

ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ З МНОЖИНОЮ ПІДКРІПЛЕНИХ ОТВОРІВ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ З УРАХУВАННЯМ РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПОВЕРХНІ

Розв'язано задачу про усталені поперечні коливання ортотропної пластини довільної форми з множиною підкріплених отворів довільної конфігурації за дії гармонічного в часі довільного розподіленого навантаження на поверхні. Використано рівняння уточненої теорії пластин, які враховують деформацію поперечного зсуву та всі інерційні компоненти. Розв'язок побудовано на основі непрямого методу граничних елементів. Наведено числові результати, коли контури отворів і зовнішня межа пластини мають форму супереліпса.

Ключові слова: коливання, ортотропна пластинка, отвори, супереліпс, розподілене навантаження, непрямий метод граничних елементів.

Вступ. Пластини з отворами використовуються в багатьох конструкціях. Наявність отворів різної форми дозволяє вирішити низку проблем при моделюванні складних структур. Наприклад, їх застосовують для зменшення ваги конструкції, забезпечення зручного з'єднання і доступу до елементів, у дизайнерських цілях тощо. Кількість, форма та розміщення отворів пластини мають значний вплив на її динамічну поведінку. У зв'язку зі зростанням вимог до експлуатації анізотропних елементів конструкцій виникає необхідність проводити обчислення для такого класу задач ефективними математичними методами в рамках уточнених моделей.

Коліванням пластин з отворами приділено багато уваги в науковій літературі. Існує достатньо робіт, у яких досліджують вільні коливання ізотропних прямокутних і круглих пластин з одним або двома прямокутними або круглими отворами в рамках класичної теорії з використанням методу скінченних елементів. У роботі [1] непрямим методом граничних елементів з використанням послідовнісного підходу до знаходження функцій Гріна розв'язано задачу про коливання пластин з отворами та вирізами довільної форми, розглянуто прямокутні пластини з вільним від навантаження круговим отвором, з підкріпленим квадратним отвором і з круговими вільними від навантаження вирізами на кутах, застосовано спрощену модель Тимошенка. За допомогою методу R -функцій і варіаційного методу Рітца розв'язано задачу стійкості шаруватих пластин з отворами в рамках уточненої теорії першого порядку, розглянуто прямокутні пластини з одним і двома прямокутними отворами при різних умовах їх закріплення [2]. Задачу про поперечні коливання ортотропної пластини з множиною отворів довільної конфігурації і змішаними крайовими умовами розв'язано непрямим методом граничних елементів з використанням послідовнісного підходу до знаходження функцій Гріна в межах уточненої теорії пластин, яка враховує деформацію поперечного зсуву, досліджено коливання прямокутної шарнірно опертої пластини з двома підкріпленими круглими отворами [3]. На основі класичної теорії пластин, уточненої теорії першого порядку, а також тривимірної теорії пружності методом скінченних елементів досліджено вільні коливання композитних консольних пластин з одним, двома та трьома круглими отворами [4]. Методом R -функцій досліджено нелінійні параметричні коливання шаруватих пластин складної форми з використанням класичної теорії пластин та уточненої теорії першого порядку, розглянуто прямокутні пластини з круглим і прямокутним зовнішніми вирізами зі змішаними крайовими умовами [5]. Методом скінченних елементів у межах

✉ oliatuzheliak@gmail.com

уточненої теорії досліджено вільні коливання багатошарових пластин з центральним круглим отвором і змішаними крайовими умовами [6]. У роботі [7] в межах класичної теорії досліджено вільні коливання прямокутної пластини з прямокутним або круглим отвором методом зв'язування незалежних координат. Знайдено власні частоти круглих пластин з декількома круглими отворами з використанням непрямого методу граничних інтегральних рівнянь у межах класичної теорії пластин, розглянуто числові випадки жорстко закріпленої пластини з одним або двома вільними отворами [8]. У статті [9] методом зв'язування незалежних координат досліджено вільні коливання шарнірно опертої еліптичної пластини з прямокутним отвором, використано класичну теорію пластин. Розглянуто вільні коливання квадратної шарнірно опертої пластини з квадратним отвором з використанням функції Гріна для рівнянь пластин несталої товщини в межах уточненої теорії [10]. У роботі [11] застосовано напіваналітичний підхід до моделювання отворів у пластинах зі змінною товщиною і довільними крайовими умовами, використано класичну теорію тонких пластин Кірхгофа, розглянуто прямокутну пластину з одним та двома прямокутними отворами та кутовими вирізами. Досліджено вільні поперечні коливання шарнірно опертої прямокутної ізотропної пластини з круглим точково закріпленим центральним отвором методом Рітца, розглянуто різні крайові умови на контурах отворів і на зовнішній границі пластини, використано класичну теорію пластин [12]. Запропоновано єдиний підхід до прогнозування вільних коливань пружно закріпленої ізотропної пластини з довільними отворами [13], модель побудовано на основі спектрогеометричного методу в рамках класичної теорії з використанням рівняння пластини несталої товщини, розглянуто прямокутну пластину з трикутними та чотирикутними отворами та різними крайовими умовами на зовнішній і внутрішній границі.

