УДК 517.956.4

***Світлій пам'яті С. Д. Івасишена***

І. П. Мединський[✉]

# ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ: ІСНУВАННЯ, ВЛАСТИВОСТІ ТА ДЕЯКІ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

*Зроблено огляд результатів побудови, дослідження і застосувань фундаментальних розв'язків задачі Коші для декількох класів вироджених параболічних рівнянь.*

***Ключові слова:*** *параболічні рівняння, виродження на початковій гіперплощині, вироджені рівняння типу Колмогорова, фундаментальний розв'язок задачі Коші, об'ємний потенціал, інтегральні зображення розв'язків.*

**Вступ.** У статті наводяться результати побудови й досліджень фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК) для таких чотирьох класів вироджених параболічних рівнянь: $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$ і $\mathcal{K}_4$. Клас $\mathcal{K}_1$ складають ультрапараболічні рівняння типу Колмогорова. До класу $\mathcal{K}_2$ входять рівняння типу Колмогорова довільного порядку. Рівняння з класу $\mathcal{K}_3$ – це рівняння типу рівнянь з класу $\mathcal{K}_1$, в яких додатково наявні виродження при $t = 0$. Класи рівнянь $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$ є природними узагальненнями у різних напрямках відомого рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова. Клас $\mathcal{K}_4$ складають $\overrightarrow{2b}$-параболічні за Ейдельманом системи рівнянь із виродженням на початковій гіперплощині. Особливістю рівнянь з цього класу є нерівноправність просторових змінних і наявність виродження при $t = 0$. Дослідження рівнянь з указаних класів розпочиналися і проводилися у тісній співпраці з професором Івасишеним С. Д. Рівняння із вказаних класів є природним узагальненням в різних напрямках параболічних за І. Г. Петровським [29] рівнянь (систем рівнянь), теорії яких присвячені численні статті і монографії [1, 7, 9, 10, 25, 30, 32–35]. Добре відомими є глибокі й повні результати в теорії задачі Коші для рівномірно параболічних рівнянь як лінійних, так і квазілінійних. При одержанні більшості з цих результатів істотну роль відіграє ФРЗК для таких рівнянь, його властивості, а також властивості породжуваних ним потенціалів. ФРЗК за різних припущень на коефіцієнти системи будувались і досліджувались: для рівномірно параболічних систем рівнянь – І. Г. Петровським, О. А. Ладиженською, С. Д. Ейдельманом, В. Поґожельським, Д. Г. Аронсоном, Л. Н. Слободецьким і М. І. Матійчуком; для $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь – С. Д. Ейдельманом та С. Д. Івасишеним; для параболічних рівнянь з різними виродженнями й особливостями – С. Д. Івасишеним і С. Д. Ейдельманом разом з їхніми учнями Г. П. Малицькою, Л. М. Тичинською, Л. М. Андросовою, О. Г. Возняк, В. С. Дронем, Л. П. Березан, Г. С. Пасічник, І. П. Мединським. Результати стосовно побудови й дослідження ФРЗК знайшли важливі різноманітні застосування до вивчення коректної розв'язності задачі Коші в широких класах функцій, одержання інтегрального зображення розв'язків задачі Коші, встановлення локальної розв'язності задачі Коші для нелінійних параболічних за Петровським систем рівнянь. Рівняння з виродженням за часовою змінною вивчались А. С. Калашниковим, В. П. Глушком, А. В. Глушаком, С. Д. Шмулевичем та ін. Параболічні системи рівнянь з виродженням на початковій гіперплощині вивчались у працях С. Д. Івасишена, О. Г. Возняк та І. П. Мединського. У цих працях побудовано і досліджено ФРЗК для такої систем рівнянь і встановлено оцінки побудованого ФРЗК, його похідних і приростів цих похідних. Одержані оцінки ФРЗК

✉ i.p.medynsky@gmail.com

використано для вивчення об'ємних потенціалів та інтегралів Пуассона, ядрами яких є ФРЗК. Ними також побудовано шаудерову теорію розв'язків параболічних систем з виродженням, зокрема доведено теореми про підвищення гладкості таких розв'язків. Однак не повністю досліджувалась залежність класів розв'язків систем від поведінки функцій, що спричиняють виродження. Крім того, перелічених результатів, одержаних згаданими авторами для лінійних параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині, є ще недостатньо для проведення дослідження локальної розв'язності квазілінійних систем з виродженням, аналогічного тому, яке проводилось для невироджених систем. Природно доповнити ці результати аналогічними результатами для $\overrightarrow{2b}$-параболічних за Ейдельманом систем рівнянь з виродженням на початковій гіперплощині. Класи рівнянь $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$, як уже згадувалось вище, є певними узагальненнями класичного рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова. Так, ще в 1934 р. А. М. Колмогоров [45] при вивченні рухів фізичної системи прийшов до рівняння дифузії з інерцією, яке є виродженим параболічним рівнянням і належить до класу ультрапараболічних рівнянь. Це рівняння є прототипом цілої сім'ї еволюційних рівнянь, які виникають у теорії дифузійних процесів, кінетичній теорії газу, при вивченні руху матеріальних частинок у полі сил, при дослідженні математичних моделей опціонів та ін. [2, 31, 36–38, 42, 46, 48, 49]. Вивченням класичного рівняння дифузії з інерцією Колмогорова та його різноманітних узагальнень, у тому числі й для випадку рівнянь довільного порядку, займався цілий ряд математиків, серед яких M. Weber, А. М. Ільїн, І. М. Сонін, Я. С. Шатиро, Л. П. Купцов, С. Д. Ейдельман, Г. П. Малицька, Y. Kato, Л. М. Тичинська, С. Д. Івасишен, Л. М. Андросова, В. С. Дронь, О. Г. Возняк, італійці S. Polidoro, E. Lanconelli, M. Manfredini, A. Pascucci, M. Di Francesco та ін. Ними одержано важливі результати, що стосуються фундаментальних розв'язків і коректної розв'язності задачі Коші, а також властивостей розв'язків. Найповніші та найточніші результати при цьому одержано для рівнянь з коефіцієнтами, що не залежать від просторових змінних. Якщо коефіцієнти рівнянь залежать від усіх змінних, то ще досі точних і повних результатів не одержано. Зауважимо, що зважаючи на важливі застосування, дослідження рівнянь Фоккера – Планка – Колмогорова та ультрапараболічних рівнянь (лінійних і нелінійних) інтенсивно проводяться й іншими методами без побудови ФРЗК (див. монографії [2, 31]).

У відомій монографії С. Д. Ейдельмана, С. Д. Івасишена і А. Н. Кочубея [41] для вироджених рівнянь типу Колмогорова з коефіцієнтами, залежними від усіх змінних, отримано результати, які стосуються побудови некласичних ФРЗК, тобто розв'язків, які мають старші похідні лише за основними змінними. Природною є потреба у побудові класичних ФРЗК для рівнянь з цих класів, детальному вивченні їх властивостей та властивостей породжуваних ними потенціалів і дослідженні коректної розв'язності задачі Коші в широких класах вагових функцій. Це потребує не тільки знаходження відповідних умов на коефіцієнти вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, але й розробки і вдосконалення методів побудови і дослідження ФРЗК, зокрема й методу Леві.

З наведеного вище огляду праць випливають такі висновки та актуальні проблеми: ***1***) для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова немає повністю обґрунтованих результатів, що стосуються існування, точних оцінок і властивостей класичних ФРЗК; тому актуальною є проблема знаходження умов на коефіцієнти рівнянь, за яких існують класичні ФРЗК з потрібними природними властивостями, в тому числі з точними оцінками, при цьому необхідна детальна розробка методів і повного обґрунтування результатів; ***2***) для $\overrightarrow{2b}$-параболічних за Ейдельманом систем рівнянь і виродженням на початковій гіперплощині у відомих працях відсутнє детальне дослідження властивостей ФРЗК для кожного з типів вироджень на початковій гіперплощині; ***3***) третьою проблемою є знаходження різноманітних застосувань для рівнянь з означених вище класів, хоча би аналогічних до застосувань ФРЗК для невироджених параболічних рівнянь. Ці проблеми вирішені в дисертації автора [28], основні результати якої опубліковано в [3–6, 11–14, 16–24, 26, 27, 39, 43, 44, 47].

**1. Означення класів рівнянь. Умови на коефіцієнти.** Нехай $N$ і $n$ – задані натуральні числа, $T$ – задане додатне число. Для $j \in \mathbb{N}$ через $\mathbb{N}_j$ позначатимемо множину $\{1, \ldots, j\}$, $\mathbb{Z}_j := \mathbb{N}_j \bigcup \{0\}$. Розглядатимемо одновимірну змінну $t$ і $n$-вимірну змінну $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, при цьому $t$ і $x_1, \ldots, x_n$ будемо інтерпретувати відповідно як часову і просторові змінні. У випадку вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з трьома групами просторових змінних будемо вважати, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x := (x_1, x_2, x_3)$, де $x_j := (x_{j1}, \ldots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$, $n_1 \ge n_2 \ge n_3 \ge 1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_j \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $|k| := \sum_{j=1}^{3} |k_j|$, $|k_j| := \sum_{\ell=1}^{n_j} k_{j\ell}$, $j \in \mathbb{N}_3$; $\Pi_H := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$. Змінні $t, x_{11}, \ldots, x_{1n_1}$ називатимемо основними, а решту просторових змінних – змінними груп виродження. Розглянемо рівняння вигляду

$$L_1^{(t,x)} u(t, x) := (S - A_1(t, x, \partial_{x_1})) u(t, x) = f(t, x), \qquad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}}, \tag{2}$$

$$A_1(t, x, \partial_{x_1}) := \sum_{j,\ell=1}^{n_1} a_{j\ell}(t, x) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1\ell}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x) \partial_{x_{1j}} + a_0(t, x). \tag{3}$$

У рівнянні (1) $f : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ – відома і $u : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ – шукана функції. Коефіцієнти $a_{j\ell}$, $a_j$, $\{j, \ell\} \subset \mathbb{N}_{n_1}$, і $a_0$ диференціального виразу (3) є, взагалі кажучи, комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$. Через $\mathcal{A}_1$ позначатимемо множину $\mathcal{A}_1 := \{a_{j\ell}, a_j, \{j, \ell\} \subset \mathbb{N}_{n_1}, a_0\}$.

***Означення 1.*** Рівняння (1) називають *виродженим параболічним рівнянням типу Колмогорова другого порядку* (*ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова*), якщо диференціальний вираз $\partial_t - A_1(t, x, \partial_{x_1})$ є рівномірно параболічним за Петровським за основними змінними $t$, $x_1$ з вагою 2 в області $\Pi_{[0,T]}$. Це означає, що існує стала $\delta > 0$ така, що для всіх $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re} \sum_{j,\ell=1}^{n_1} a_{j\ell}(t, x) \sigma_{1j} \sigma_{1\ell} \ge \delta |\sigma_1|^2. \tag{4}$$

Клас так означених рівнянь позначатимемо через $\mathcal{K}_1$. Означимо $\mathcal{K}_2$ як клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку. Нехай $b$ – задане натуральне число, $L_2^{(t,x)} := S - A_2(t,x,\partial_{x_1})$, де диференціальний вираз $S$ визначається формулою (2), а диференціальний вираз $A_2$ – формулою

$$A_2(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{|k_1|\le 2b} a_{k_1}(t,x)\partial_{x_1}^{k_1}. \tag{5}$$

Розглянемо рівняння

$$L_2^{(t,x)}u(t,x) = f(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{6}$$

де $f : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ – відома і $u : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ – шукана функції. Коефіцієнти диференціального виразу (5) $a_{k_1}$, $|k_1| \le 2b$, є комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$. Через $\mathcal{A}_2$ позначимо множину $\mathcal{A}_2 := \{a_{k_1}, |k_1| \le 2b\}$.

***Означення 2.*** Рівняння (6) називають *виродженим параболічним рівнянням типу Колмогорова довільного порядку* $2b$, якщо диференціальний вираз $\partial_t - A_2(t,x,\partial_{x_1})$ є рівномірно параболічним за Петровським з вагою $2b$ за основними змінними $t$, $x_1$ в області $\Pi_{[0,T]}$. Інакше кажучи, існує така стала $\delta > 0$, що для всіх $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re} \sum_{|k_1|=2b} a_{k_1}(t,x)(i\sigma_1)^{k_1} \le -\delta \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^{2b}, \tag{7}$$

де $i$ – уявна одиниця.

