УДК 517.956

І. Д. Пукальський[✉]

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ НЕРІВНОМІРНО ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ

Досліджується задача Коші для нерівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь із виродженнями. Коефіцієнти параболічних рівнянь можуть мати степеневі особливості довільного порядку за будь-якими змінними на деякій множині точок. За допомогою апріорних оцінок і теорем Арцела і Рісса встановлено існування та інтегральне зображення єдиного розв'язку поставленої задачі Коші. Знайдено оцінки розв'язку задачі Коші та його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги визначається через величини порядків степеневих особливостей і вироджень коефіцієнтів $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь.

Ключові слова: *задача Коші, степеневі особливості, інтерполяційні нерівності, гельдерові простори, апріорні оцінки.*

Вступ. Важливим питанням у теорії рівнянь із частинними похідними є встановлення умов коректності поставлених задач. Особливу увагу в останні десятиліття приділяють задачам для рівнянь із виродженнями. Рівняннями з виродженнями за просторовими змінними описуються різноманітні технологічні процеси. Зокрема, рівняннями із сингулярним оператором Бесселя у тілах із симетрією моделюються дифузійні процеси, радіальні коливання, тепло-масообмін при вирощуванні монокристалів [7] тощо.

У монографії [8] у нормованих просторах Діні досліджено параболічні системи з оператором Бесселя, які вироджуються на межі області та близькі за внутрішніми властивостями до рівномірно параболічних систем. Для цих систем вивчено задачу Коші, загальну B-параболічну крайову задачу в компактній області, задачу з ваговими крайовими умовами у півпросторі. Праця [9] в основному присвячена дослідженню задачі Коші та крайових задач для рівнянь і систем рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких мають степеневі особливості певного порядку.

Вивченню властивостей фундаментального розв'язку і встановленню коректної розв'язності задачі Коші для параболічних рівнянь із виродженнями за окремими змінними присвячено праці [2, 4, 5].

У роботах [3, 10, 12, 13] досліджено задачі в обмежених циліндричних областях з нелокальними та інтегральними умовами за часовою змінною для параболічних рівнянь зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайової умови за будь-якими змінними на деякій множині точок. Класичним розв'язкам крайових задач з імпульсною дією для параболічних рівнянь другого порядку, коефіцієнти яких мають степеневі особливості, присвячено праці [6, 11].

У цій статті розглянемо задачу Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах за будь-якими змінними на деякій множині точок. З використанням апріорних оцінок і теореми Арцела доведено існування єдиного розв'язку сформульованої задачі та встановлено оцінки його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

1. Постановка задачі і основний результат. Нехай Ω – деяка обмежена область, $\dim \Omega \le n-1$, t_0, T – фіксовані додатні числа, $0 < t_0 < T$, $D = \{(t,x) \mid t \in [0,T),\ x \in \overline{\Omega}\} \cup \{(t,x) \mid t = t_0,\ x \in \mathbb{R}^n\}$, $\Pi = [0,T) \times \mathbb{R}^n$.

[✉] i.pukalsky@chnu.edu.ua

В області Π розглянемо задачу Коші знаходження функції $u(t,x)$, яка при $(t,x)\in\Pi\backslash D$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x)\equiv\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}A_k(t,x)\partial_x^k-\sum_{|k|<2b}B_k(t,x)\partial_x^k\right]u(t,x)=f(t,x), \quad (1)$$

де

$$\partial_x^k=\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}, \qquad |k|=k_1+k_2+\ldots+k_n,$$

і початкову умову за змінною t:

$$u(0,x)=\varphi(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n\setminus\bar{\Omega}. \quad (2)$$

Степеневі особливості коефіцієнтів диференціального виразу L у точці $P(t,x)\in\Pi\backslash D$ характеризують функції $s_1(\beta_i^{(1)},t)$ і $s_2(\beta_i^{(2)},x)$:

$$s_1(\beta_i^{(1)},t)=\begin{cases}|t-t_0|, & |t-t_0|\le 1,\\ 1, & |t-t_0|>1,\end{cases} \qquad s_2(\beta_i^{(2)},x)=\begin{cases}\rho^{\beta_i^{(2)}}(x), & \rho(x)\le 1,\\ 1, & \rho(x)>1,\end{cases}$$

де $\rho(x)=\inf\limits_{z\in\Omega}|x-z|$, $\beta_i^{(1)},\beta_i^{(2)}\in\mathbb{R}$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $\beta^{(\nu)}=(\beta_1^{(\nu)},\beta_2^{(\nu)},\ldots,\beta_n^{(\nu)})$, $\nu\in\{1,2\}$, $\beta=(\beta^{(1)},\beta^{(2)})$.