У цій роботі в рамках уточненої теорії пластин, яка враховує деформацію поперечного зсуву та всі інерційні компоненти, побудовано розв'язок задачі про вимушені усталені поперечні коливання ортотропної пластини довільної форми з множиною підкріплених отворів довільної конфігурації за дії на поверхні пластини довільного розподіленого навантаження. Для розв'язування використовується непрямий метод граничних елементів і послідовнісний підхід до подання функції Гріна. Досліджено випадки коливання супереліптичних пластин з супереліптичними отворами.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу про усталені поперечні коливання ортотропної пластини, яка має N отворів (багатозв'язна область Ω). На поверхні пластини діє гармонічне в часі розподілене навантаження, яке задається функціями q , m_1 , m_2 . Отвори та зовнішня межа пластини мають довільну форму, а їхніми контурами є криві $L^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N$, та $L^{(N+1)}$ відповідно. На контурах отворів і на зовнішній границі пластини задано прогин і кути повороту нормалі до серединної поверхні:

$$w = w_0^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_n = \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad (1)$$

де

$$\alpha \in L^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N + 1.$$

Ключова система диференціальних рівнянь у межах уточненої теорії пластин, яка враховує деформацію поперечного зсуву та всі інерційні компоненти, має вигляд

$$[L]\{U\} = -\{P\}, \quad \{U\} = \{w, \gamma_1, \gamma_2\}^\top, \quad \{P\} = \{q, m_1, m_2\}^\top,$$

$$L_{11} = \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\begin{aligned}
L_{22} &= D_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\
L_{33} &= D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\
L_{23} &= (D_1 \nu_{12} + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad L_{32} = (D_{12} + D_2 \nu_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \\
L_{12} &= -L_{21} = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad L_{13} = -L_{31} = \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Використовуємо позначення з роботи [3].

2. Розв'язання задачі. Крайову задачу (2), (1) розв'язуємо непрямим методом граничних елементів, використовуючи функції Гріна, наведені в роботі [3], знайдені на основі послідовнісного подання дельта-функції Дірака [1]. Для побудови системи інтегральних рівнянь вводимо узагальнений контур $L = L^{(1)} \cup L^{(2)} \cup \dots \cup L^{(N)} \cup L^{(N+1)}$ і такі функції на ньому:

$$\begin{aligned}
\{T(\xi)\} &= \{T_1(\xi), T_2(\xi), T_3(\xi)\}^\top = \{T^{(j)}(\xi)\} = \{T_1^{(j)}(\xi), T_2^{(j)}(\xi), T_3^{(j)}(\xi)\}^\top, \\
\xi &\in L^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N+1.
\end{aligned}$$

Розв'язок подамо у вигляді суми потенціалу простого шару та розв'язку Фур'є системи (2) у прямокутній області $\Pi : 0 \leq \alpha_1 \leq \ell_1, 0 \leq \alpha_2 \leq \ell_2$, яка містить розглядувану багатозв'язну область Ω , з однорідними крайовими умовами $w = 0$, $M_n = 0$, $\gamma_\tau = 0$, $\alpha \in \partial\Pi$:

$$\begin{aligned}
\{U(\alpha, t)\} &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [E_{km}(\alpha)] [U_{km}] [E_{km}(\xi)] \times \\
&\times \{T(\xi)\} d\ell(\xi) \sin(\omega t) - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [E_{km}(\alpha)] [U_{km}] \{P_{km}\} \sin(\omega t), \quad (3)
\end{aligned}$$