Наступним є клас $\mathcal{K}_3$ – клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова другого порядку із виродженням на початковій гіперплощині. Нехай $\alpha$ і $\beta$ – неперервні на відрізку $[0,T]$ функції, які задовольняють такі умови: $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0,T]$, $\alpha(0)\beta(0) = 0$ і $\beta$ – монотонно неспадна функція. Розглядається рівняння вигляду

$$L_3^{(t,x)}u(t,x) := \left(\alpha(t)\partial_t - \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} + \sum_{j,\ell=1}^{n_1} a_{j\ell}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1\ell}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}}\right) + a_0(t,x)\right)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{8}$$

де, як і вище, $f : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ – відома і $u : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ – шукана функції. Коефіцієнти $a_{j\ell}$, $a_j$, $\{j,\ell\} \subset \mathbb{N}_{n_1}$, і $a_0$, є комплекснозначними функціями в $\Pi_{[0,T]}$. Множину цих коефіцієнтів позначатимемо через $\mathcal{A}_3$. Зауважимо, що $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1$.

***Означення 3.*** Рівняння (8) називають *виродженим параболічним рівнянням типу Колмогорова другого порядку* (*ультрапараболічним рівнянням*) *із виродженням на початковій гіперплощині*, якщо диференціальний вираз $\partial_t - A_3(t,x,\partial_{x_1})$ є рівномірно параболічним за Петровським за основними змінними $t$, $x_1$ з вагою 2 в області $\Pi_{[0,T]}$.

Перейдемо до означення рівнянь з класу $\mathcal{K}_4$ – класу параболічних рівнянь векторного порядку із виродженням на початковій гіперплощині.

Нехай $b_1,\dots,b_n$ − задані числа з $\mathbb{N}$, а $b$ − найменше спільне кратне цих чисел. Через $\overrightarrow{2b}$ позначатимемо вектор $(2b_1,\dots,2b_n)$, $m_j := b/b_j$, $j \in \mathbb{N}_n$, $\|k\| := \sum_{j=1}^{n} m_j k_j$. Розглянемо рівняння вигляду

$$L_4^{(t,x)}u(t,x) := \left(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\sum_{0<\|k\|\le 2b} a_k(t,x)\partial_x^k - a_0(t,x)\right)u(t,x) = f(t,x),$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{9}$$

де $I$ − одинична матриця порядку $N$; $a_k : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{NN}$, $\|k\| \le 2b$, $f : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{N1}$ − відомі і $u : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{N1}$ − шукана функції, $\mathbb{C}_{N1}$ і $\mathbb{C}_{NN}$ − сукупності матриць розміру відповідно $N \times 1$ і $N \times N$, елементами яких є комплексні числа; $\alpha$ і $\beta$ − такі, як вище. При $N > 1$ рівняння (9) є векторним. Всі змінні є основними, тобто змінна $x$ складається з однієї групи і формально $n_1 = n$, $n_2 = n_3 = 0$. Для рівняння (9) $\mathcal{A}_4 := \{a_k \mid \|k\| \le 2b\}$.

***Означення 4.*** Рівняння (9) називається *параболічним рівнянням векторного порядку* $\overrightarrow{2b}$ *з виродженням на початковій гіперплощині*, якщо матричний диференціальний вираз $I\partial_t - \sum_{\|k\|\le 2b} a_k(t,x)\partial_x^k$ є рівномірно параболічним у сенсі Ейдельмана векторного порядку $\overrightarrow{2b}$ в області $\Pi_{[0,T]}$. Це означає, що існує стала $\delta > 0$ така, що для всіх точок $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і векторів $\sigma := (\sigma_1,\dots,\sigma_n) \in \mathbb{R}^n$ корені $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ алгебраїчного рівняння вигляду $\det\left(\lambda I - \sum_{\|k\|=2b} a_k(t,x)(i\sigma)^k\right) = 0$ задовольняють нерівності

$$\operatorname{Re}\lambda_j(t,x,\sigma) \le -\delta\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^{2b_j}, \qquad j \in \mathbb{N}_N. \tag{10}$$

Рівняння з класів $\mathcal{K}_3$ і $\mathcal{K}_4$ поділяються за типом виродження на початковій гіперплощині. Тип виродження визначається залежно від того, які значення скінченні чи нескінченні при $t = T$ і $\tau = 0$ набувають функції $A(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$ та $B(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta$, $0 \le \tau \le t \le T$. Виродження рівняння називають *слабким*, якщо $A(T,0) < +\infty$; *сильним*, якщо $A(T,0) = +\infty$, $B(T,0) < +\infty$, і *дуже сильним*, якщо $A(T,0) = +\infty$, $B(T,0) = +\infty$. Нехай для $y := (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^n$

$$x^{(\ell)}(y) = \begin{cases} y, & \ell = 0, \\ (x_1, y'),\ y' := (y_1, y_2), & \ell = 1, \\ (x_1, x_2, y_3), & \ell = 2, \\ x, & \ell = 3. \end{cases}$$

***Означення 5.*** Рівняння $L_j^{(t,x^{(\ell)}(y))}u(t,x) = f(t,x)$ з класу $\mathcal{K}_j$, $j \in \mathbb{N}_4$, $\ell \in \mathbb{Z}_3$, називатимемо *допоміжним*, якщо коефіцієнти цього рівняння залежать від параметрів $y_1$, $y_2$ і $y_3$. Тобто при $\ell \in \mathbb{Z}_2$ рівняння є допоміжним, а при $\ell = 3$ − основним.

Множину коефіцієнтів з $\mathcal{A}_\ell$, які стоять при старших похідних рівняння з відповідного класу $\mathcal{K}_\ell$, позначатимемо через $\mathcal{A}_\ell^0$, $\ell \in \mathbb{N}_4$. Зауважимо, що до $\mathcal{A}_4^0$ включатимемо коефіцієнт $a_0$. Наведемо умови на коефіцієнти рівнянь з означених вище класів. Будемо користуватись ще такими позначеннями:

$$\Delta_x^z f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, z, \cdot), \quad \Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot, x, \cdot), \quad s \in \mathbb{N}_3,$$

$$z^{(0)} := x, \quad z^{(1)} := (z_1, x_2, x_3), \quad z^{(2)} := (x_1, z_2, x_3), \quad z^{(3)} := (x_1, x_2, z_3),$$

$$X(t) := (X_1(t), X_2(t), X_3(t)), \qquad X_1(t) := x_1,$$

$$X_2(t) := x_2 + t\tilde{x}_1, \quad X_3(t) := x_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2 x_1', \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{x}_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2}), \quad x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_3}), \quad x_2' := (x_{21}, \ldots, x_{2n_3}),$$

$$M := \sum_{j=1}^{3} \tilde{m}_j n_j, \quad \tilde{m}_j := j - \frac{1}{2}, \quad j \in \mathbb{N}_3,$$

$$h_\ell := (\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 2})h + \delta_{\ell 3} B(h, \tau), \qquad \ell \in \mathbb{N}_3,$$

$\delta_{\ell j}$ – символ Кронекера; $\tau_\ell := \begin{cases} 0, & \ell \in \mathbb{N}_2, \\ \tau, & \ell = 3; \end{cases}$ $\quad p_0(x, x') := \left( \sum_{j=1}^{n} \left| x_j - x_j' \right|^{2/m_j} \right)^{1/2}$,

$p(t, x; t', x') := \left( (A(t, \tau))^{1/b} + (p_0(x, x'))^2 \right)^{1/2}$, $\{(t, x), (t', x')\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Для множин коефіцієнтів $\mathcal{A}_\ell$ рівнянь з класу $\mathcal{K}_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_4$, використовуватимемо такі умови:

**($A_{\ell 1}$)** – коефіцієнти є обмеженими й неперервними за $t \in [0, T]$ комплексно-значними функціями (при цьому неперервність коефіцієнтів з $\mathcal{A}_4^0$ є рівномірною щодо $x \in \mathbb{R}^n$);

**($A_{\ell 2}$)** – функції з $\mathcal{A}_\ell$ є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists H_{\ell 1} > 0, \quad \exists \gamma_1 \in (0, 1] \quad \forall \{(t, x), (t, z^{(1)})\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$

$$\left| \Delta_{x_1}^{z_1} a(t, x) \right| \le H_{\ell 1} |x_1 - z_1|^{\gamma_1}, \qquad a \in \mathcal{A}_\ell, \quad \ell \in \mathbb{N}_3; \tag{11}$$

$$\exists H_{\ell 2} > 0, \quad \exists \gamma_2 \in (1/3, 1] \quad \forall \{(t, x), (t, z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad \forall h \in [\tau_\ell, T] :$$

$$\left| \Delta_{x_2}^{z_2} a(t, x) \right| \le H_{\ell 2} \left( h_\ell^{\tilde{m}_2 \gamma_2} + |X_2(h_\ell) - z_2|^{\gamma_2} \right), \quad a \in \mathcal{A}_\ell, \quad \ell \in \mathbb{N}_3; \tag{12}$$

$$\exists H_{\ell 3} > 0, \quad \exists \gamma_3 \in (3/5, 1] \quad \forall \{(t, x), (t, z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad \forall h \in [\tau_\ell, T] :$$

$$\left| \Delta_{x_3}^{z_3} a(t, x) \right| \le H_{\ell 3} \left( h_\ell^{\tilde{m}_3 \gamma_3} + |X_3(h_\ell) - z_3|^{\gamma_3} \right), \quad a \in \mathcal{A}_\ell, \quad \ell \in \mathbb{N}_3; \tag{13}$$

$$\exists H_{44} > 0, \quad \exists \gamma_4 \in (0, 1] \quad \forall \{(t, x), (t, z)\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$

$$\left| \Delta_x^z a(t, x) \right| \le H_{44} (p_0(x, z))^{\gamma_4}, \qquad a \in \mathcal{A}_4; \tag{14}$$

**($A_{\ell 3}$)** – коефіцієнти з $\mathcal{A}_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_4$, мають обмежені й неперервні похідні того порядку, біля яких вони стоять;

$(\boldsymbol{A}_{\ell 4})$ – похідні з умови $(\boldsymbol{A}_{\ell 3})$ є гельдеровими за просторовими змінними в сенсі умов $(\boldsymbol{A}_{\ell 2})$;

$(\boldsymbol{A}_{\ell 5})$ – справджуються нерівності

$$\exists H_{\ell 5} > 0 \quad \forall\{(t,x),(t,z^{(s)}),(t,\xi^{(r)}\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad \{r,s\} \subset \mathbb{N}_3, \quad r < s,$$

$$\forall h_\ell \in [\tau_\ell, T] : \left|\Delta_{x_r}^{\xi_r} \Delta_{x_s}^{z_s} a(t,x)\right| \le H_{\ell 5}\big((h'_\ell)^{\tilde{m}_2\gamma_2} + \left|X_r(h'_\ell) - \xi_2\right|^{\gamma_2}\big) \times$$

$$\times (h_s^{\tilde{m}_s\gamma_s} + |X_s(h_\ell) - z_s|^{\gamma_s}), \qquad a \in \mathcal{A}_\ell, \qquad \ell \in \mathbb{N}_3$$

$$(h'_\ell = 0, \text{ якщо } r = 1); \tag{15}$$

$$\exists H_6 > 0 \quad \forall\{(t,x),(t',x)\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad t' > t : |\, \Delta_t^{t'} a(t,x) \le (A(t',t))^{\gamma_4/(2b)},$$

$$a \in \mathcal{A}_4; \tag{16}$$

$$\exists H_7 > 0, \quad \exists \gamma_0 \in (0,1] \quad \forall t \in [0,T] : \quad \int_0^t (B(t,\tau))^{-1+\gamma_0/(2b)} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \le H_7. \tag{17}$$

З умов (12) і (13) при $h_\ell = \tau_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, випливають звичайні умови Гельдера за змінними виродження $x_2$ і $x_3$. Наведемо достатні умови виконання (12), (13). Покладемо $T_\ell := T$, якщо $\ell \in \mathbb{N}_2$, і $T_3 := B(T,\tau)$, $\tau \in [0,T)$.