Введемо позначення: ℓ, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\mu_0^{(1)}$, $\mu_0^{(2)}$, $\mu_{k_i}^{(1)}$, $\mu_{k_i}^{(2)}$ – невід'ємні дійсні числа, $i\in\{1,\ldots,n\}$; $[\ell]$ – ціла частина числа ℓ, $\{\ell\}=\ell-[\ell]$; $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(2)})$, $H_r(t^{(1)},x^{(2)})$ – довільні точки з Π, $r\in\{1,2,\ldots,n\}$, $x^{(1)}=(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)}=(x_1^{(1)},\ldots,x_{r-1}^{(1)},x_r^{(2)},x_{r+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$; Q – довільна замкнена підобласть Π. Покладемо $(k,\gamma^{(\nu)}-\beta^{(\nu)})=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i(\gamma^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)})$, $(k,\mu_k^{(\nu)})=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\mu_{k_i}^{(\nu)}$, $\nu\in\{1,2\}$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1), (2).

$C^\ell(\gamma;\beta;q;\Pi)$ – множина функцій $u(t,x)\in\bar{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $\bar{Q}\backslash D$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u$, $2bj+|k|\le[\ell]$, для яких є скінченною норма

$$\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_\ell=\sum_{2bj+|k|\le[\ell]}\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_{2bj+|k|}+\langle u;\gamma;\beta;q;\Pi\rangle_\ell,$$

де

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_0=\sup_{P\in\bar{Q}}\|u(P)\|\equiv\|u;\Pi\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_{2bj+|k|}=\sup_{P\in\bar{Q}}\Big[s_1(q^{(1)},t)s_2(q^{(2)},x)s_1((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t)\times$$

$$\times s_2((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x)\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P)\right|\prod_{i=1}^{n}s_1(-k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(-k_i\beta_i^{(2)},x)\Big],$$

$$\langle u;\gamma;\beta;q;\Pi\rangle_\ell=\sum_{2bj+|k|=[\ell]}\Bigg\{\sum_{r=1}^{n}\sup_{(P_1,H_r)\subset\bar{Q}}\Big[s_1(q^{(1)},t^{(1)})s_2(q^{(2)},\tilde{x})s_1([\ell]\gamma^{(1)},t^{(1)})\times$$

$$\times s_2([\ell]\gamma^{(2)},\tilde{x})\prod_{i=1}^{n} s_1(-k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)})s_2(-k_i\beta_i^{(2)},\tilde{x})\times$$

$$\times s_1(\{\ell\}(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)}),t^{(1)})\,s_2(\{\ell\}(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)}),\tilde{x})\times$$

$$\times\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|^{-\{\ell\}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u(H_r)\right|\Big]\Big\}+$$

$$+\sum_{2bj+|k|=[\ell]}\left\{\sum_{r=1}^{n}\sup_{(P_2,H_r)\subset\bar{Q}} s_1(q^{(1)},\tilde{t})s_2(q^{(2)},x^{(2)})\times\right.$$

$$\times s_1(\ell\gamma^{(1)},\tilde{t})s_2(\ell\gamma^{(2)},x^{(2)})\prod_{i=1}^{n} s_1(-k_i\beta_i^{(1)},\tilde{t})s_2(-k_i\beta_i^{(2)},x^{(2)})\times$$

$$\left.\times\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\left\{\frac{\ell}{2b}\right\}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_2)-\partial_t^j\partial_x^k u(H_r)\right|\right\},$$

$$s_1(q,\tilde{t})=\min\{s_1(q,t^{(1)}),s_1(q,t^{(2)})\},$$

$$s_2(q,\tilde{x})=\min\{s_2(q,x^{(1)}),s_2(q,x^{(2)})\}.$$

Дослідження задачі (1), (2) будемо проводити за таких умов.

1°) для коефіцієнтів рівняння (1):

$$A_k(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1(k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(k_i\beta_i^{(2)},x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi),$$

$$B_k(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1(k_i\mu_{k_i}^{(1)},t)s_2(k_i\mu_{k_i}^{(2)},x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi),\quad 1\le|k|\le 2b-1,$$

$$B_0(t,x)s_1(\mu_0^{(1)},t)s_2(\mu_0^{(2)},x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi),\qquad B_0(t,x)\le K<\infty,$$

і виконується умова рівномірної параболічності [15, с. 9] для рівняння

$$\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}A_k(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1(k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(k_i\beta_i^{(2)},x)\,\partial_x^{|k|}\right]u(t,x)=f(t,x). \qquad (3)$$

2°) $f(t,x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;2b;\Pi)$, $\varphi(x)\in C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\mathbb{R}^n)$, $\tilde{\beta}=(0,\beta^{(2)})$, $\tilde{\gamma}=(0,\gamma^{(2)})$,

$$\gamma^{\nu}=\max\left\{\max_i\beta_i^{(\nu)},\max_i\frac{k_i(\mu_{k_i}^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)})}{2b-|k|},\frac{\mu_0^{(\nu)}}{2b}\right\},\ \nu\in\{1,2\}.$$

Справджується така

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1), (2) *виконуються умови* ***1°, 2°***. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ *і виконується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}\le C\left(\left\|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\mathbb{R}^n\right\|_{2b+\alpha}+\|f;\gamma;\beta;2b;\Pi\|_{\alpha}\right). \qquad (4)$$

Якщо, крім того, $f\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$, *то єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *в області* Π *визначається інтегралами Стілтьєса з борелівською мірою*:

$$u(t,x)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;d\tau,d\xi)f(\tau,\xi)+\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,d\xi)\varphi(\xi). \qquad (5)$$

Для доведення **теореми 1** встановимо спочатку розв'язність допоміжних задач Коші з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1), (2).