де

$$\{U(\alpha, t)\} = \{w(\alpha, t), \gamma_1(\alpha, t), \gamma_2(\alpha, t)\}^\top,$$

$$\{P_{km}\} = \{q_{km}, m_{1km}, m_{2km}\}^\top,$$

$$[E_{km}(\alpha)] = \begin{bmatrix} \Phi_{km}^{ss}(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}^{cs}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{km}^{cs}(\alpha) = \cos(\lambda_{1k} \alpha_1) \sin(\lambda_{2m} \alpha_2), \quad \Phi_{km}^{sc}(\alpha) = \sin(\lambda_{1k} \alpha_1) \cos(\lambda_{2m} \alpha_2),$$

$$\Phi_{km}^{ss}(\alpha) = \sin(\lambda_{1k} \alpha_1) \sin(\lambda_{2m} \alpha_2), \quad \Phi_{km}^{cc}(\alpha) = \cos(\lambda_{1k} \alpha_1) \cos(\lambda_{2m} \alpha_2),$$

$$\lambda_{1k} = \frac{k\pi}{\ell_1}, \quad \lambda_{2m} = \frac{m\pi}{\ell_2},$$

$$[U_{km}] = \begin{bmatrix} w_{km}^1 & w_{km}^2 & w_{km}^3 \\ \gamma_{1km}^1 & \gamma_{1km}^2 & \gamma_{1km}^3 \\ \gamma_{2km}^1 & \gamma_{2km}^2 & \gamma_{2km}^3 \end{bmatrix}, \quad [U_{km}] = [L^{km}]^{-1},$$

$$\begin{aligned}
L_{11}^{km} &= -\Lambda_1 \lambda_{1k}^2 - \Lambda_2 \lambda_{2m}^2 + 2\rho h \omega^2, \\
L_{22}^{km} &= -D_1 \lambda_{1k}^2 - D_{12} \lambda_{2m}^2 - \Lambda_1 + \frac{2h^3}{3} \rho \omega^2, \\
L_{33}^{km} &= -D_{12} \lambda_{1k}^2 - D_2 \lambda_{2m}^2 - \Lambda_2 + \frac{2h^3}{3} \rho \omega^2, \\
L_{23}^{km} &= -(D_1 \nu_{12} + D_{12}) \lambda_{1k} \lambda_{2m}, \quad L_{32}^{km} = -(D_2 \nu_{21} + D_{12}) \lambda_{1k} \lambda_{2m}, \\
L_{12}^{km} &= L_{21}^{km} = -\Lambda_1 \lambda_{1k}, \quad L_{13}^{km} = L_{31}^{km} = -\Lambda_2 \lambda_{2m}, \\
C_{km}(\varepsilon) &= \mu_{km} \frac{4}{\ell_1 \ell_2} \varphi(\lambda_{1k} \varepsilon_1) \varphi(\lambda_{2m} \varepsilon_2), \quad \mu_{km} = \begin{cases} 1, & k \neq 0, m \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & k = 0, m \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & k \neq 0, m = 0, \\ \frac{1}{4}, & k = 0, m = 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

$\varphi(\lambda_{1k} \varepsilon_1)$, $\varphi(\lambda_{2m} \varepsilon_2)$ – вагові функції, які визначають тип узагальненого підсумовування.

Використовуючи подання розв'язку (3) і крайові умови (1), будемо систему $3(N+1)$ інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій густин потенціалу простого шару $\{T(\xi)\}$:

$$\begin{aligned}
&\{w_0^{(j)}(\alpha), \gamma_{n_0}^{(j)}(\alpha), \gamma_{\tau_0}^{(j)}(\alpha)\}^\top = \\
&= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [\Omega_{km}^{(U)}(\alpha)] [E_{km}(\xi)] \{T(\xi)\} d\ell(\xi) - \\
&- \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [\Omega_{km}^{(U)}(\alpha)] \{P_{km}\}, \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N+1, \quad (4)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
[\Omega_{km}^{(U)}(\alpha)] &= \begin{bmatrix} w_1(\alpha) & w_2(\alpha) & w_3(\alpha) \\ \gamma_{1n}(\alpha) & \gamma_{2n}(\alpha) & \gamma_{3n}(\alpha) \\ \gamma_{1\tau}(\alpha) & \gamma_{2\tau}(\alpha) & \gamma_{3\tau}(\alpha) \end{bmatrix}, \\
P_{km}^1 &= q_{km}, \quad P_{km}^2 = m_{1km}, \quad P_{km}^3 = m_{2km}, \\
\gamma_{jn}(\alpha) &= n_1(\alpha) \gamma_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + n_2(\alpha) \gamma_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha), \\
\gamma_{j\tau}(\alpha) &= \tau_1(\alpha) \gamma_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + \tau_2(\alpha) \gamma_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha), \\
w_j(\alpha) &= w_{km}^j \Phi_{km}^{ss}(\alpha), \quad j = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Систему інтегральних рівнянь (4) розв'язуємо методом колокацій. Контури узагальненої кривої L замінюємо ламаними і на кожному з відрізків задаємо розподіл функцій густин $\{T^{(j)r}(\xi)\} = \{T^{(j)r}\} \delta(\alpha^{(j)r}, \xi)$. Тут $\alpha^{(j)r}$ – середини відрізків розбиття j -го контуру, $r = 1, 2, \dots, S^{(j)}$, $S^{(j)}$ – кількість відрізків розбиття, $\alpha^{(j)q}$ – точки колокацій. В результаті отримаємо систему $3 \sum_{j=1}^{N+1} S^{(j)}$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно дискретних

значень невідомих густин:

$$\begin{aligned}
& \{w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q})\}^T = \\
& = - \sum_{f=1}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) [\Omega_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q})] [E_{km}(\alpha^{(f)r})] \{T^{(f)r}\} - \\
& - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M [\Omega_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q})] \{P_{km}\}, \\
& \alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N+1, \quad q = 1, 2, \dots, S^{(j)}, \quad (5)
\end{aligned}$$

За знайденими з системи (5) дискретними значеннями функцій невідомих густин потенціалів простого шару $\{T^{(j)r}\}$, $j=1, 2, \dots, N+1$, $r=1, 2, \dots, S^{(j)}$, характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку можемо знайти за формулами

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} w(\alpha, t) \\ \gamma_n(\alpha, t) \\ \gamma_\tau(\alpha, t) \end{array} \right\} = \\
& = - \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) [\Omega_{km}^{(U)}(\alpha)] [E_{km}(\alpha^{(j)r})] \{T^{(j)r}\} \sin(\omega t) - \\
& - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M [\Omega_{km}^{(U)}(\alpha)] \{P_{km}\} \sin(\omega t), \quad \alpha^{(j)r} \in L, \quad j = 1, 2, \dots, N+1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} Q_n(\alpha, t) \\ M_n(\alpha, t) \\ M_\tau(\alpha, t) \end{array} \right\} = \\
& = - \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) [\Omega_{km}^{(P)}(\alpha)] [E_{km}(\alpha^{(j)r})] \{T^{(j)r}\} \sin(\omega t) - \\
& - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M [\Omega_{km}^{(P)}(\alpha)] \{P_{km}\} \sin(\omega t), \quad \alpha^{(j)r} \in L, \quad j = 1, 2, \dots, N+1,
\end{aligned}$$

$$[\Omega_{km}^{(P)}(\alpha)] = \begin{bmatrix} Q_{1n}(\alpha) & Q_{2n}(\alpha) & Q_{3n}(\alpha) \\ M_{1n}(\alpha) & M_{2n}(\alpha) & M_{3n}(\alpha) \\ M_{1\tau}(\alpha) & M_{2\tau}(\alpha) & M_{3\tau}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
Q_{jn} &= \Lambda_1 n_1(\alpha) \Phi_{km}^{cs}(\alpha) (\gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} w_{km}^j) + \\
& + \Lambda_2 n_2(\alpha) \Phi_{km}^{sc}(\alpha) (\gamma_{2km}^j + \lambda_{2m} w_{km}^j), \\
M_{jn} &= D_1 n_1^2(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) (-\lambda_{1k} \gamma_{1km}^j - \nu_{12} \lambda_{2m} \gamma_{2km}^j) + \\
& + D_2 n_2^2(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) (-\lambda_{2m} \gamma_{2km}^j - \nu_{21} \lambda_{1k} \gamma_{1km}^j) + \\
& + 2D_{12} n_1(\alpha) n_2(\alpha) \Phi_{km}^{cc}(\alpha) (\lambda_{2m} \gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} \gamma_{2km}^j),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{j\tau} = & D_1 n_1(\alpha) \tau_1(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) (-\lambda_{1k} \gamma_{1km}^j - \nu_{12} \lambda_{2m} \gamma_{2km}^j) + \\
& + D_2 n_2(\alpha) \tau_2(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) (-\lambda_{2m} \gamma_{2km}^j - \nu_{21} \lambda_{1k} \gamma_{1km}^j) + \\
& + D_{12} (n_1(\alpha) \tau_2(\alpha) + n_2(\alpha) \tau_1(\alpha)) \Phi_{km}^{cc}(\alpha) (\lambda_{2m} \gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} \gamma_{2km}^j), \\
& j = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

