – 2014. – **57**. – P. 269–296.  
– <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.020>.
25. *Voigt W.* Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper // *Ann Phys.* – 1889. – **274**, No. 12. – P. 573–587.  
– <https://doi.org/10.1002/andp.18892741206>
26. *Zenkour A. M.* A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2 – Buckling and free vibration // *Int. J. Solids Struct.* – 2005. – **42**, No. 18-19. – P. 5243–5258.  
– <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.016>.

## COMPUTER SIMULATION OF STRESS STRAIN STATE OF FUNCTIONALLY GRADED SANDWICH PLATES AND SHALLOW SHELLS OF THE COMPLEX SHAPE RESTING ON ELASTIC FOUNDATION

*The bending problem of a three-layer shallow shell on an elastic foundation under the action of a transverse loading is considered. It is assumed that the bottom and top layers are made of functionally graded materials, and the filler is made of isotropic material (metal or ceramic). For mathematical modeling of the problem the Timoshenko-type refined theory of the first order of plates that takes into account shear deformation is used. The elastic foundation of the shell is modeled by a two-parameter Pasternak-type model. The effective elastic properties of functionally graded materials are varied by the power law. The proposed algorithm for determining the stress strain state of the shell during bending is based on the Ritz variational method and the R - functions theory. Created software that implements the proposed approach is approved on the test problems for rectangular plates with various layering schemes and various characteristics of an elastic foundation. The efficiency and versatility of the method is demonstrated by the example of a shell with a hexagonal hole and round cutouts on the sides. Various conditions of fastening the hole and the outer contour of the shell are considered. The influence of the gradient index and characteristics of the elastic foundation on the value of the maximum deflection is studied. The results obtained are presented in the form of tables and graphs and are used to study plates and shallow shells with a complex plan shape.*

**Key words:** *bending, functionally graded material, sandwich plate, shallow shells, elastic foundation, R -functions theory, Ritz variational method.*

Нац. техн. ун-т  
«Харків. політехн. ін-т», Харків

Одержано  
29.03.21