2. Інтерполяційні нерівності та оцінка розв'язків допоміжних задач Коші. Нехай $\Pi_m = \Pi \bigcap \{(t,x) \in \Pi \mid s_1(1,t) \geq m_1^{-1},\, s_2(1,x) \geq m_2^{-1}\}$, $m = (m_1, m_2)$, $m_i > 1$, $i \in \{1,2\}$, − послідовності областей, які при $m_i \to \infty$ збігаються до Π.

Розглянемо в області Π задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \Big[\, \partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(t,x)\partial_x^k - \sum_{|k|\leq 2b-1} b_k(t,x)\partial_x^k \Big] u_m(t,x) =$$

$$= f_m(t,x), \tag{6}$$

які задовольняють при $t = +0$ початкову умову

$$u_m(0,x) = \varphi_m(x). \tag{7}$$

Тут коефіцієнти a_k, b_k і функції f_m, φ_m в областях Π_m співпадають з A_k, B_k та f, φ відповідно, а в областях $\Pi \setminus \Pi_m$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_k, B_k і функцій f, φ з областей Π_m в області $\Pi \setminus \Pi_m$ зі збереженням гладкості та норми [14, с. 82].

Позначимо через $H^{\ell}(\gamma;\beta;q;\Pi)$ сукупність функцій простору $C^{\ell}(\Pi)$ з нормою $\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi\|_{\ell}$, еквівалентною при фіксованих m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_{\ell}$, тільки замість функцій $s_1(a^{(1)},t)$, $s_2(a^{(2)},x)$ беремо відповідно $d_1(a^{(1)},t)$, $d_2(a^{(2)},x)$:

$$d_1(a^{(1)},t) = \begin{cases} \max\big(s_1(a^{(1)},t), m_1^{-a^{(1)}}\big), & a^{(1)} \geq 0, \\ \min\big(s_1(a^{(1)},t), m_1^{-a^{(1)}}\big), & a^{(1)} < 0, \end{cases}$$

$$d_2(a^{(2)},x) = \begin{cases} \max\big(s_2(a^{(2)},x), m_2^{-a^{(2)}}\big), & a^{(2)} \geq 0, \\ \min\big(s_2(a^{(2)},x), m_2^{-a^{(2)}}\big), & a^{(2)} < 0. \end{cases}$$

Встановимо інтерполяційні нерівності для норми $\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi\|_{\ell}$.

Лема. *Нехай* $u_m \in H^{\ell}(\gamma;\beta;0;\Pi)$. *Тоді для* $\tilde{\varepsilon} \in (0,1)$ *існує така стала* $C(\tilde{\varepsilon})$, *що виконуються нерівності*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2bj+|k|\leq\lambda} \leq \tilde{\varepsilon}^{\ell-\lambda} \langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\rangle_{\ell} + C(\tilde{\varepsilon})\|u_m;\Pi\|_0,$$

$$\lambda < \ell. \tag{8}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $P(t,x)$ − довільна фіксована точка в області Π,

$$\Pi^{(1)} = \Big\{ (\tau,\xi) \mid \ \ |t-\tau| \leq \frac{\varepsilon^{2b}}{2b} d_1(2b\gamma^{(1)},t) d_2(2b\gamma^{(2)},x),$$

$$|x_r - \xi_r| \leq \frac{\varepsilon}{2} d_1(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)},t) d_2(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)},x),\ r \in \{1,2,\ldots,n\} \Big\}.$$

На гіперплощині $t = \tau$ розглянемо точки $P_1(\tau,\xi^{(1)})$, $P_2(\tau,\xi^{(2)})$, $\xi^{(1)} = (\xi_1^{(1)},\ldots,\xi_n^{(1)})$, $\xi^{(2)} = (\xi_1^{(1)},\ldots,\xi_{r-1}^{(1)},\xi_r^{(2)},\xi_{r+1}^{(1)},\ldots,\xi_n^{(1)})$, для яких $\big|\xi_r^{(2)} - \xi_r^{(1)}\big| =$

$= \varepsilon d_1(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)}, t) d_2(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)}, x)$.