3. Числові результати. Розглянемо часткові випадки задачі, коли на контурах отворів і на зовнішній границі пластини задано сталі амплітуди прогину та кутів повороту нормалі до серединної поверхні. Конттури отворів вибираємо у формі супереліпса, а зовнішнє навантаження є рівномірно розподіленим і діє на деяку прямокутну ділянку на поверхні пластини.

Для контурів отворів і зовнішньої границі пластини використовуємо параметричну форму задання супереліпса:

$$\alpha_1(t) = \tilde{\alpha}_1 + |\cos t|^{2/n} \cdot R_a \operatorname{sgn}(\cos t),$$

$$\alpha_2(t) = \tilde{\alpha}_2 + |\sin t|^{2/n} \cdot R_b \operatorname{sgn}(\sin t).$$

Розглянемо супереліптичну жорстко закріплену пластину товщини $2h$, $h = 0.005$ м, яка міститься у прямокутній області зі сторонами $\ell_1 = \ell_2 = 2$ м з центром у точці $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ м і такими фізичними характеристиками: $E_1 = 110$ ГПа, $E_2 = 70$ ГПа, $G_{12} = G_{13} = 39$ ГПа, $G_{23} = 26.92$ ГПа, $\nu_{12} = 0.3$, $\nu_{21} = \frac{E_1}{E_2} \nu_{12}$, $\rho = 5000$ кг/м³. Крайові умови на зовнішній межі пластини: $w_0 = 0$, $\gamma_{n0} = \gamma_{\tau 0} = 0$. Параметри апроксимації:

$$C_{km}(\varepsilon) = \mu_{km} \frac{4}{\ell_1 \ell_2} \frac{\sin^2\left(\frac{\lambda_{1k} \varepsilon_1}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\lambda_{2m} \varepsilon_2}{2}\right)}{\left(\frac{\lambda_{1k} \varepsilon_1}{2}\right)^2 \left(\frac{\lambda_{2m} \varepsilon_2}{2}\right)^2},$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon^{(j)} = \frac{2\pi R_j}{3S^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \dots, N + 1,$$

Частота усталених коливань $\tilde{\omega} = \omega/2\pi = 20$ Гц. На всіх рисунках амплітуду прогину розглядаємо на лінії $\alpha_2 = 1$ м.

На рис. 1 зображено амплітуду прогину супереліптичної пластини, яка має два супереліптичні отвори, за дії розподіленого навантаження різної величини (суцільна лінія – $q = 100$ кН/м², штрихова – $q = 300$ кН/м², штрихпунктирна – $q = 500$ кН/м²). Навантаження діє на прямокутну область на поверхні пластини зі сторонами $a = 0.2$ м $b = 0.4$ м і центром $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ м. Геометричні параметри контурів отворів і зовнішньої межі пластини: $R_a^{(1)} = R_b^{(1)} = 0.2$ м, $n^{(1)} = 3$, $R_a^{(2)} = R_b^{(2)} = 0.2$ м, $n^{(2)} = 3$, $R_a^{(3)} = R_b^{(3)} = 0.9$ м, $n^{(3)} = 3$. Центри отворів: $\alpha_1^{(1)} = 0.6$ м, $\alpha_2^{(1)} = 1$ м, $\alpha_1^{(2)} = 1.4$ м, $\alpha_2^{(2)} = 1$ м. Крайові умови, задані на контурах отворів: $w_0^{(1)} = 0.007$ м, $\gamma_{n0}^{(1)} = \gamma_{\tau 0}^{(1)} = 0$, $w_0^{(2)} = 0.003$ м, $\gamma_{n0}^{(2)} = \gamma_{\tau 0}^{(2)} = 0$. Вибираємо такі параметри апроксимації: $K = 80$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 20$, $S^{(3)} = 60$. Бачимо, що зі збільшенням величини навантаження амплітуда прогину пластини збільшується в околі його дії між отворами.