**Лема 1.** *Нехай* $a$ – *неперервна й обмежена функція в* $\Pi_{[0,T]}$. *Для неї правильними є такі твердження*:

(*i*) *якщо виконується умова*

$$\exists C_{\ell 1} > 0, \quad \exists \beta_1 \in (1/3,1] \quad \forall\{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$

$$\left|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)\right| \le C_{\ell 1}(T_\ell^{\tilde{m}_1} + |\tilde{x}_1|)^{-\beta_1} |x_2 - z_2|^{\beta_1}, \qquad \ell \in \mathbb{N}_3, \tag{18}$$

*то справджується нерівність* (12) *з* $\gamma_2 = \beta_1/\tilde{m}_2$;

(*ii*) *якщо виконується умова*

$$\exists C_{\ell 2} > 0, \quad \exists \beta_2 \in (9/10,1] \quad \forall\{(t,x),(t,z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]} : \left|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)\right| \le$$

$$\le C_{\ell 2}(T_\ell^{\tilde{m}_1} + 2^{-1}T_\ell |x'_1| + |x'_2|)^{-\beta_2} |x_3 - z_3|^{\beta_2}, \qquad \ell \in \mathbb{N}_3, \tag{19}$$

*то справджується нерівність* (13) *з* $\gamma_3 = \beta_2/\tilde{m}_2$.

З наведеної леми випливає, що умови (12) і (13) не є, взагалі кажучи, еквівалентними (навіть локально) відповідним умовам Гельдера за просторовими змінними груп виродження. Але ці умови дозволяють повніше використати переваги поетапного методу Леві побудови ФРЗК.

**2. Допоміжні відомості і твердження.** Наведемо означення ФРЗК. Позначимо через $Q$ деяку множину точок $(t,x)$ простору $\mathbb{R}^{n+1}$. Нехай $L_N(t,x,\partial_t,\partial_x)$ – лінійний диференціальний вираз, скалярний при $N=1$ і матричний розміру $N \times N$ при $N > 1$, з комплекснозначними коефіцієнтами, які залежать від $t$ і $x$ та визначені в $Q$. Розглянемо рівняння вигляду

$$L_N(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) = f(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{20}$$

де $f : Q \to \mathbb{C}_{N1}$ – відома, а $u : Q \to \mathbb{C}_{N1}$ – невідома функції. Припускатимемо, що диференціальний вираз $L_N(t,x,\partial_t,\partial_x)$ з (20) є рівномірно параболічним в $\Pi_{[0,T]}$ у сенсі Петровського чи Ейдельмана.

***Означення 6.*** *ФРЗК для рівняння* (20) *або для оператора* $L_N(t, x, \partial_t, \partial_x)$ називають функцію

$$Z(\cdot, \cdot; \tau, \xi) : \Pi_{(\tau, T]} \to \mathbb{C}_{NN}, \tag{21}$$

яка залежить від параметричної точки $(\tau, \xi) \in \Pi_{[0,T)}$, таку, що формула

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi, \qquad (t, x) \in \Pi_{(\tau, T]}, \tag{22}$$

визначає в шарі $\Pi_{(\tau,T]}$ розв'язок рівняння

$$L_N(t, x, \partial_t, \partial_x)u(t, x) = 0, \qquad (t, x) \in \Pi_{(\tau, T]}, \tag{23}$$

що задовольняє початкову умову

$$u\big|_{t=\tau} = \varphi \tag{24}$$

для будь-якого $\tau \in [0, T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції $\varphi$.

***Означення 7.*** *ФРЗК* $Z$ називають *класичним*, якщо функція $Z$ має неперервні й обмежені похідні, що входять в диференціальний вираз $L_N(t, x, \partial_t, \partial_x)$.

Побудова і дослідження класичних ФРЗК здійснюється за допомогою поетапного методу Леві, який розроблений автором. Кількість етапів побудови ФРЗК залежить від кількості груп просторових змінних. На наступному етапі побудови ФРЗК за параметрикс беремо ФРЗК, побудований на попередньому етапі. Для ФРЗК використовуватимемо позначення $Z_{\ell, j-1}$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, $j \in \mathbb{N}_4$. Перший індекс вказує на номер класу, другий індекс – на етап побудови ФРЗК. Відповідно параметрикс на $j$-му етапі позначатимемо символом $G_{\ell j}$, породжуваний ним об'ємний потенціал – символом $W_{\ell j}$, а його густину – символом $Q_{\ell j}$. Процедура для рівнянь з класів $\mathcal{K}_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, однакова. Результатом кожного $j$-го етапу є твердження про існування відповідного класичного ФРЗК $Z_{\ell j}$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, $j \in \mathbb{N}_4$, встановлення точних оцінок похідних від ФРЗК, інтегралів від похідних ФРЗК і їх приростів. Проведення цих досліджень істотно залежить від всебічного вивчення властивостей об'ємних потенціалів $W_{\ell j}$, $\{\ell, j\} \in \mathbb{N}_3$. Ядром потенціалу є відповідний параметрикс $G_{\ell j}$, а густиною – відповідна функція $Q_{\ell j}$, $\{\ell, j\} \in \mathbb{N}_3$. Для густин $Q_{\ell j}$ встановлюються певні властивості та оцінки, які гарантують існування похідних від об'ємних потенціалів, їх точних оцінок та оцінок приростів таких похідних за просторовими змінними. Ці оцінки формулюються у термінах оцінювальних функцій. Наведемо означення оцінювальних функцій. Для кожного класу $\mathcal{K}_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_4$, використовуватимемо відповідну оцінювальну функцію $E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi)$, $E_c^{(2)}(t-\tau, x, \xi)$, $E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi)$ і $E_c^{(4)}(t, \tau, x-\xi)$, де $c$ – додатна стала, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$. Уведемо функції

$$E_c^{q,j}(t, z_j) := \exp\{-ct^{1-qj}\,|z_j|^q\}, \quad c > 0, \quad t > 0, \quad q > 0, \; z_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \; j \in \mathbb{N}_3, \tag{25}$$

$$E_c^{q,n}(t, x) := \exp\{-ct^{1-q}\,|x|^q\}, \quad c > 0, \quad t > 0, \quad q > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{26}$$

$$E_c^2(t,x,\xi) := \prod_{j=1}^{3} E_c^{2,j}(t, X_j(t)-\xi_j),\ \ c>0,\ \ t>0,\ \ q>0,\ \ \{x,\xi\}\in\mathbb{R}^n, \quad (27)$$

$$E_c^n(t,x-\xi) := \prod_{j=1}^{n} E_c^{q_j,n}(t,x-\xi),\ \ c>0,\ \ t>0,\ \ q_j>0,\ \ j\in\mathbb{N}_n,\ \ \{x,\xi\}\in\mathbb{R}^n. \quad (28)$$

За допомогою формул (27) і (28) означимо такі оцінювальні функції:

$$E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) := E_c^2(t-\tau,x,\xi)\,, \quad (29)$$

$$E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi) := E_c^2(B(t,\tau),x,\xi)\,, \quad (30)$$

$$E_c^{(4)}(t,\tau,x-\xi) := E_c^n(B(t,\tau),x-\xi)\,, \quad (31)$$

де $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$. У формулах (30) і (31) $\tau>0$, якщо $B(t,0)=\infty$.

Оцінювальна функція $E_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi)$ має складнішу структуру. За допомогою функції (25) означимо ще такі оцінювальні функції:

$$E_c^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1) := E_c^{q,1}(t,X_1(t)-\xi_1)\,,$$

$$E_c^{(2,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := \prod_{j=1}^{2} E_c^{q,j}(t,X_j(t)-\xi_j)\,,$$

$$E_c^{(2,3)}(t,x,\xi) := \prod_{j=1}^{3} E_c^{q,j}(t,X_j(t)-\xi_j)\,,$$

$$t>0,\quad \{x_j,\xi_j\}\subset\mathbb{R}^{n_j},\quad j\in\mathbb{N}_3,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n\,, \quad (32)$$

$$a_j^{(\chi,\tilde{C})}(t) := (\tilde{C}\Gamma(\chi)t^{\chi})^j(\Gamma(j\chi+1))^{-1},\quad t>0,\ \tilde{C}>0,\ \chi\in(0,1),\ j\in\mathbb{N}\cup\{0\}\,, \quad (33)$$

де у формулі (33) $\Gamma(\cdot)$ – ґамма-функція Ейлера,

$$E_{c,\tilde{C}}^{(2,\chi,1)}(t,x_1,\xi_1) := E_c^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1)F_{c,\tilde{C}}^{(2,\chi,1)}(t,x_1,\xi_1)\,,$$

$$F_{c,\tilde{C}}^{(2,\chi,1)}(t,x_1,\xi_1) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\tilde{C})}(t)E_{c\delta^j}^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1),\quad t>0,\quad \{x_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}, \quad (34)$$

$$E_{c,\tilde{C}}^{(2,\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := E_c^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1)F_{c,\tilde{C}}^{(2,\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)\,,$$

$$F_{c,\tilde{C}}^{(2,\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\tilde{C})}(t)E_{c\delta^j}^{(2,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)\,,$$

$$t>0,\quad \{x_j,\xi_j\}\subset\mathbb{R}^{n_j},\quad j\in\mathbb{N}_2\,, \quad (35)$$

$$E_{c,\tilde{C}}^{(2,\chi,3)}(t,x,\xi) := E_c^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1)F_{c,\tilde{C}}^{(2,\chi,3)}(t,x,\xi)\,,$$

$$F_{c,\tilde{C}}^{(2,\chi,3)}(t,x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\tilde{C})}(t)E_{c\delta^j}^{(2,3)}(t,x,\xi),\quad t>0,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n\,, \quad (36)$$

(у формулах (34)–(36) $\tilde{C}$ і $\delta$ – деякі додатні сталі, причому $\delta<1$). Отже,

$$E_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi) := E_{c,\tilde{C}}^{(2,\chi,3)}(t-\tau,x,\xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{37}$$

Розглянемо функцію

$$E_c^{(0)}(t,x,\xi) := \exp\{-c[(4t)^{-1}|x_1-\xi_1|^2 + 3t^{-3}|x_2 + 2^{-1}t(\tilde{x}_1 + \tilde{\xi}_1) - \xi_2|^2 +$$

$$+180t^{-5}|x_3 + 2^{-1}t(x_2' + \xi_2') + (12)^{-1}t^2(x_1' - \xi_1') - \xi_3|^2]\},$$

$$t > 0, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{38}$$

Зауважимо, що функція $E_c^{(0)}(t-\tau,x,\xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, з точністю до сталого множника визначає ФРЗК для модельного рівняння з класу $\mathcal{K}_1$ (тобто рівняння зі сталими коефіцієнтами). Аналогічно функція $E_c^{(0)}(B(t,\tau),x,\xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, визначає ФРЗК для модельного рівняння з класу $\mathcal{K}_3$.

При застосуванні методу Леві до побудови ФРЗК для рівнянь із класів $\mathcal{K}_1$ і $\mathcal{K}_2$ виникають інтегральні рівняння другого роду вольтеррівського типу вигляду

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\tau,\xi)u(\tau,\xi)\,d\xi, \qquad (t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}, \tag{39}$$

або

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\tau,\xi)u(\tau,\xi)\,d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}, \tag{40}$$

якщо рівняння належать до класів $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_4$, тобто мають виродження на початковій гіперплощині. Ядром інтегральних рівнянь (39), (40) є неперервна функція

$$K : P^0_{[t_0,T]} \to \mathbb{C}, \ P^0_{[t_0,T]} := \left\{(t,x;\tau,\xi) \in \left(\Pi_{[t_0,T]} \times \Pi_{[t_0,T]}\right) \mid t-\tau > 0\right\}. \tag{41}$$

Відомо, що за відповідних умов на ядро $K$ існує єдиний розв'язок рівняння (39) для довільної підходящої функції $f$, який визначається формулою

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} R(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}, \tag{42}$$

або для рівняння (40) – формулою

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} R(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}. \tag{43}$$

Тут

$$R(t,x;\tau,\xi) := \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t,x;\tau,\xi), \qquad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \tag{44}$$

$K_1 := K$, а $K_m$, $m > 1$, – повторні ядра, які визначаються відповідними рекурентними співвідношеннями

$$K_m(t,x;\tau,\xi) = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\beta,y)K_{m-1}(\beta,y;\tau,\xi)dy, \quad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \tag{45}$$

або

$$K_m(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\beta}{\alpha(\beta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\beta,y)K_{m-1}(\beta,y;\tau,\xi)\,dy,\ \ (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]}. \tag{46}$$

Функція $R$ називається резольвентою рівняння (39) або (40) залежно від того, за якою формулою (45) чи (46) визначаються повторні ядра.