За теоремою про «середнє», існує точка $P_3(\tau, \xi^{(3)})$ така, що при $2bj + |k| = [\ell] - 1$ маємо

$$\partial_t^j \partial_x^k u_m(P_1) - \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_2) =$$
$$= \varepsilon d_1(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)}, t) d_2(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)}, x) \partial_{\xi_r} \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_3).$$

Оскільки $u_m \in H^\ell(\gamma; \beta; 0; \Pi)$, точка P довільна і

$$d_1(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)}, \tau) d_2(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)}, \xi^{(3)}) \le 2 d_1(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)}, t) d_2(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)}, x),$$

то

$$d_1((2bj + |k|)\gamma^{(1)}, \tau) d_2((2bj + |k|)\gamma^{(2)}, \xi^{(3)}) d_1(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)}, \tau) \times$$
$$\times d_2(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)}, \xi^{(3)}) \prod_{i=1}^{n} d_1(-k_i \beta_i^{(1)}, \tau) d_2(-k_i \beta_i^{(2)}, \xi^{(3)}) \times$$
$$\times \left| \partial_{\xi_3} \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_3) \right| \le \frac{2}{\varepsilon} \| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \|_{[\ell]-1}. \tag{9}$$

Нехай $2bj + |k| = [\ell]$, $P_4(\tau^{(1)}, \xi^{(1)}) \in \Pi^{(1)}$, $\left| \tau - \tau^{(1)} \right| \le \frac{\varepsilon^{2b}}{2b} d_1(2b\gamma^{(1)}, t) d_2(2b\gamma^{(2)}, x)$. Враховуючи нерівність

$$\left| \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_4) \right| \le \left| \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_3) \right| + \left| \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_1) - \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_3) \right| \times$$
$$\times \varepsilon d_1(\{\ell\}(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)}), t) d_2(\{\ell\}(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)}), x) \left| \xi_r^{(1)} - \xi_r^{(3)} \right|^{-\{\ell\}} +$$
$$+ \left| \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_4) - \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_1) \right| \varepsilon d_1\left(2b \left\{ \frac{\ell}{2b} \right\} \gamma^{(1)}, t\right) \times$$
$$\times d_2\left(2b \left\{ \frac{\ell}{2b} \right\} \gamma^{(2)}, x\right) \left| \tau^{(1)} - \tau \right|^{-\{\ell/2b\}},$$

маємо

$$\| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \|_{[\ell]} \le \varepsilon^\alpha \langle u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \rangle_\ell + \frac{C}{\varepsilon} \| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \|_{[\ell]-1}. \tag{10}$$

Аналогічно встановлюємо нерівність

$$\| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \|_{[\ell]-1} \le \varepsilon \| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \|_{[\ell]} + \frac{C}{\varepsilon} \| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \|_{[\ell]-2}. \tag{11}$$

Враховуючи нерівності (10), (11), доведемо нерівність (8) для всіх $2bj + |k| < [\ell]$. Доведення проведемо методом математичної індукції за $[\ell]$. Нехай при $[\ell] = 1$ нерівність (8) доведено. Вважаємо, що нерівність (8) є правильною для $[\ell] = N > 1$. Доведемо її для $[\ell] = N + 1$. Нехай $2bj + |k| = N$. Маємо

$$\| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \|_N \le \varepsilon \| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \|_{N+1} + \frac{C}{\varepsilon} \| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \|_{N-1} \le$$
$$\le \varepsilon \left(\varepsilon_1^\alpha \langle u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \rangle_{N+1+\alpha} + \frac{C}{\varepsilon_1} \| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \|_N \right) +$$
$$+ \frac{C}{\varepsilon} \| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \|_{N-1}.$$

Згідно з припущенням,

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{N-1} \le \varepsilon_2 \|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_N + C(\varepsilon_2)\|u_m;\Pi\|_0,$$

тому

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_N \le \varepsilon_3^{1+\alpha} \langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\rangle_{N+1+\alpha} + C(\varepsilon_3)\|u_m;\Pi\|_0. \qquad (12)$$

При $[\ell] > N$ маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_N \le \tilde{\varepsilon}^{\ell-N} \langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\rangle_\ell + C(\tilde{\varepsilon})\|u_m;\Pi\|_0. \qquad (13)$$

Враховуючи нерівності (11)–(13), одержуємо оцінку (8). Лему доведено. ♦

При виконанні умов *1°*, *2°* існує єдиний класичний розв'язок задачі Коші (6), (7) [15, с. 269] у просторі $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$. Встановимо оцінку норми $\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}$.

Є правильною така

Теорема 2. *Якщо виконуються умови **1°**, **2°**, то для розв'язку задачі* (6), (7) *справджується оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha} \le$$

$$\le C\left(\|f_m;\gamma;\beta;2b;\Pi\|_\alpha + \|\varphi_m;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\mathbb{R}^n\|_{2b+\alpha} + \|u_m;\Pi\|_0 \right). \qquad (14)$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи інтерполяційні оцінки (8), маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha} \le (1+\varepsilon^\alpha)\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\rangle_{2b+\alpha} + C(\varepsilon)\|u_m;\Pi\|_0.$$

З означення півнорми випливає існування в Π точок $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(2)})$, $H_r(t^{(1)},x^{(2)})$, для яких виконується нерівність

$$\frac{1}{2}\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha} \le E_1 + E_2, \qquad (15)$$