На рис. 2 показано амплітуду прогину круглої пластини радіуса $R = 0.9$ м з двома супереліптичними отворами з геометричними параметрами $R_a^{(1)} = R_b^{(1)} = 0.2$ м, $n^{(1)} = 3$, $R_a^{(2)} = R_b^{(2)} = 0.2$ м, $n^{(2)} = 3$ для різного розміщення отворів: суцільна лінія – $\alpha_1^{(1)} = 0.4$ м, $\alpha_2^{(1)} = 0.5$ м, $\alpha_1^{(2)} = 1.6$ м, $\alpha_2^{(2)} = 0.5$ м, штрихова – $\alpha_1^{(1)} = 0.5$ м, $\alpha_2^{(1)} = 0.5$ м, $\alpha_1^{(2)} = 1.5$ м, $\alpha_2^{(2)} = 0.5$ м, штрихпунктирна – $\alpha_1^{(1)} = 0.6$ м, $\alpha_2^{(1)} = 0.5$ м, $\alpha_1^{(2)} = 1.4$ м, $\alpha_2^{(2)} = 0.5$ м.

Крайові умови на контурах отворів: $w_0^{(1)} = 0.003$ м, $\gamma_{n0}^{(1)} = \gamma_{\tau0}^{(1)} = 0$, $w_0^{(2)} = -0.005$ м, $\gamma_{n0}^{(2)} = \gamma_{\tau0}^{(2)} = 0$. На поверхні пластини на прямокутну ділянку зі сторонами $a = 0.2$ м, $b = 0.4$ м і центром $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ м діє розподілене навантаження величиною $q = 200$ кН/м². Параметри апроксимації: суцільна лінія – $K = 120$, $S^{(1)} = S^{(2)} = S^{(3)} = 60$, штрихова – $K = 100$, $S^{(1)} = S^{(2)} = S^{(3)} = 40$, штрихпунктирна – $K = 60$, $S^{(1)} = S^{(2)} = S^{(3)} = 20$. Бачимо, що у цьому випадку при зближенні отворів амплітуда прогину пластини зменшується.