ФРЗК будуються для класів вироджених параболічних рівнянь $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ і $\mathcal{K}_3$. Тому в лемах, які наводяться нижче, формулюються умови на відповідні класи ядер, що виникають при побудові ФРЗК для рівнянь з відповідного класу. Для цих ядер ряд (44) збігається абсолютно і рівномірно в $P^{\delta}_{[t_0,T]}$ для довільного $\delta\in(0,T-t_0)$. Тому існує резольвента (44) рівняння (39) або (40) і його розв'язок визначається відповідною формулою (42) чи (43). Для побудови ФРЗК використовується поетапний метод Леві.

Для рівнянь з класу $\mathcal{K}_1$ на всіх (трьох) етапах методу Леві використовується така

**Лема 2.** *Нехай ядро* (41) *є неперервним і задовольняє нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)|\le C_1(t-\tau)^{-M+\chi-1}E^{(0)}_c(t-\tau,x,\xi),\quad (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]},$$

*де* $C_1>0$, $c>0$, $M=(n_1+3n_2+5n_3)/2$ *і* $\chi\in(0,1)$. *Тоді для резольвенти справджується оцінка*

$$|R(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M+\chi-1}E^{(0)}_c(t-\tau,x,\xi).$$

Оскільки на другому етапі побудови ФРЗК оцінювальна функція для ядра $K$ відповідного інтегрального рівняння має вигляд суми ряду, то використовуватимемо таку лему.

**Лема 3.** *Якщо ядро* (41) *є неперервним і для нього справджується нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)|\le C_3(t-\tau)^{-M+\chi-1}E^{(\chi,3)}_{c_3,\tilde{C}_3}(t,x;\tau,\xi),\quad (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]},$$

*з деякими сталими* $C_3>0$, $\tilde{C}_3>0$, $c_3>0$ і $\chi\in(0,1)$, *то існує резольвента* (44), *яка є неперервною функцією і для якої справджується оцінка*

$$|R(t,x;\tau,\xi)|\le C_4(t-\tau)^{-M+\chi-1}E^{(\chi,3)}_{c_4,\tilde{C}_4}(t-\tau,x,\xi),\ \ (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]},$$

*в якій* $C_4>0$, $\tilde{C}_4>0$, $c_4>0$ *– деякі сталі, причому* $\tilde{C}_4>\tilde{C}_3$, *а* $c_4<c_3$.

Для рівнянь з класу $\mathcal{K}_3$ використовується

**Лема 4.** *Нехай ядро* (41) *є неперервним і задовольняє нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)|\le C_1\beta(\tau)(B(t,\tau))^{-M+\chi-1}E^{(0)}_c(B(t,\tau),x,\xi),\quad (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]},$$

*де* $C_1>0$, $c>0$, $M=(n_1+3n_2+5n_3)/2$ *і* $\chi\in(0,1)$ *– деякі сталі. Тоді для резольвенти справджується оцінка*

$$|R(t,x;\tau,\xi)|\le C(B(t,\tau))^{-M+\chi-1}E^{(0)}_c(t-\tau,x,\xi).$$

**3. Існування і оцінки ФРЗК.** Наведемо результати побудови ФРЗК для рівнянь з класів $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ і $\mathcal{K}_3$, коефіцієнти яких залежать від $t$ і параметра $y$, тобто допоміжних рівнянь з відповідних класів. Для побудови ФРЗК у цих випадках застосовується перетворення Фур'є.

**Теорема 1.** *Нехай коефіцієнти* $\mathcal{A}_\ell$ *як функції* $t$ *і* $y$ *задовольняють умови* $(\boldsymbol{A}_{\ell 1})$ *і* $(\boldsymbol{A}_{\ell 2})$, $\ell\in\mathbb{N}_3$. *Тоді існує класичний ФРЗК* $Z_{\ell 0}$, *для якого справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z_{\ell 0}(t,x;\tau,\xi;y)\right| \le C_k (T_\ell(t,\tau))^{-M-M_k}\, \tilde{E}_c^{(\ell)}(t,\tau,x,\xi), \tag{47}$$

$$\left|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k Z_{\ell 0}(t,x;\tau,\xi;y)\right| \le C_{sk} (T_\ell(t,\tau))^{-M-M_k}\, \tilde{E}_c^{(\ell)}(t,\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\begin{cases} |y_1 - z_1|^{\gamma_1}, & s=1,\\ (h_l^{\tilde{m}_s\alpha_s} + |Y_s(h_l) - z_s|^{\gamma_s}), & s\in\{2,3\},\end{cases} \tag{48}$$

*а також рівності*

$$\partial_x^k \int_{\mathbb{R}^n} Z_{\ell 0}(t,x;\tau,\xi;y)\,d\xi = 0,\quad \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_{\ell 0}(t,x;\tau,\xi;y)\,dx = 0,\quad k\in\mathbb{Z}_+^n\backslash\{0\}, \tag{49}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Z_{\ell 0}(t,x;\tau,\xi;y)\,d\xi_2\,d\xi_3 = 0,\quad \{k_2,k_3\}\in\mathbb{Z}_+^{n_2+n_3}\backslash\{0\}, \tag{50}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_{\ell 0}(t,x;\tau,\xi;y)\,d\xi_3 = 0,\quad k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\backslash\{0\}, \tag{51}$$

$$\partial_x^k Z_{\ell 0}(t,x;\tau,\xi;y) = (-\partial_\xi)^k Z_{\ell 0}(t,x;\tau,\xi;y), \tag{52}$$

*де* $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}$, $k:=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n$, $s\in\mathbb{N}_3$, $C_k, C_{sk}$ *– додатні сталі,* $M_k := \sum_{j=1}^{3}\tilde{m}_j|k_j|$, $h$ *і* $\gamma_s$ *– числа з умов* (12)–(14), $T_\ell(t,\tau)=t-\tau$, *якщо* $\ell\in\mathbb{N}_2$, *і* $T_3(t,\tau)=B(t,\tau)$,

$$\tilde{E}_c^{(1)}(t,\tau,x,\xi) := E_c^{(\ell)}(t-\tau,x,\xi),\quad \tilde{E}_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi) := E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$\tilde{E}_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi) := E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi),\qquad E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) := E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi)E^d(t,\tau),$$

$$E^d(t,\tau) := \exp\{A(t,\tau)\,d\},$$

$h_\ell$ *– таке, як вище.*

Для рівнянь з класу $\mathcal{K}_4$ справджується така

**Теорема 2.** *Нехай коефіцієнти* $\mathcal{A}_4$ *рівняння* (9) *задовольняють умови* $(\boldsymbol{A}_{41})$ *і* $(\boldsymbol{A}_{42})$. *Тоді для цього рівняння існує ФРЗК* $Z_4(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, *для якого справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z_4(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(B(t,\tau))^{-(M_0+\|k\|)/(2b)} E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi), \tag{53}$$

$$\left|\Delta_x^{x'}\partial_x^k Z_4(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(p_0(x,x'))^{\gamma_4}(B(t,\tau))^{-(M_0+\|k\|+\gamma_4)/(2b)}\times$$

$$\times\left(E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi) + E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x'-\xi)\right),$$

$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \|k\|\le 2b, \tag{54}$$

*де*

$$E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi) := E_c^{(4)}(t,\tau,x-\xi)E^d(t,\tau),\quad E^d(t,\tau) := \exp\{A(t,\tau)\,d\},$$

$C>0$, $c>0$, $d\in\mathbb{R}$ *– деякі сталі;* $M_0 := \sum_{j=1}^{n} m_j$; $\gamma_4$ *– стала з умови* (14). *Якщо додатково виконується умова* (16), *то для* $Z_4$ *правильними є оцінки*

$$\left|\Delta_t^{t'}\partial_x^k Z_4(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(A(t',t))^{1-(\|k\|-\gamma_4)/(2b)}(B(t,\tau))^{1-(M_0+\gamma_4)/(2b)} \times$$

$$\times\left(E_{c,d}^{(4)}(t',\tau,x-\xi)+E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi)\right),\quad 0<\tau<t<t'\le T\,,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad 0<\|k\|\le 2b. \tag{55}$$

Наслідком оцінок (53)–(55) є оцінки

$$\left|\Delta_{t,x}^{t',x'}\partial_x^k Z_4(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(p(t,x;t',x'))^{\gamma_4}(B(t,\tau))^{-(M_0+\|k\|+\gamma_4)/(2b)} \times$$

$$\times\left(E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi)+E_{c,d}^{(4)}(t',\tau,x'-\xi)\right),\quad 0<\tau<t<t'\le T\,,$$

$$\{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad 0<\|k\|\le 2b\,, \tag{56}$$

а також оцінки

$$\left|\partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_4(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\right| \le C(B(t,\tau))^{-(\|k\|-\gamma_4)/(2b)}E^d(t,\tau)\,,$$

$$\left|\Delta_{t,x}^{t',x'}\partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_4(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\right| \le C(p(t,x;t',x'))^{\gamma_4}(B(t,\tau))^{-\|k\|/(2b)}E^d(\tilde t,\tau)\,,$$

$$0<\tau<t<t'\le T,\ \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 0<\|k\|\le 2b,\quad \tilde t := \begin{cases} t, & d\le 0,\\ t' & d>0.\end{cases} \tag{57}$$

Якщо для коефіцієнтів рівняння (9), крім указаних вище умов, виконуються ще умови $(\boldsymbol{A}_{43})$ і $(\boldsymbol{A}_{44})$, то ФРЗК $Z_4$ має властивість *нормальності*, для нього є правильною формула згортки та існують похідні від ФРЗК $Z_4$ $\partial_t^{k_0}\partial_x^k\partial_\tau^{s_0}\partial_\xi^s Z_4(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $2bk_0+\|k\|\le 2b$, $2bs_0+\|s\|\le$ $\le 2b$, для яких справджуються оцінки

$$\left|(\alpha(t)\partial_t)^{k_0}\partial_x^k(\alpha(\tau)\partial_\tau)^{s_0}\partial_\xi^s Z_4(t,x;\tau,\xi)\right| \le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-(M_0+\|k\|+\|s\|)/(2b)-k_0-s_0}E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi). \tag{58}$$

**4. Властивості об'ємних потенціалів.** Наведемо властивості інтегралів типу

$$u_\ell(t,x) := \int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_\ell(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\quad \ell\in\mathbb{N}_2\,, \tag{59}$$

і

$$u_\ell(t,x) := \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_\ell(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi,\ (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ \ell\in\mathbb{N}_4\backslash\mathbb{N}_2\,. \tag{60}$$

Ядро $K_\ell$ є комплекснозначною функцією, яка має властивості похідних від ФРЗК $Z_{\ell 0}$, $\ell\in\mathbb{N}_3$, чи ФРЗК $Z_4$ для рівняння (9). Властивості інтегралів (59) і (60) описуються належністю функцій $u_\ell$ до відповідних функціональних просторів залежно від того, до яких просторів належить функція $f$, а також додаткових припущень стосовно функцій, що спричиняють виродження на початковій гіперплощині. Опишемо властивості ядер $K_\ell$, $\ell\in\mathbb{N}_4$. Для цього позначимо

$$d(x;x') := \sum_{j=1}^3\left|x_j-x_j'\right|^{1/(2b(j-1)+1)},\qquad \tilde d(x;x') := \sum_{j=1}^3\left|x_j-x_j'\right|^{1/(2j-1)}\,,$$

$$d_1(x;x';\lambda) := |x_1 - x_1'|^\lambda + \sum_{j=2}^{3} |x_j - x_j'|^{(\lambda+1)/(2b(j-1)+1)},$$

$$\tilde{d}_1(x;x';\lambda) := |x_1 - x_1'|^\lambda + \sum_{j=2}^{3} |x_j - x_j'|^{(\lambda+1)/(2j-1)},$$

$$d_2(x;x';\lambda) := |x_1 - x_1'|^\lambda + |x_2 - x_2'|^{(\lambda+1)/(2b+1)} + |x_3 - x_3'|^{(\lambda+2b+1)/(4b+1)},$$

$$\tilde{d}_2(x;x';\lambda) := |x_1 - x_1'|^\lambda + |x_2 - x_2'|^{(\lambda+1)/3} + |x_3 - x_3'|^{(\lambda+3)/5},$$