де

$$E_1 = \sum_{2bj+|k|=2b} \sum_{r=1}^{n} \Big[s_1(2b\gamma^{(1)},t^{(1)}) s_2(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} s_1(-k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)}) s_2(-k_i\beta_i^{(2)},\tilde{x})\, s_1(\alpha(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)}),t^{(1)}) \times$$

$$\times s_2(\alpha(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)}),\tilde{x}) \left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|^{-\alpha} \left|\partial_t^j\partial_x^k u_m(P_1) - \partial_t^j\partial_x^k u_m(H_r)\right| \Big],$$

$$E_2 = \sum_{2bj+|k|=2b} \sum_{r=1}^{n} \Big[s_1((2b+\alpha)\gamma^{(1)},\tilde{t}) s_2((2b+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(2)}) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} s_1(-k_i\beta_i^{(1)},\tilde{t}) s_2(-k_i\beta_i^{(2)},x^{(2)}) \times$$

$$\times \left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\frac{\alpha}{2b}} \cdot \left|\partial_t^j\partial_x^k u_m(P_2) - \partial_t^j\partial_x^k u_m(H_r)\right| \Big].$$

Якщо $\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right| \ge \frac{\varepsilon}{4} n^{-1} d_1(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)},\tilde{t}) d_2(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)},\tilde{x}) \equiv N_1$, а ε – довільне дійсне число із $(0,1)$, то

$$E_1 \le 2\varepsilon^{-\alpha} \left\| u_m ; \gamma; \beta; 0; \Pi \right\|_{2b}. \tag{16}$$

Якщо $\left| t^{(1)} - t^{(2)} \right| \ge \dfrac{\varepsilon^{2b}}{2b} d_1(2b\gamma^{(1)}, \tilde{t}) d_2(2b\gamma^{(2)}, \tilde{x}) \equiv N_2$, то

$$E_2 \le 2\varepsilon^{-\alpha} \left\| u_m ; \gamma; \beta; 0; \Pi \right\|_{2b}. \tag{17}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності (8) до (16), (17), знаходимо

$$E_1 + E_2 \le 2\varepsilon^{\alpha} \left\| u_m ; \gamma; \beta; 0; \Pi \right\|_{2b+\alpha} + C(\varepsilon) \left\| u_m ; \Pi \right\|_0. \tag{18}$$

Нехай $\left| x_r^{(1)} - x_r^{(2)} \right| \le N_1$, $\left| t^{(1)} - t^{(2)} \right| \le N_2$. Будемо вважати, що

$$d_2(\gamma^{(2)}, \tilde{x}) = \min\left(d_2(\gamma^{(2)}, x^{(2)}), d_2(\gamma^{(2)}, x^{(1)}) \right) \equiv d(\gamma^{(2)}, x^{(1)}),$$

$$d_1(\gamma^{(1)}, \tilde{t}) = \min\left(d_1(\gamma^{(1)}, t^{(1)}), d_1(\gamma^{(1)}, t^{(2)}) \right) \equiv d(\gamma^{(1)}, t^{(1)})$$

і $P_1(t^{(1)}, x^{(1)}) \in \Pi$. Запишемо задачу (6), (7) у вигляді

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(P_1) \partial_x^k \right] u_m(t,x) =$$

$$= f_m(t,x) + \sum_{|k| \le 2b-1} b_k(t,x) \partial_x^k u_m +$$

$$+ \sum_{|k|=2b} \left[a_k(t,x) - a_k(P_1) \right] \partial_x^k u_m = F_m(t,x), \tag{19}$$

$$u_m(0,x) = \varphi_m(x). \tag{20}$$

У задачі (19), (20) зробимо заміну $u_m(t,x) = v_m(t,y)$, $y_i = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) \times \times d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)}) x_i$. Тоді $v_m(t,y)$ буде розв'язком задачі Коші

$$(L_2 v_m)(t,y) \equiv \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(P_1) \prod_{i=1}^{n} d_1(k_i \beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_2(k_i \beta_i^{(2)}, x^{(1)}) \partial_y^k \right] \times$$

$$\times v_m(t,y) = F_m(t,Y), \tag{21}$$

$$v_m(0,y) = \varphi_m(Y), \tag{22}$$

де

$$Y = (d_1^{-1}(\beta_1^{(1)}, t^{(1)}), d_2^{-1}(\beta_1^{(2)}, x^{(1)}) y_1, \ldots, d_1^{-1}(\beta_n^{(1)}, t^{(1)}), d_2^{-1}(\beta_n^{(2)}, x^{(1)}) y_n).$$

Позначимо $y_i^{(1)} = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)}) x_i^{(1)}$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)}) \equiv R_1(t^{(1)}, y^{(1)})$,
$K_\delta = \left\{ (t,y) \in \Pi, \left| t - t^{(1)} \right| \le (4\delta)^{2b} N_1, \left| y_i - y_i^{(1)} \right| \le 4\delta N_1^{\frac{1}{2b}} n^{-1}, \, i \in \{1, \ldots, n\} \right\}$.