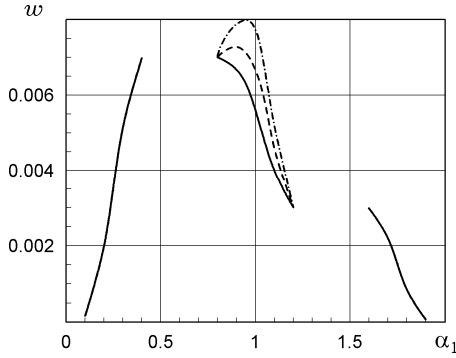


Рис. 1

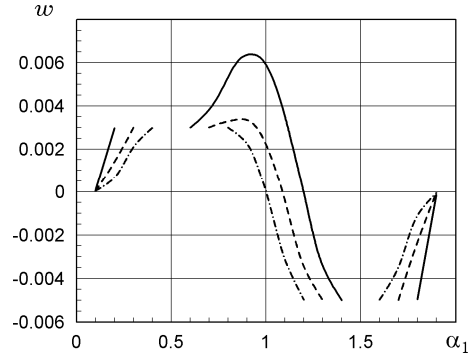


Рис. 2

Рис. 3 ілюструє поведінку амплітуди прогину супереліптичної пластини з двома супереліптичними отворами, коли вибрано різні значення модуля Юнга уздовж одного з напрямків (суцільна лінія – $E_1 = 350$ ГПа, штрихова – $E_1 = 70$ ГПа, штрихпунктирна – $E_1 = 18$ ГПа). Контури отворів і зовнішня межа пластини мають такі геометричні параметри: $R_a^{(1)} = R_b^{(1)} = 0.2$ м, $n^{(1)} = 4$, $R_a^{(2)} = R_b^{(2)} = 0.2$ м, $n^{(2)} = 4$, $R_a^{(3)} = 0.9$ м, $R_b^{(3)} = 0.7$ м, $n^{(3)} = 3$. Центри отворів: $\alpha_1^{(1)} = 0.6$ м, $\alpha_2^{(1)} = 1$ м, $\alpha_1^{(2)} = 1.4$ м, $\alpha_2^{(2)} = 1$ м. Крайові умови на контурах отворів: $w_0^{(1)} = 0.007$ м, $\gamma_{n0}^{(1)} = \gamma_{\tau0}^{(1)} = 0$, $w_0^{(2)} = -0.005$ м, $\gamma_{n0}^{(2)} = \gamma_{\tau0}^{(2)} = 0$. На поверхні пластини на прямокутну ділянку зі сторонами $a = 0.2$ м, $b = 0.6$ м і центром у точці $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ м діє розподілене навантаження $q = 250$ кН/м². Параметри апроксимації: для суцільної лінії – $K = 140$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 40$, $S^{(3)} = 100$, для штрихової – $K = 100$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 40$, $S^{(3)} = 60$, для штрихпунктирної – $K = 60$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 20$, $S^{(3)} = 40$. Бачимо, що зі зменшенням модуля Юнга E збільшується прогин пластини в околі дії навантаження у зоні між двома отворами для заданої частоти коливань.

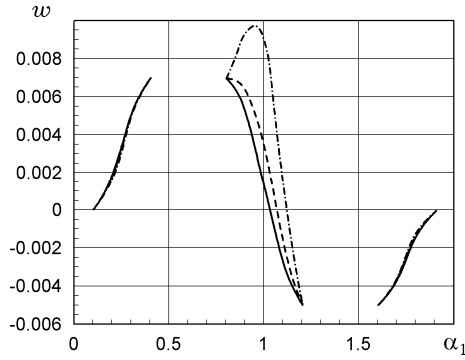


Рис. 3

На рис. 4 і рис. 5 зображено амплітуди прогину супереліптичної пластини з двома супереліптичними отворами для різних значень частоти установлених коливань. На рис. 4 суцільна лінія відповідає $\tilde{\omega} = 100$ Гц, штрихова – $\tilde{\omega} = 140$ Гц, штрихпунктирна – $\tilde{\omega} = 200$ Гц. На рис. 5 суцільна лінія відповідає $\tilde{\omega} = 460$ Гц, штрихова – $\tilde{\omega} = 490$ Гц, штрихпунктирна – $\tilde{\omega} = 520$ Гц.

Геометричні параметри отворів і пластини: $R_a^{(1)} = 0.1$ м, $R_b^{(1)} = 0.2$ м, $n^{(1)} = 4$, $R_a^{(2)} = 0.1$ м, $R_b^{(2)} = 0.2$ м, $n^{(2)} = 4$, $R_a^{(3)} = 0.9$ м, $R_b^{(3)} = 0.7$ м, $n^{(3)} = 2$. Розміщення отворів: $\alpha_1^{(1)} = 0.5$ м, $\alpha_2^{(1)} = 0.5$ м, $\alpha_1^{(2)} = 1.5$ м, $\alpha_2^{(2)} = 0.5$ м. Крайові умови на контурах отворів: $w_0^{(1)} = 0.006$ м, $\gamma_{n0}^{(1)} = \gamma_{\tau0}^{(1)} = 0$, $w_0^{(2)} = -0.004$ м, $\gamma_{n0}^{(2)} = \gamma_{\tau0}^{(2)} = 0$. Розподілене навантаження $q = 90$ кН/м² діє на прямокутну ділянку зі сторонами $a = b = 0.4$ м і центром у точці $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ м. Параметри апроксимації на рис. 4 для суцільної лінії $K = 100$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 20$, $S^{(3)} = 80$, для штрихової і штрихпунктирної ліній – $K = 120$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 20$, $S^{(3)} = 100$. Параметри апроксимації на рис. 5 для суцільної лінії $K = 200$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 60$, $S^{(3)} = 120$, для штрихової – $K = 140$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 40$, $S^{(3)} = 100$, для штрихпунктирної – $K = 200$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 80$, $S^{(3)} = 100$.