якщо $t \in (0,T]$, $\{x, x', \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0,1]$. Зауважимо, що якщо $d(x;x') < 1$ і $\tilde{d}(x;x') < 1$, то

$$d_2(x;x';\lambda) \le d_1(x;x';\lambda) \le 4^{1-\lambda} d(x;x')^\lambda, \quad \{x, x'\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in (0,1],$$

і

$$\tilde{d}_2(x;x';\lambda) \le \tilde{d}_1(x;x';\lambda) \le 4^{1-\lambda} \tilde{d}(x;x')^\lambda, \quad \{x, x'\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in (0,1].$$

За ядра в інтегралах (59) і (60) братимемо функції $K_\ell$, які можна подати у вигляді

$$K_\ell(t,x;\tau,\xi) := (t-\tau)^{-\nu-M} \Omega_\ell(t,x;\tau,\xi), \qquad \ell \in \mathbb{N}_2, \tag{61}$$

$$K_3(t,x;\tau,\xi) := (B(t,\tau))^{-\nu-M} \Omega_3(t,x;\tau,\xi), \tag{62}$$

$$K_4(t,x;\tau,\xi) := (B(t,\tau))^{-\nu-M_0/(2b)} \Omega_4(t,\tau,z), \tag{63}$$

де $0 \le \tau < t \le T$ і $0 < \tau < t \le T$, якщо $B(t,0) = \infty$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $z := (z_1, \ldots, z_n)$, $z_j := (B(t,\tau))^{-1/(2b_j)}(x_j - \xi_j)$, $j \in \mathbb{N}_n$, $\nu \in (\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3})(0, \tilde{m}_2] \cup \delta_{\ell 2}(0, 2 + 1/(2b)] \cup \cup \delta_{\ell 4}(0,1]$, $M$, $M_0$ і $\delta_{\ell j}$ – такі, як вище. Функція $\Omega_\ell$ зі значеннями в $\mathbb{C}$ для $\ell \in \mathbb{N}_3$ і відповідно в $\mathbb{C}_{NN}$ для $\ell = 4$ є неперервною і задовольняє такі умови:

**($B_{\ell 1}$)** $\forall \{t, \tau\} \subset (0,T], \quad \tau < t, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_3$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Omega_\ell(t,x;\tau,\xi)\, d\xi = 0, \qquad \nu \in (\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3})(1/2, 1] \cup \delta_{\ell 2}(1 - 1/(2b), 1],$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Omega_\ell(t,x;\tau,\xi)\, d\xi_2\, d\xi_3 = 0, \quad \nu \in (\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3})(1, \tilde{m}_2] \cup \delta_{\ell 2}(1, 1 + 1/(2b)],$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n_3}} \Omega_\ell(t,x;\tau,\xi)\, d\xi_3 = 0, \ \nu \in (\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3})(\tilde{m}_2, \tilde{m}_3] \cup \delta_{\ell 2}(1 + 1/(2b), 2 + 1/(2b)];$$

**($B_{41}$)** $\forall \{t, \tau\} \subset (0,T], \quad \tau < t$ : $\quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Omega_4(t,\tau,x)\, dx = 0$;

**($B_{\ell 2}$)** $\exists C > 0 \quad \forall \{t, \tau\} \subset (0,T], \quad \tau < t, \quad \forall \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_4$ :

$$|\Omega_\ell(t,x;\tau,\xi)| \le C[(\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 2}) + (\delta_{\ell 3} + \delta_{\ell 4}) E^d(t,\tau)] \tilde{E}_c^{(\ell)}(t,\tau,x,\xi),$$

$$\Omega_4(t,x;\tau,\xi) := \Omega_4(t,\tau,x-\xi);$$

**($B_{\ell 3}$)** $\exists C > 0 \quad \forall \{t, \tau\} \subset (0,T], \quad \tau < t, \quad \forall \{x, x', \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_4$ :

$$\left|\Delta_x^{x'} \Omega_\ell(t,x;\tau,\xi)\right| \le C\,[(d(x;x'))^\gamma (t-\tau)^{-\gamma/(2b)} \delta_{\ell 2} +$$

$$+ (\tilde{d}(x;x'))^{\gamma}(t-\tau)^{-\gamma/2}\delta_{\ell 1} + (\tilde{d}(x;x'))^{\gamma}(B(t,\tau))^{-\gamma/2}\delta_{\ell 3} +$$

$$+ (p_0(x;x'))^{\gamma}\delta_{\ell 4}][\tilde{E}_c^{(\ell)}(t,\tau,x,\xi) + \tilde{E}_c^{(\ell)}(t,\tau,x',\xi)];$$

$(\boldsymbol{B}_{44})$ $\quad \exists C>0 \quad \forall \{t,t',\tau\} \subset (0,T], \quad \tau<t<t', \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\left|\Delta_t^{t'}\Omega_4(t,\tau,x)\right| \le C(A(t',t))^{\gamma/(2b)}(B(t,\tau))^{-\gamma/(2b)}E^d(\tilde{t},\tau)\tilde{E}_c^{(4)}(t,\tau,x,\xi),$$

$(\boldsymbol{B}_{45})$ $\quad \exists \gamma_0 \in (0,\gamma), \quad \exists C>0 \quad \forall t \in (0,T]: \ \displaystyle\int_0^t (\Delta(t,\tau))^{-1+\gamma_0/(2b)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \le C$.

В умовах $(\boldsymbol{B}_{\ell 2})-(\boldsymbol{B}_{\ell 4})$ позначено

$$\tilde{E}_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi) := E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi), \quad \tilde{E}_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi) := E_c^2(B(t,\tau),x,\xi),$$

$$\tilde{E}_c^{(4)}(t,\tau,x,\xi) := \exp\left(-c\sum_{j=1}^n |x_j|^{q_j}\right), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$\tilde{t}$ – число таке, як у теоремі 2. В умові $(\boldsymbol{B}_{45})$ $\Delta(t,\tau) := \displaystyle\int_\tau^t \frac{\delta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta$, де $\delta : [0,T] \to$ $\to [0,\infty)$ –функція така, що $\Delta(T,0) < \infty$.

В означення функцій $K_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_4$, входять числа $\nu$, $d$, $c$ і $\gamma$, які вважаються заданими. Через $N_\ell(\nu,d,c,\gamma)$ позначимо сукупність усіх функцій $K_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, визначених формулою (61) чи (62), в якій функція $\Omega_\ell$ задовольняє умови $(\boldsymbol{B}_{\ell 1})-(\boldsymbol{B}_{\ell 3})$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, при заданих $\nu$, $d$, $c$ і $\gamma$. Відповідно $M_\ell(\nu,d,c,\gamma)$ – сукупність усіх функцій $K_4$, визначених формулою (63), в якій функція $\Omega_4$ задовольняє умови $(\boldsymbol{B}_{41}),\dots,(\boldsymbol{B}_{4(5-\ell)})$, $\ell \in \{0,1,2\}$, при заданих $\nu$, $d$, $c$, $\gamma$. Зауважимо, що для $\nu \in (\delta_{\ell 1}+\delta_{\ell 2})[1,\tilde{m}_2] \cup \delta_{\ell 3}[1,2b+1/(2b)] \cup$ $\cup\, \delta_{\ell 4}\{1\}$ інтеграли (59) і (60) із функціями $K_\ell \in N_\ell(\nu,d,c,\gamma)$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, і $K_4 \in M_\ell(\nu,d,c,\gamma)$, $\ell \in \{0,1,2\}$, розуміються як границі

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} K_\ell(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi, \qquad \ell \in \mathbb{N}_2,$$

і

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{t-h} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} K_\ell(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi, \qquad \ell \in \mathbb{N}_4 \backslash \mathbb{N}_2,$$

які для підходящих $f$ існують на підставі умов $(\boldsymbol{B}_{\ell 1})$, $\ell \in \mathbb{N}_4$, або $(\boldsymbol{B}_{45})$.

Означимо простори, до яких функції $f$ і $u$ належатимуть. Це простори функцій, які є неперервними або задовольняють умову Гельдера і мають певні обмеження при $|x| \to \infty$. Їх поведінка при $|x| \to \infty$ описуватиметься функціями

$$\varphi_\ell(t,x) := \exp\sum_{j=1}^3 k_{\ell j}(t,a_{1j})|x_j|^2$$

або

$$\psi_\ell(t,x) := \exp\sum_{j=1}^3 s_{\ell j}(t)|x_j|^2, \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \ell \in \mathbb{N}_3.$$

Тут для фіксованого числа $c_0$ з інтервалу $(0,c)$, де $c$ – стала з умов $(\boldsymbol{B}_{\ell 2})$ і $(\boldsymbol{B}_{\ell 3})$, $a_\ell := (a_{\ell 1}, a_{\ell 2}, a_{\ell 3})$, $a_{\ell j}$, $\{\ell, j\} \subset \mathbb{N}_3$, – такі невід'ємні числа, що $T < \min\limits_{j \in \mathbb{N}_3} (c_0/a_{1j})$, якщо $\ell \in \{1,3\}$, і $T < \min\limits_{j \in \mathbb{N}_3} (c_0/a_{1j})^{(2b-1)/(2b(\ell-1)+1)}$, якщо $\ell = 2$. Крім того,

$$k_{1j}(t, a_{1j}) := c_0 a_{1j} (c_0 - a_{1j} t^{2j-1})^{-1}, \quad j \in \mathbb{N}_3,$$

$$k_{2j}(t, a_{2j}) := c_0 a_{2j} (c_0^{2b-1} - a_{2j}^{2b-1} t^{2b(j-1)+1})^{1-q}, \quad j \in \mathbb{N}_3,$$

$$k_{3j}(t, a_{3j}) := c_0 a_{3j} \big(c_0 - a_{3j} (T - B(T,t))^{(2j-1)}\big)^{-1}, \quad j \in \mathbb{N}_3,$$

$$s_{11}(t) := k_{11}(t, a_{11}) + 2t^2 k_{12}(t, a_{12}) + t^4 k_{13}(t, a_{13}),$$

$$s_{12}(t) := 2k_{12}(t, a_{12}) + 4t^2 k_{13}(t, a_{13}), \quad s_{13}(t) := 4k_{13}(t, a_{13}),$$

$$s_{21}(t) := k_{21}(t, a_{21}) + 2^{q-1} t^q k_{22}(t, a_{22}) + 2^{q-2} t^{2q} k_{23}(t, a_{23}),$$

$$s_{22}(t) := 2^{q-1} k_{22}(t, a_{22}) + 4^{q-1} t^q k_{23}(t, a_{23}),$$

$$s_{23}(t) := 4^{q-1} k_{23}(t, a_{23}), \quad t \in [0,T],$$

$$s_{31}(t) := k_{31}(t, a_{31}) + 2t^2 k_{32}(t, a_{32}) + t^4 k_{33}(t, a_{33}),$$

$$s_{32}(t) := 2k_{32}(t, a_{32}) + 4t^2 k_{33}(t, a_{33}), \quad s_{33}(t) := 4k_{33}(t, a_{33}), \quad t \in [0,T].$$

Для заданих чисел $\lambda \in (0,1]$ і $\ell \in \mathbb{N}_3$ позначимо через $C^0_{\varphi_\ell}$, $C^\lambda_{\varphi_\ell}$, $C^\lambda_{1,\varphi_\ell}$ і $C^\lambda_{2,\varphi_\ell}$ простори неперервних функцій $u : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, для яких є скінченними відповідні норми $\|u\|^0_{\varphi_\ell}$, $\|u\|^\lambda_{\varphi_\ell} := \|u\|^0_{\varphi_\ell} + [u]^\lambda_{\varphi_\ell}$, $\|u\|^\lambda_{1,\varphi_\ell} := \|u\|^0_{\varphi_\ell} + [u]^\lambda_{1,\varphi_\ell}$ та $\|u\|^\lambda_{2,\varphi_\ell} := \|u\|^0_{\varphi_\ell} + [u]^\lambda_{2,\varphi_\ell}$, де

$$\|u\|^0_{\varphi_\ell} := \sup_{(t,x) \in \Pi_{[0,T]}} \frac{|u(t,x)|}{\varphi_\ell(t,x)},$$

$$[u]^\lambda_{\varphi_\ell} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{[0,T]} \\ (t,x) \neq (t,x')}} \frac{\big|\Delta_x^{x'} u(t,x)\big|}{\big(\tilde{\tilde{d}}(x;x')\big)^\lambda (\varphi_\ell(t,x) + \varphi_\ell(t,x'))},$$

$$[u]^\lambda_{1,\varphi_\ell} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{[0,T]} \\ (t,x) \neq (t,x')}} \frac{\big|\Delta_x^{x'} u(t,x)\big|}{\tilde{\tilde{d}}_1(x;x';\lambda)(\varphi_\ell(t,x) + \varphi_\ell(t,x'))}$$

$$[u]^\lambda_{2,\varphi_\ell} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{[0,T]} \\ (t,x) \neq (t,x')}} \frac{\big|\Delta_x^{x'} u(t,x)\big|}{\tilde{\tilde{d}}_2(x;x';\lambda)(\varphi_\ell(t,x) + \varphi_\ell(t,x'))}.$$

Тут

$$\tilde{\tilde{d}}(x;x') := d(x;x')\delta_{\ell 2} + \tilde{d}(x;x')(\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3}),$$

$$\tilde{\tilde{d}}_1(x;x';\lambda) := d_1(x;x';\lambda)\delta_{\ell 2} + \tilde{d}_1(x;x';\lambda)(\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3}),$$

$$\tilde{\tilde{d}}_2(x;x';\lambda) := d_2(x;x';\lambda)\delta_{\ell 2} + \tilde{d}_2(x;x';\lambda)(\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3}).$$

Крім цих просторів, використовуватимемо простір $C^{\lambda}_{\psi_\ell}$. Означення цього простору отримується, якщо в означенні простору $C^{\lambda}_{\varphi_\ell}$ функцію $\varphi_\ell$ замінити функцією $\psi_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_3$. Властивості інтегралів (59), (60) для $\ell \in \mathbb{N}_3$ наведено в наступній лемі.