Виберемо функцію $\eta(t,y)$, другі частинні похідні якої за змінною t і частинні похідні порядку $2b+1$ за змінними y є неперервними, а сама функція $\eta(t,y)$ задовольняє умови

$$\eta(t,y) = \begin{cases} 1, \quad (t,y) \in K_{1/2}, & 0 \le \eta(t,y) \le 1, \\ 0, \quad (t,y) \not\in K_{3/4}, & \left| \partial_t^j \partial_y^k \eta \right| \le \\ & \le C_{kj} d_1^{-1}((2bj + |k|)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) d_2^{-1}((2bj + |k|)\gamma^{(2)}, x^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $\omega_m(t,y) = v_m(t,y)\eta(t,y)$ буде розв'язком задачі Коші

$$(L_2\omega_m)(t,y) = \omega_m\partial_t\eta + \sum_{|k|=2b} a_k(P_1)\prod_{i=1}^{n} d_1(k_i\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_2(k_i\beta_i^{(2)}, x^{(1)}) \times$$

$$\times\left(\sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|}\partial_y^{k-p} v_m \partial_y^p \eta\right) + F_{m\eta} = \Phi(t,y;v_m), \tag{23}$$

$$\omega_m(0,y) = \eta(0,y)\varphi_m(Y). \tag{24}$$

Зазначимо, що коефіцієнти рівняння (23), згідно з умовою ***1°***, обмежені сталими, незалежними від точки P_1. Тому за теоремою 4.1 із [8, с. 43], для довільних точок $M_1(\tau^{(1)}, z^{(1)}), M_2(\tau^{(2)}, z^{(2)}) \in K_{1/2}$ виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2)\left|\partial_t^j\partial_y^k\omega_m(M_1) - \partial_t^j\partial_y^k\omega_m(M_2)\right| \le$$

$$\le c\left(\|\Phi_m\|_{C^\alpha(K_{3/4})} + \|\eta\varphi_m\|_{C^{2b+\alpha}(K_{3/4}\cap\{t=0\})}\right), \tag{25}$$

де $d(M_1, M_2)$ − параболічна відстань між M_1 і M_2, $2bj + |k| = 2b$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,y)$ і нерівності (8), одержимо

$$\|\Phi_m\|_{C^\alpha(K_{3/4})} \le c\Big[d_1^{-1}((2b+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) d_2^{-1}((2b+\alpha)\gamma^{(2)}, x^{(1)}) \times$$

$$\times\Big(\|v_m; K_{3/4}\|_0 + \|F_m; \gamma; 0; 2b; K_{3/4}\|_\alpha +$$

$$+\|v_m; \gamma; 0; 0; K_{3/4}\|_{2b}\Big)\Big], \tag{26}$$

$$\|\varphi_\eta\|_{C^{2b+\alpha}(K_{3/4}\cap\{t=0\})} \le c d_1^{-1}((2b+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) d_2^{-1}((2b+\alpha)\gamma^{(2)}, x^{(1)}) \times$$

$$\times\|\varphi_m; \tilde{\gamma}; 0; 0; K_{3/4}\cap\{t=0\}\|_{2b+\alpha}.$$

З означення простору $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ випливає правильність нерівностей

$$c_1\|v_m; \gamma; 0; 0; K_{3/4}\|_\ell \le \|u_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}\|_\ell \le c_2\|v_m; \gamma; 0; 0; K_{3/4}\|_\ell,$$

де $V_\delta = \{(t,x)\in\Pi, \left|t - t^{(1)}\right| \le (4\delta)^{2b}N_1, \left|x_i - x_i^{(1)}\right| \le 4\delta n^{-1}N_2, i\in\{1,2,\ldots,n\}\}$.

Підставляючи (26) у (25) і повертаючись до змінних (t,x), знаходимо

$$E_1 + E_2 \le c\Big(\|F_m; \gamma; \beta; 2b; V_{3/4}\|_\alpha + \|\varphi_m; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; V_{3/4}\cap\{t=0\}\|_{2b+\alpha} +$$

$$+\|u_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}\|_{2b} + \|u_m; V_{3/4}\|_0\Big). \tag{27}$$

Для знаходження норми $\|F_m; \gamma; \beta; 2b; V_{3/4}\|_\alpha$ достатньо оцінити півнорми кожного доданка виразу $F_m(t,x)$ (19). Скориставшись нерівностями (8), одержимо

$$\|F_m; \gamma; \beta; 2b; V_{3/4}\|_\alpha \le c_2\Big(\|f_m; \gamma; \beta; 2b; V_{3/4}\|_\alpha + \varepsilon_2\|u_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}\|_{2b+\alpha}\Big) +$$

$$+ c_3\|u_m; V_{3/4}\|_0. \tag{28}$$

Підставляючи (28) у (27), знаходимо

$$E_1 + E_2 \le c_2 \left(\left\| f_m; \gamma; \beta; 2b; V_{3/4} \right\|_\alpha + \varepsilon_2 \left\| u_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4} \right\|_{2b+\alpha} \right) +$$

$$+ c_1 \left\| \varphi_m; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; V_{3/4} \cap \{t = 0\} \right\|_{2b+\alpha} + c_3 \left\| u_m; V_{3/4} \right\|_0 . \qquad (29)$$

Використовуючи нерівності (13), (18), (28) і вибираючи ε, ε_2 достатньо малими, одержимо нерівність (14). Теорему доведено. ♦

Виконавши у задачі (6), (7) заміну

$$u_m(t, x) = \varphi_m(x) + W_m(t, x), \qquad (30)$$

одержимо задачу Коші для розв'язку $W_m(t, x)$:

$$(L_1 W_m)(t, x) = f_m(t, x) - (L_1 \varphi_m)(x),$$

$$W_m(0, x) = 0 . \qquad (31)$$

Справджується

Теорема 3. *Якщо* $W_m(t, x)$ *– єдиний класичний розв'язок задачі* (31) *і виконуються умови* ***1°***, ***2°***, *то для* $W_m(t, x)$ *виконується нерівність*

$$\| W_m; \Pi \|_0 \le c \| L_1 W_m; \gamma; \beta; 2b; \Pi \|_\alpha , \qquad (32)$$

де стала c *не залежить від* m.

Д о в е д е н н я. За умов гладкості коефіцієнтів диференціального виразу L_1 і функцій f_m, φ_m існує єдиний розв'язок задачі (31), який належить простору $H^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \Pi)$ і має при кожному фіксованому m_1, m_2 скінченну норму [15, с. 269].

Для встановлення нерівності (32) скористаємось методикою доведення зауваження 2 з роботи [1, с. 79]. Припустимо, що нерівність (32) не виконується у жодній замкнутій області $\bar{Q} \subset \Pi$. Тоді існує послідовність функцій $V_m^{(n)} \in H^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \Pi)$ таких, що $\left\| V_m^{(n)}; \Pi \right\| = 1$, $V_m^{(n)}(0, x) = 0$ і $L_1 V_m^{(n)}$ прямує до нуля при $n \to \infty$. Із нерівності (14) випливає рівномірна обмеженість норм $\left\| V_m^{(n)}; \gamma; \beta; 0; \Pi \right\|_{2b+\alpha}$. Тому існує підпослідовність $V_m^{(n_i)}$, яка при $n_i \to \infty$ збігається до розв'язку $V_m^{(0)} \in H^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \Pi)$ однорідної задачі Коші. Оскільки розв'язок задачі Коші єдиний, то $V_m^{(0)} \equiv 0$, що суперечить рівності $\left\| V_m^{(n)}; \Pi \right\| = 1$. Теорему доведено. ♦

Зауважимо, що

$$\| L_1 W_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \|_{2b+\alpha} \le c \left(\| f_m; \gamma; \beta; 2b; \Pi \|_\alpha + \left\| \varphi_m; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \mathbb{R}^n \right\|_{2b+\alpha} \right). \qquad (33)$$

Д о в е д е н н я **теореми 1.** Оскільки

$$\| f_m; \gamma; \beta; 2b; \Pi \|_\alpha \le c \| f; \gamma; \beta; 2b; \Pi \|_\alpha ,$$

$$\left\| \varphi_m; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \mathbb{R}^n \right\|_{2b+\alpha} \le c \left\| \varphi; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \mathbb{R}^n \right\|_{2b+\alpha} ,$$

то, використовуючи нерівності (14) і (33), одержимо

$$\| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \|_{2b+\alpha} \le c \left(\| f; \gamma; \beta; 2b; \Pi \|_\alpha + \left\| \varphi; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \mathbb{R}^n \right\|_{2b+\alpha} \right). \qquad (34)$$

Права частина нерівності (34) не залежить від m_1, m_2, а послідовності

$$\{W_m^{(j,k)}\} = \Big\{ d_1\big((2bj+|k|)\gamma^{(1)}, t\big) d_2\big((2bj+|k|)\gamma^{(2)}, x\big) \prod_{i=1}^{n} d_1(-k_i\beta_i^{(1)}, t) \times$$

$$\times\, d_2(-k_i\beta_i^{(2)}, x) \left| \partial_t^j \partial_x^k u_m \right| \Big\}, \quad 2bj + |k| \le 2b,$$

є рівномірно обмеженими і рівностепенево неперервними в будь-якій замкнутій області $\bar{Q} \subset \Pi$. За теоремою Арцела, існують послідовності $\{W_{m(\ell)}^{(j,k)}\}$, рівномірно збіжні при $m(\ell) \to \infty$ до $W^{(j,k)}$. Переходячи до границі при $m(\ell) \to \infty$ у задачі (6), (7), отримаємо, що $u(t,x) = W^{(0,0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1), (2), $u \in C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ і виконується оцінка (4).