**Лема 5.** *Нехай* $K_\ell \in N_\ell(\nu, d, c, \gamma)$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, *і функція* $u_\ell$ *визначена відповідно формулою* (59) *або* (60). *Тоді правильними є такі твердження:*

(***i***) *якщо* $f \in C^0_{\varphi_\ell}$, *то* $u \in C^{\gamma}_{\psi_\ell}$ *і*

$$\|u_\ell\|^{\gamma}_{\psi_\ell} \le C_\ell \|f\|^0_{\varphi_\ell}; \tag{64}$$

(***ii***) *якщо* $\nu \in (1-1/(2b), 1]\delta_{\ell 2} + (1/2, 1](\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3})$ *і* $f \in C^{\lambda}_{\varphi\ell}$, $\lambda \in (0,1]$, *тоді при* $(\nu + (\gamma - \lambda)/(2b))\delta_{\ell 2} + (\nu + (\gamma - \lambda)/2)(\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3}) < 1$ *маємо* $u \in C^{\gamma}_{\psi_\ell}$ *і*

$$\|u_\ell\|^{\gamma}_{\psi_\ell} \le C_\ell \|f\|^{\lambda}_{\varphi_\ell}, \tag{65}$$

*а при* $(\nu + (\gamma - \lambda)/(2b))\delta_{\ell 2} + (\nu + (\gamma - \lambda)/2)(\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3}) > 1$ *маємо* $u_\ell \in C^{\lambda}_{\psi_\ell}$ *і*

$$\|u_\ell\|^{\gamma}_{\psi_\ell} \le C_\ell \|f\|^0_{\varphi_\ell}; \tag{66}$$

(***iii***) *якщо* $\nu \in (1, 1+1/(2b)]\delta_{\ell 2} + (1, \tilde{m}_2](\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3})$ *і* $f \in C^{\lambda}_{1,\varphi_\ell}$, $\lambda \in (0,1]$, *то при* $(\nu + (\gamma - \lambda)/(2b))\delta_{\ell 2} + (\nu + (\gamma - \lambda)/2)(\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3}) < 1$ *маємо* $u_\ell \in C^{\gamma}_{\psi_\ell}$ *і*

$$\|u_\ell\|^{\gamma}_{\psi_\ell} \le C \|f\|^{\lambda}_{1,\varphi_\ell}, \tag{67}$$

*а при* $(\nu + (\gamma - \lambda)/(2b))\delta_{\ell 2} + (\nu + (\gamma - \lambda)/2)(\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3}) > 1$ *маємо* $u_\ell \in C^{\lambda}_{\psi_\ell}$ *і*

$$\|u_\ell\|^{\lambda}_{\psi_\ell} \le C \|f\|^{\lambda}_{1,\varphi_\ell}; \tag{68}$$

(***iv***) *якщо* $\nu \in (1+1/(2b), 2+1/(2b)]\delta_{\ell 2} + (\tilde{m}_2, \tilde{m}_3](\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3})$ *і* $f \in C^{\lambda}_{2,\varphi_\ell}$, $\lambda \in$ $\in (0,1]$, *тоді при* $(\nu - 1 + (\gamma - 1 - \lambda)/(2b))\delta_{\ell 2} + (\nu - 1 + (\gamma - 1 - \lambda)/2) \times$ $\times (\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3}) < 1$ *маємо* $u_\ell \in C^{\gamma}_{\psi_\ell}$ *і*

$$\|u_\ell\|^{\gamma}_{\psi_\ell} \le C \|f\|^{\lambda}_{2,\varphi_\ell}, \tag{69}$$

*а при* $(\nu - 1 + (\gamma - 1 - \lambda)/(2b))\delta_{\ell 2} + (\nu - 1 + (\gamma - 1 - \lambda)/2)(\delta_{\ell 1} + \delta_{\ell 3}) > 1$ *маємо* $u_\ell \in C^{\lambda}_{\psi_\ell}$ *і*

$$\|u_\ell\|^{\gamma}_{\psi_\ell} \le C_\ell \|f\|^{\lambda}_{2,\varphi_\ell}. \tag{70}$$

Сталі $C_\ell$ в нерівностях (64)–(70) залежать тільки від сталої $C$ з умов $(\boldsymbol{B}_{\ell 2})$ і $(\boldsymbol{B}_{\ell 3})$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, а також від чисел $n_1$, $n_2$, $n_3$, $b$, $\nu$, $c$, $\gamma$ і $\lambda$.

**5. Результати для лінійних рівнянь**. Отримані вище результати дозволяють побудувати класичні ФРЗК і отримати точні оцінки їх похідних. Сформулюємо основні результати для рівнянь з класів $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ і $\mathcal{K}_3$ у вигляді теореми.

**Теорема 3.** *Нехай для коефіцієнтів* $\mathcal{A}_\ell$ *виконуються умови* $(\boldsymbol{A}_{\ell 1})$, $(\boldsymbol{A}_{\ell 2})$ *і* $(\boldsymbol{A}_{\ell 5})$. *Тоді для рівняння з класу* $\mathcal{K}_\ell$, *існує класичний ФРЗК* $Z_{\ell 3}$ *і справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z_{\ell 3}(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(T_\ell(t,\tau))^{-M-M_k}\,\tilde{E}_c^{(\ell)}(t-\tau,x,\xi)\,,$$

$$\{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n,\ \tilde{m}_1|k_1|+|k_2|+|k_3|\le 1\}\,, \tag{71}$$

$$|SZ_{\ell 3}(t,x;\tau,\xi| \le C(T_\ell(t,\tau))^{-M-1}\,\tilde{E}_c^{(\ell)}(t-\tau,x,\xi)\,, \tag{72}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_\ell}^{k_\ell} Z_{\ell 3}(t,x;\tau,\xi)\right| \le C\,|x_s-z_s|^{(\tilde{m}_s)^{-1}(\tilde{m}_\ell\gamma_\ell-\tilde{m}_{\ell-1})}\times$$

$$\times(T_\ell(t,\tau))^{-M-M_k-\tilde{m}_s\gamma_s}\left(\tilde{E}_c^{(\ell)}(t,\tau,x,\xi)+\tilde{E}_c^{(\ell)}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\right),$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad z^{(s)}\in\mathbb{R}^{n_s},\quad \{s,\ell\}\subset\mathbb{N}_3\,. \tag{73}$$

Наведемо застосування результатів з побудови класичних ФРЗК для рівнянь з класів $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ і $\mathcal{K}_3$. Для цього означимо простори, які будемо використовувати надалі. Нехай $p\in[1,\infty]$ і $u(t,x)$, $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$, − задана комплекснозначна функція, вимірна при будь-якому $t\in[0,T]$. Для кожного $t\in[0,T]$ означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k_\ell(t)} := \left\|\frac{u(t,x)}{\varphi_\ell(t,X(t))}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{s_\ell(t)} := \left\|\frac{u(t,x)}{\psi_\ell(t,x)}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},\qquad \ell\in\mathbb{N}_3\,,$$

де функції $\varphi_\ell$, $\psi_\ell$, $k_\ell$ і $s_\ell$, $\ell\in\mathbb{N}_3$, − такі, як означені вище. За допомогою цих норм означимо простори.

$L_p^{k_\ell(t)}$, $t\in[0,T]$, $p\in[1,\infty]$, − простори вимірних функцій $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, для яких є скінченними норми $\|\varphi\|_p^{k_\ell(t)}$, і $L_p^{a_\ell} := L_p^{k_\ell(0)}$, $\ell\in\mathbb{N}_3$;

$M^{a_\ell}$ − простір зліченно-адитивних функцій $\mu:\mathcal{B}\to\mathbb{C}$ (узагальнених борелевих мір в $\mathbb{R}^n$), які задовольняють умови

$$\|\mu\|^{a_\ell} := \int\limits_{\mathbb{R}^n}(\varphi_\ell(0,x))^{-1}\,d|\mu|(x)<\infty,\qquad \ell\in\mathbb{N}_3\,,$$

де $\mathcal{B}$ − $\sigma$-алгебра борелевих множин простору $\mathbb{R}^n$, а $|\mu|$ − повна варіація $\mu$;

$L_1^{-s_\ell(T)}$ − простір вимірних функцій $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$$\|\psi\|_1^{-s_\ell(T)} := \left\|\frac{\psi(x)}{\psi_\ell(T,x)}\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)},\qquad \ell\in\mathbb{N}_3\,;$$

$C_0^{-s_\ell(T)}$ − простір неперервних функцій $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ таких, що при $|x|\to\infty$ маємо $|\psi(x)|\,\psi_\ell(T,x)\to 0$. Норму в $C_0^{-s_\ell(T)}$ означимо як

$$\|\psi\|_\infty^{-s_\ell(T)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(|\psi(x)|\,\psi_\ell(T,x)\right),\qquad \ell\in\mathbb{N}_3\,.$$

Спочатку наведемо додаткові властивості ФРЗК.

**Теорема 4.** *Нехай для коефіцієнтів* $\mathcal{A}_\ell$ *рівняння з класу* $\mathcal{K}_\ell$ *виконуються відповідні умови* $\boldsymbol{(A_{\ell 1})-(A_{\ell 4})}$, $\ell\in\mathbb{N}_3$. *Тоді правильними є такі твердження*:

($i$) *існує класичний ФРЗК* $Z_\ell^*$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, *для відповідного спряженого рівняння, який зв'язаний із ФРЗК* $Z_\ell$ *рівністю*

$$Z_\ell^*(\tau,\xi;t,x) = \overline{Z_\ell(t,x;\tau,\xi)},\quad 0 \le \tau < t \le T,\quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\quad \ell \in \mathbb{N}_3. \qquad (74)$$

*Класичний ФРЗК* $Z_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, *для якого справджується рівність* (74), *називають нормальним*;

($ii$) *класичний ФРЗК* $Z_\ell$ *є розв'язком функціонального рівняння*

$$Z_\ell(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_\ell(t,x;\beta,\lambda) Z_\ell(\beta,\lambda;\tau,\xi)\,d\lambda,$$

$$0 \le \tau < \beta < t \le T,\qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\qquad \ell \in \mathbb{N}_3; \qquad (75)$$

($iii$) *існує лише один нормальний класичний ФРЗК* $Z_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, (75) *для якого справджуються оцінки* (71), (72) *і* (73).