Оскільки $C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi) \subset C^{\alpha}(\gamma;\beta;2b;\Pi)$, то для $f \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ є правильною оцінка

$$\| f;\gamma;\beta;2b;\Pi \|_{\alpha} \le c \| f;\gamma;\beta;0;\Pi \|_{\alpha}. \tag{35}$$

Використовуючи оцінки (4), (35), для розв'язку задачі (1), (2) встановлюємо правильність оцінки

$$\| u;\gamma;\beta;0;\Pi \|_{2b+\alpha} \le c\left(\| f;\gamma;\beta;0;\Pi \|_{\alpha} + \| \varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\mathbb{R}^n \|_{2b+\alpha} \right).$$

Зазначимо, що простір $C_{\alpha} \equiv C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi) \times C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\mathbb{R}^n)$ належить до простору $C(\Pi)$, $C_{\alpha} \subset C(\Pi)$. Тому, з огляду на теорему Рісса, можемо вважати, що при фіксованих $(t,x) \in \Pi$ лінійний неперервний функціонал $u(t,x)$ породжує борелівську міру $Z(t,x;G)$, яка визначається на σ-алгебрі підмножин G області Π, включаючи Π і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціонала визначається формулою (5).

Теорему 1 доведено. ♦

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 208 с.
2. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические уравнения с вырождением по части переменных // Докл. РАН. – 1998. – **360**, № 3. – С. 303–305.
3. *Исарюк И. М., Пукальский И. Д.* Краевые задачи для параболических уравнений с нелокальным условием и вырождениями // Укр. мат. вісн. – 2014. – **11**, № 4. – С. 480–496.
   Те саме: *Isaryuk I. M., Pykal'skii I. D.* The boundary-value problems for parabolic equations with a nonlocal condition and degenerations // J. Math. Sci. – 2015. – **207**, No. 1. – P. 26–38. – https://doi.org/10.1007/s10958-015-2352-2.
4. *Івасишен С. Д., Літовченко В. А.* Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з недодатним родом // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 10. – С. 1330–1350.
   Те саме: *Ivasyshen S. D., Litovchenko V. A.* Cauchy problem for a class of degenerate Kolmogorov-type parabolic equations with nonpositive genus // Ukr. Math. J. – 2011. – **62**, No. 10. – P. 1543–1566.
   – https://doi.org/10.1007/s11253-011-0448-5.
5. *Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С.* Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині // Буков. мат. журн. – 2016. – **4**, № 3-4. – С. 57–68.
6. *Ісарюк І. М., Пукальський І. Д.* Крайові задачі з імпульсними умовами для параболічних рівнянь з виродженнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59,** № 3. – С. 55–67.
   Те саме: *Isaryuk I. M., Pukal's'kyi I. D.* Boundary-value problems with impulsive conditions for parabolic equations with degenerations // J. Math. Sci. – 2019. – **236**, No. 1. – P. 53–70. – https://doi.org/10.1007/s10958-018-4097-1.

7. *Конаков П. К., Веревочкин Г. Е., Горяинов Л. А., Зарувинская Л. А., Конаков Ю. П., Кудрявцев В. В., Третьяков Г. А.* Тепло- и массообмен при получении монокристаллов. – Москва: Металлургия, 1971. – 238 с.
8. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
9. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
10. *Пукальский И. Д.* Задача с косой производной для неравномерно параболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 12. – С. 1637–1645.
    Те саме: *Pukal's'kii I. D.* The oblique derivative problem for a nonuniformly parabolic equation // Differ. Equat. – 2001. – **37**, No. 12. – P. 1720–1730.
    – https://doi.org/10.1023/A:1014467207063.
11. *Пукальський І. Д.* Крайова задача для параболічних рівнянь з імпульсними умовами і виродженнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 2. – С. 55–63.
    Те саме: *Pukal's'kyi I. D.* Boundary-value problem for parabolic equations with impulsive conditions and degenerations // J. Math. Sci. – 2017. – **223**, No. 1. – P. 60–71. – https://doi.org/10.1007/s10958-017-3338-z.
12. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
13. *Пукальський І. Д., Ісарюк І. М.* Нелокальні параболічні крайові задачі з особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 4. – С. 54–66.
    Те саме: *Pukal's'kyi I. D., Isaryuk I. M.* Nonlocal parabolic boundary-value problems with singularities // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 3. – P. 327–343.
    – https://doi.org/10.1007/s10958-015-2449-7.
14. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 427 с.
    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv + 347 p.
15. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 443 с.
    Те саме: *Eidelman S. D.* Parabolic systems. – Amsterdam: North-Holland, 1969.

CAUCHY PROBLEM FOR NON-UNIFORMLY PARABOLIC EQUATIONS WITH POWER SINGULARITIES

The Cauchy problem for non-uniformly $\overrightarrow{2b}$ *-parabolic equations with degenerations is investigated. Coefficients of parabolic equations can have power singularities of arbitrary order with respect to any variables on some set of points. Using prior estimates and Arzelà's and Riesz's theorems the existence and integral representation of the unique solution to the formulated Cauchy problem are established. Estimates for the solution of the Cauchy problem and its derivatives in Hölder spaces with power weight are found. The order of the power weight is defined in terms of orders of the power singularities and degenerations in coefficients of* $\overrightarrow{2b}$ *-parabolic equations.*

Key words: *Cauchy problem, power singularities, interpolation inequalities, Hölder spaces, prior estimates.*

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
06.02.21