**Теорема 5.** *Нехай для коефіцієнтів* $\mathcal{A}_\ell$ *рівняння з класу* $\mathcal{K}_\ell$ *виконуються відповідні умови* $(\boldsymbol{A}_{\ell 1})-(\boldsymbol{A}_{\ell 4})$, $\ell \in \mathbb{N}_3$. *Тоді правильними є такі твердження:*

($i$) *для будь-яких функцій* $\varphi \in L_p^{a_\ell}$ *та узагальненої міри* $\mu \in M^{a_\ell}$ *формулами*

$$u_{\ell 1}(t,x) := (P_\ell \varphi)(t,x),\qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},\qquad \ell \in \mathbb{N}_3, \qquad (76)$$

$$u_{\ell 0}(t,x) := (P_\ell \mu)(t,x),\qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},\qquad \ell \in \mathbb{N}_3, \qquad (77)$$

*визначаються єдині в шарі* $\Pi_{(0,T]}$ *класичні розв'язки відповідних однорідних рівнянь*;

($ii$) *існує стала* $C_\ell > 0$, *яка не залежить від* $\varphi \in L_p^{a_\ell}$ *та* $\mu \in M^{a_\ell}$, *така, що для довільного* $t \in (0,T]$ *справджуються оцінки*

$$\|u_{\ell 1}(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C_\ell \|\varphi\|_p^{a_\ell},\qquad \ell \in \mathbb{N}_3,$$

$$\|u_{\ell 0}(t,\cdot)\|_1^{k_\ell(t)} \le C_\ell \|\mu\|^{a},\qquad \ell \in \mathbb{N}_3;$$

($iii$) *при* $p \in [1,\infty)$ *виконується рівність*

$$\lim_{t\to\infty} \|u_{\ell 1}(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{s_\ell(t)} = 0,$$

*а при* $p = \infty$ − *граничні співвідношення*

$$u_{\ell 1}(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \varphi \qquad i \qquad u_{\ell 0}(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \mu$$

*у слабкому сенсі, тобто для будь-яких функцій* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *відповідно з просторів* $L_1^{-s_\ell(T)}$ *і* $C_0^{-s_\ell(T)}$ *виконуються співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) u_{\ell 1}(t,x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)\,dx$$

*і*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) u_{\ell 1}(t,x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,d\mu(x),\qquad \ell \in \mathbb{N}_3.$$

Наступна теорема є в певному сенсі оберненою до теореми 5.

**Теорема 6.** *Нехай виконуються умови теореми* 5 *і* $u_\ell$ *− класичний розв'язок в* $\Pi_{(0,T]}$ *однорідного рівняння з відповідного класу* $\mathcal{K}_\ell$, *який задовольняє умову*

$$\|u_\ell(t,\cdot)\|_p^{k_\ell(t)} \le C_\ell, \qquad t \in (0,T], \qquad \ell \in \mathbb{N}_3, \tag{78}$$

*з деякими сталою* $C_\ell > 0$ *і* $p \in [1,\infty]$. *Тоді при* $p \in (1,\infty]$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{a_\ell}$, *а при* $p = 1$ *− єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{a_\ell}$, *такі, що розв'язок* $u_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, *зображується відповідно у вигляді* (76) *і* (77).

Теореми 5 і 6 є реалізацією відомого підходу Ейдельмана − Івасишена [8, 15, 40] до вироджених параболічних рівнянь з класів $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ і $\mathcal{K}_3$. Твердження, аналогічні теоремам 5 і 6, встановлено і для неоднорідних рівнянь з перелічених класів. Нехай $U_{\ell p}$, $p \in [1,\infty]$, − класи усіх класичних розв'язків рівнянь з класів $\mathcal{K}_\ell$, які при кожному $t \in (0,T]$ належать до відповідних просторів $L_p^{k_\ell(t)}$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, як функції $x$ і для яких виконується умова (78). З теорем 5 і 6 випливають такі важливі наслідки.

**Наслідок 1**. *Множинами початкових значень розв'язків із класів* $U_{\ell p}$, $p \in (1,\infty]$, *та* $U_1$ *є відповідно простори* $L_p^{a_\ell}$ *та* $M^{a_\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, *і тільки вони.*

**Наслідок 2**. *Класи* $U_{\ell p}$, $p \in (1,\infty]$, *і* $U_{\ell 1}$ *є множинами значень операторів Пуассона, визначених формулами* (76) *і* (77) *на просторах відповідно* $L_p^{a_\ell}$ *і* $M^{a_\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}_3$, *причому ці оператори є ізоморфізмами.*

Аналогічні твердження отримано і для рівнянь з класу $\mathcal{K}_4$.

**6. Результати для нелінійних рівнянь.** Перейдемо до викладу результатів дослідження нелінійних рівнянь. Використовуватимемо ще такі позначення: $D_x^p u := \{\partial_x^k u_j \mid |k| \le p,\, j \in \mathbb{N}_0\}$, якщо $u \in \mathbb{C}_N$, де $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 := \{1,\ldots,N\}$; $L_p$ − кількість елементів множини $D_x^p u$; $\mathbb{N}_1^p := \{1,\ldots,L_p\}$; $G_p(\mathbb{R}) := \{y \in \mathbb{R}^{L_p} \mid |y_j| \le R_j,\, j \in \mathbb{N}_1\}$, де $R_j$, $j \in \mathbb{N}_1$, − додатні сталі, $\mathbf{R} := (R_1,\ldots,R_{L_p})$ і $\mathbf{R}_0 := (R_1,\ldots,R_{L_p})$, якщо $R_1 = \ldots = R_{L_p} = R_0$, де $R_0 > 0$ − деяка стала ; $Q_H^p(\mathbf{R}) := \{(t,x,y) \mid (t,x) \in \Pi_H,\, y \in G_p(\mathbf{R})\}$, $\Pi_H := H \times \mathbb{R}^n$.

Означимо простори функцій. Розглянемо простори функцій, які є неперервними або задовольняють умову Гельдера та мають певні обмеження при $t \to 0$. Їх поведінка при $t \to 0$ описується функцією

$$(\delta(t))^\mu (\Delta(t,0))^r E^{-d}(T,t), \qquad t \in (0,T],$$

де $\mu = \{0,1\}$, $r \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$, $\delta$ − неперервна монотонно неспадна на $[0,T]$ функція така, що $0 < \delta(t) \le \beta(t)$ для $t \in (0,T]$ та збігається інтеграл $\Delta(T,0) := \int_0^T \frac{\delta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta$. Для заданих чисел $\lambda \in (0,1]$, $\mu = \{0,1\}$ і $r \in \mathbb{R}$ позначимо через $C_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)}$, $C_{\mu,r}^{\lambda,0}$ і $C_{\mu,r}^{0,0}$ простори неперервних функцій $u : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$, для яких скінченними є відповідно норми

$$\|u\|_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)} := \|u\|_{\mu,r}^{0,0} + [u]_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)},$$

$$\|u\|^{\lambda,0}_{\mu,r} := \|u\|^{0,0}_{\mu,r} + [u]^{\lambda,0}_{\mu,r} \qquad \text{і} \qquad \|u\|^{0,0}_{\mu,r},$$

де

$$\|u\|^{0,0}_{\mu,r} := \sup_{(t,x)\in\Pi_{(0,T]}} \left( \frac{|u(t,x)|E^d(T,t)}{(\delta(t))^{\mu}(\Delta(t,0))^r} \right),$$

$$[u]^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r} := \sup_{\substack{\{t,x),(t',x')\}\subset\Pi_{(0,T]}\\ (t,x)\neq(t',x')}} \left( \frac{\left|\Delta^{t',x'}_{t,x} u(t,x)\right|}{(\Delta(\overline{t},0))^{r-\lambda/(2b)}} \delta(t)^{-\mu} p^{-\lambda} E^d(T,\tilde{t}) \right)$$

$$[u]^{\lambda,0}_{\mu,r} :=$$

$$:= \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{(0,T]}\\ x\neq x'}} \left( \left|\Delta^{x'}_{x} u(t,x)\right| (\delta(t))^{-\mu} (\Delta(t,0))^{-r+\lambda/(2b)} \left|x-x'\right|^{-\lambda} E^d(T,t) \right).$$

Тут $p := p(t',x';t,x)$, $\overline{t} := t + (t'-t)\eta(r-\lambda/(2b))$ і $\tilde{t} := t + (t'-t)\eta(d)$, а $\eta(\cdot)$ – характеристична функція множини $[0,\infty)$. За допомогою означених просторів уведемо простір $U^{\gamma,\lambda}_r$. Він складається з функцій $u \in C^{0,0}_{0,r+1}$, які мають похідні $\partial^k_x u \in C^{\gamma,\gamma/(2b)}_{0,r+1-\|k\|/(2b)}$, $0 < \|k\| < 2b$, та похідні $\partial^k_x u \in C^{\lambda,\lambda/(2b)}_{0,r}$, $\|k\| = 2b$. Норма в просторі $U^{\gamma,\lambda}_r$ визначається формулою

$$\|u\|_{U^{\gamma,\lambda}_r} := \|u\|^{0,0}_{0,r+1} + \sum_{0<\|k\|<2b} \left\|\partial^k_x u\right\|^{\gamma,\gamma/(2b)}_{0,r+1-\|k\|/(2b)} + \sum_{\|k\|=2b} \left\|\partial^k_x u\right\|^{\lambda,\lambda/(2b)}_{0,r}.$$

Простори $U^{\gamma,\lambda}_r$, в яких функції $u$ визначені в шарі $\Pi_{(0,T_0]}$, $T_0 \le T$, позначатимемо через $U^{\gamma,\lambda}_r(\Pi_{(0,T_0]})$. Розглянемо систему $N$ рівнянь вигляду

$$\left( \alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{\|k\|=2b} a_k(t,x,D^{2b-1}_x u)\partial^k_x \right) u(t,x) = f(t,x,D^{2b-1}_x u),$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{79}$$

з початковою умовою

$$u(t,x)\big|_{t=0} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{80}$$

Нехай функції $f : Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R}_0) \to \mathbb{C}_N$ задовольняють такі умови.

$\boldsymbol{F}_1$°. Функція $f$ неперервна в $Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R}_0)$.

$\boldsymbol{F}_2$°. $\exists C > 0 \quad \forall (t,x,y) \in Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R}_0) : |f(t,x,y)| \le C\sigma(t)$, $\sigma : [0,T] \to [0,\infty)$ – неперервна функція.

$\boldsymbol{F}_3$°. $\exists C > 0 \quad \forall \{(t,x,y),(t,x',y)\} \subset Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R}_0) : \left|\Delta^{x'}_x f(t,x,y)\right| \le C\sigma(t)\left|x-x'\right|^{\lambda}$, $\lambda \in (0,1)$.

$\boldsymbol{F}_4$°. $\exists C > 0 \quad \forall \{(t,x,y),(t,x,y')\} \subset Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R}_0) : \left|\Delta^{y'}_y f(t,x,y)\right| \le C\sigma(t)\left|y-y'\right|$.

Клас функцій, які задовольняють серію умов $\boldsymbol{F}_1$°– $\boldsymbol{F}_4$° з певними $\lambda$ і $\sigma$, позначимо через $F^{\lambda}_{\sigma}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R}_0))$. Через $F^{p,\lambda}_{\sigma}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R}_0))$ позначимо клас функцій $f$, які разом зі своїми похідними за просторовою змінною до порядку $p$ включно належать до класу $F^{\lambda}_{\sigma}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R}_0))$.

**Теорема 7.** *Нехай для коефіцієнтів системи* (79) *виконуються умови* $(\boldsymbol{A}_{41})$, $(\boldsymbol{A}_{42})$, (16) *і* (17), *функція* $f$ *належить до класу* $F_1^{\gamma}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R}_0))$. *Тоді існує таке число* $T_0 > 0$, *що неоднорідна задача Коші* (79), (80) *має єдиний розв'язок з простору* $U^{\gamma,\gamma-\gamma_0}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Наведемо результати про локальну і глобальну розв'язність задачі Коші для напівлінійного рівняння з класу $\mathcal{K}_1$.

У шарі $\Pi := (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ розглядається задача Коші

$$(L_c u)(t,x) = f(t,u(t,x)), \qquad (t,x)\in\Pi, \tag{94}$$

$$u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n, \tag{95}$$

де $L_c$ − диференціальний вираз з класу $\mathcal{K}_1$, коефіцієнти $\mathcal{A}_1$ якого є дійсними числами, причому матриця, складена зі старших коефіцієнтів, є симетричною і має додатні власні числа. Нехай $\mathcal{F}$ − простір неперервних функцій $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які задовольняють такі умови:

$$\exists C>0 \quad \forall t\in[0,\infty), \quad \forall\{u,u_1,u_2\}\subset\mathbb{R}: \ |f(t,u)|\le C|u|^{1+\beta},$$

$$|f(t,u_1)-f(t,u_2)|\le C|u_1-u_2|\max\{|u_1|^{\beta},|u_2|^{\beta}\},$$

де $\beta$ − додатна стала. Для означення просторів використаємо також функцію

$$V_\mu(t,x) :=$$

$$:= (t+\gamma)^{-M}\exp\left\{-c_0\left(\frac{1}{4(t+\gamma)}|x_1|^2+\frac{3}{(t+\gamma)^3}\left|x_2+\frac{1}{2}(t+\gamma)\tilde{x}_1\right|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{180}{(t+\gamma)^5}\left|x_3+\frac{1}{2}(t+\gamma)x_2'+\frac{1}{12}(t+\gamma)^2x_1'\right|^2\right)-\mu(t+\gamma)\right\},\ t\ge 0,\ x\in\mathbb{R}^n,$$

де $\gamma$ − фіксоване додатне число. Позначимо через $U$ простір неперервних функцій $u:\overline{\Pi}\to\mathbb{R}$, для яких скінченною є норма $\|u\| := \sup\limits_{(t,x)\in\overline{\Pi}}\dfrac{|u(t,x)|}{V_\mu(t,x)}$ які рівномірно щодо $t$ задовольняють локальну умову Гельдера за змінними $x_1$, $x_2$, $x_3$ з відповідними показниками $\lambda_1\in(0,1]$, $\lambda_2\in(1/3,1]$, $\lambda_3\in(3/5,1]$. Через $\Phi$ позначимо множину функцій $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, для яких є скінченною норма $\|\varphi\|_0 := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\dfrac{|\varphi(x)|}{V_\mu(0,x)}$, а $\Phi^+ := \{\varphi\in\Phi \mid \varphi(x)\ge 0,\ x\in\mathbb{R}^n\}$. Основним результатом є така

**Теорема 8.** *Правильними є такі твердження:*

(***i***) *якщо* $\mu>0$, $\beta>0$, $f\in\mathcal{F}$, *то задача Коші* (94), (95) *має єдиний глобальний розв'язок* $u\in U$ *для будь-якої початкової функції* $\varphi\in\Phi$;

(***ii***) *якщо* $\mu=0$, $\beta>1/N$, $f\in\mathcal{F}$, *то задача Коші* (94), (95) *має єдиний глобальний розв'язок* $u\in U$ *для деякої достатньо малої функції* $\varphi\in\Phi$;

(***iii***) *якщо* $\mu\le 0$, $\beta\in(0,1/N]$, $f=u^{1+\beta}$ *і* $\varphi\in\Phi^+$, *то існує число* $T^*\in(0,\infty)$ *таке, що* $u(t,x)\to\infty$ *для кожного* $x\in\mathbb{R}^n$ *при* $t\to T^*-0$, *де* $u$ − *розв'язок задачі Коші* (94), (95).

Також у [28] розглядаються рівняння з дійснозначними коефіцієнтами, що належать до класу $\mathcal{K}_1$. Такі рівняння зустрічаються при дослідженні різних фізичних явищ у так званому дифузійному наближенні. Встановлено існування класичного ФРЗК для таких рівнянь його оцінки та оцінки похідних від ФРЗК. Доведено нормальність і невід'ємність ФРЗК, формулу згортки, а також встановлено формули для коефіцієнтів матриці дифузії та вектора знесення через ФРЗК.

**Висновки.** У статті наведено основні результати, що складають теорію задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь з класів $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$ та $\mathcal{K}_4$. Ці результати ґрунтуються на ФРЗК і застосуванні їх до дослідження коректної розв'язності відповідних задач Коші. Робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у теорії рівнянь з частинними похідними та у математичній фізиці при подальших дослідженнях задачі Коші та крайових задач для вироджених параболічних рівнянь, а також у теорії випадкових процесів при вивченні дифузійних процесів, перехідні ймовірності яких є фундаментальними розв'язками відповідних вироджених параболічних рівнянь.


1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19,** № 3(117). – С. 53–161.

   Те саме: *Agranovich M. S., Vishik M. I.* Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type // Russ. Math. Surv. – 1964. – **19,** No. 3. – P. 53–157. – https://doi.org/10.1070/RM1964v019n03ABEH001149.
2. *Богачев В. И., Крылов Н. В., Рёкнер М., Шапошников С. В.* Уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. – Москва: Изд-во: Ин-т компьют. исслед., 2013. – 579 с.
3. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині // Буков. мат. журн. – 2015. – **3**, № 3-4. – С. 41–51.
4. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з двома групами просторових змінних та виродженням на початковій гіперплощині // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2017. – № 871. – С. 46–64.
5. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2018. – № 898. – С. 13–21.
6. *Возняк О., Івасишен С., Мединський І.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з трьома групами просторових змінних та виродженням на початковій гіперплощині // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2019. – Вип. 88. – С. 107–127.
   – https://dx.doi.org/10.30570/vmm.2019.88.107-127.
7. *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Параболические граничные задачи. – Кишинев: Штиинца, 1992. – 328 с.
8. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $\vec{2b}$-параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 4. – С. 500–506.
9. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Вища школа, 1990. – 200 с.
10. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. – 1962. – **17,** № 3. – С. 3–146.
11. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Властивості інтегралів типу похідних від об'ємних потенціалів для $\vec{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45,** № 4. – С. 76–86.
12. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Задача Коші для $\vec{2b}$-параболічних систем із виродженням на початковій гіперплощині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 3. – С. 15–24.
13. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Локальна розв'язність задачі Коші для квазілінійної $\vec{2b}$-параболічної системи зі слабким виродженням на початковій гіперплощині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 4. – С. 110–114.

14. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині та їх застосування // Нелінійний аналіз: Праці Укр. мат. конгресу-2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. – С. 28–41.
15. *Івасишен С. Д.* Розв'язки параболічних рівнянь із сімейств банахових просторів, залежних від часу // Мат. студії. – 2013. – **40**, № 2. – С. 172–181.
16. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буков. мат. журн. – 2014. – **2,** № 2-3. – С. 94–106.
17. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Диференц. рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. В. А. Михайлець. – 2016. – **13**, № 1. – С. 108–155.
18. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59,** № 2. – С. 28–42.
    Те саме: *Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P.* On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables // J. Math. Sci. – 2018. – **231**, No. 4. – P. 507–526. – https://doi.org/10.1007/s10958-018-3830-0.
19. *Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С.* Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині // Буков. мат. журн. – 2016. – **4,** № 3-4. – С. 57–68.
20. *Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С.* Параболічні рівняння з різними особливостями та // Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць, присвячений 80-річчю Б. Й. Пташника. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. – С. 68–76.
21. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 3. – С. 9–31.
    Те саме: *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables. I // J. Math. Sci. – 2020. – **246**, No. 2. – P. 121–151. – https://doi.org/10.1007/s10958-020-04726-z.
22. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. II // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 4. – С. 7–24.
    Те саме: *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables. II // J. Math. Sci. – 2020. – **247**, No. 1. – P. 1–23. – https://doi.org/10.1007/ s10958-020-04786-1.
23. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Властивості фундаментальних розв'язків, теореми про інтегральні зображення розв'язків і коректну розв'язність задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 4. – С. 7–16.
    Те саме: *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* Properties of fundamental solutions, theorems on integral representations of solutions and correct solvability of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of space variables of degeneration // J. Math. Sci. – 2021. – **256**, No. 4. – P. 363–374. – https://doi.org/10.1007/s10958-021-05432-0.
24. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62,** № 1. – С. 7–24.
    Те саме: *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* Fundamental solution of the Cauchy problem for degenerate parabolic Kolmogorov-type equations of any order // J. Math. Sci. – 2021. – **258**, No. 4. – P. 369–391. – https://doi.org/10.1007/s10958-021-05554-5.
25. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

Те саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Transl. Math. Monogr., Vol. 23. – Providence, RI: AMS, 1968. – xi+648 p.

26. *Label Мединський І. П.* Дослідження С. Д. Ейдельмана нелінійних задач та їх розвиток // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Математика. – 2011. – **1,** № 1-2. – С. 114–128.
27. *Мединський І. П.* Коректна розв'язність задачі Коші та інтегральні зображення розв'язків для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62,** № 4. – С. 39–48.
28. *Мединський І. П.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь: Дис. … д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02. – Львів, 2021. – 409 с.
29. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для систем дифференциальных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Математика и механика. – 1938. – **1**, № 7. – С. 1–72.
30. *Порпер Ф. О., Эйдельман С. Д.* Двусторонние оценки фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка и некоторые их применения // Успехи мат. наук. – 1984. – **39,** № 3. – С. 107–156.
31. *Процах Н. П., Пташник Б. Й.* Нелінійні ультрапараболічні рівняння та варіаційні нерівності. – Київ: Наук. думка, 2017. – 280 с.
32. *Солонников В. А.* Краевые задачи математической физики. 3. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1965. – **83**. – 165 с. – http://mi.mathnet.ru/book1212.
33. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv + 347 p.
34. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 443 с.
35. *Эйдельман С. Д.* Параболические уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – Москва: ВИНИТИ, 1990. – **63**. – С. 201–313.
36. *Citti G., Pascucci A., Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equations arising in mathematical finance // Differ. Integral Equat. – 2001. – **14**, No. 6. – P. 701–738.
37. *Di Francesco M., Pascucci A.* A continuous dependence result for ultraparabolic equations in option pricing // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **336,** No. 2. – P. 1026–1041. – https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.031.
38. *Di Francesco M., Pascucci A.* On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // Appl. Math. Res. Express. – 2005. – **2005,** No. 3. – P. 77–116. – https://doi.org/10.1155/AMRX.2005.77.
39. *Dron' V. S., Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P.* Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for one Kolmogorov-type ultraparabolic arbitrary order equations // Карпат. мат. публікації. – 2019. – **11**, № 2. – С. 268–280. – https://doi.org/10.15330/ cmp.11.2.268-280.
40. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D.* On solutions of parabolic equations from families of Banach spaces dependent on time // In: Differential Operators and Related Topics. Operator Theory: Advances and Applications / Adamyan V. M. et al. (eds). – Basel: Birkhäuser, 2000. – Vol. 117. – P. 111–125. – https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8403-7_10.
41. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152. – https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.
42. *Foschi P., Pascucci A.* Kolmogorov equations arising in finance: direct and inverse problems // Lect. Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. Universita degli Studi della Basilicata. – 2007. – **VI.** – P. 145–156.
43. *Ivasishen S. D., Medynsky I. P.* The Fokker–Planck–Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes // Theory Stoch. Process. – 2010. – **16(32),** No. 1. – С. 57–66.
44. *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* On applications of the Levi method in the theory of parabolic equations // Мат. студії. – 2017. – **47**, № 1. – С. 33–46. – https://doi.org/10.15330/ms.47.1.33-46.

45. *Kolmogoroff A.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**, No. 1. – P. 116–117. – https://doi.org/10.2307/1968123.
46. *Lanconelli E., Polidoro S.* On a class of hypoelliptic evolution operators // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. Partial Diff. Eqs. – 1994. – **52**, No. 1. – P. 29–63.
47. *Medynsky I. P.* On properties of solutions for Fokker-Planck-Kolmogorov equations // Math. Model. Comput. – 2020. – **7**, No. 1. – P. 158–168. – https://doi.org/10.23939/ mmc2020.01.158.
48. *Pascucci A.* Kolmogorov equations in physics and in finance // In: Elliptic and Parabolic Problems. – Basel: Birkhauser, 2005. – Ser. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications / Ed. H. Brezis. – Vol. 63. – P. 313–324.
49. *Polidoro S.* On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov – Fokker – Planck type // Le Matematiche. – 1994. – **49**, No. 1. – P. 53–105.

**FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS: EXISTENCE, PROPERTIES AND SOME THEIR APPLICATIONS**

*An overview of the results of construction, research and applications of fundamental solutions of the Cauchy problem for several classes of degenerate parabolic equations is made.*

***Key words:*** *parabolic equations, degeneration on the initial hyperplane, ultraparabolic equations of the Kolmogorov type, fundamental solution of the Cauchy problem, volume potential, integral representations of solutions.*

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
18.12.20