Бачимо, що зміна частоти коливань істотно впливає на амплітуду прогину пластини та на форму коливань. У випадку нижчих частот коливань зміна амплітуди прогину пластини відбувається більшою мірою в зоні дії навантаження. Для вищих значень частот амплітуда прогину пластини істотно змінюється на всій області.

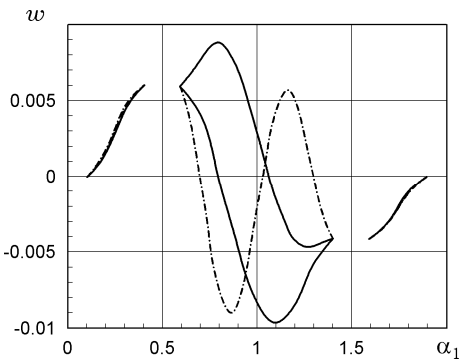


Рис. 4

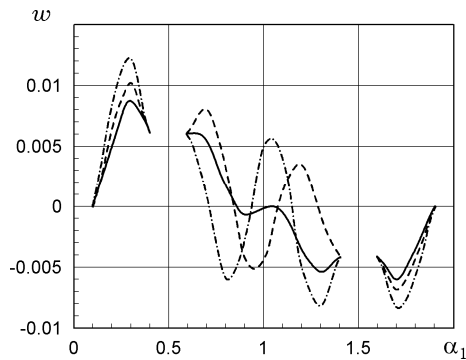


Рис. 5

Висновки. Побудовано розв'язок задачі про усталені поперечні коливання ортотропної пластини з множиною підкріплених отворів за дії довільного гармонічного в часі розподіленого навантаження на поверхні. Використано систему диференціальних рівнянь в межах теорії пластин, яка враховує деформацію поперечного зсуву і всі інерційні компоненти. На контурах отворів і на зовнішній межі пластини, які в загальному випадку мають довільну форму, задано прогин та кути повороту нормалі до серединної поверхні. Задачу розв'язано непрямим методом граничних елементів з використанням послідовнісного подання функцій Гріна та методу рядів Фур'є. Систему інтегральних рівнянь розв'язано за допомогою методу колокацій, внаслідок чого задачу зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Наведено тестові числові результати для часткових випадків задачі, коли контури отворів і зовнішня границя пластини мають форму супереліпса, а зовнішнє навантаження є рівномірно розподіленим і діє на деяку прямокутну ділянку на поверхні пластини. Розглянуті часткові випадки підтверджують ефективність числової схеми. Також можна зробити висновок, що прогин пластини істотно залежить від розмірів, розміщення отворів, частоти усталених коливань, зовнішнього навантаження, фізичних характеристик матеріалу. Отримані результати дозволяють оптимально вибирати фізичні характеристики матеріалу, розміри та розміщення отворів для ефективної роботи конструкцій у динамічному режимі.

1. Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: Інтелект-Захід, 2007. – 240 с.
2. Курпа Л. В., Ткаченко В. В. Розв'язання задач стійкості шаруватих пластин з отворами за допомогою методу R -функцій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 2. – С. 100–112.
Te same: Kurpa L. V., Tkachenko V. V. Solution of the problems of stability of laminated plates with holes by the method of R -functions // J. Math. Sci. – 2021. – **253**, No. 1. – P. 108–121. – <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05216-6>.
3. Шопя Т. В. Поперечні коливання ортотропної пластини з множиною отворів довільної конфігурації та мішаними крайовими умовами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2018. – **54**, № 3. – С. 73–80.
Te same: Shopya T. V. Transverse vibration of an orthotropic plate with a collection of holes of arbitrary configuration and mixed boundary conditions // Mater. Sci. – 2018. – **54**, No. 3. – P. 368–377.
– <https://doi.org/10.1007/s11003-018-0194-z>.
4. Aidi B., Shaat M., Abdelkefi A., Case S. W. Free vibration analysis of cantilever open-hole composite plates // Meccanica. – 2017. – **52**, No. 11. – P. 2819–2836.
5. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. Dynamical instability of laminated plates with external cutout // Int. J. Non-Linear Mech. – 2016. – **81**. – P. 103–114.
– <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2016.01.002>.
6. Boay Ch. G. Free vibration of laminated composite plates with a central circular hole // Compos. Struct. – 1996. – **35**, No. 4. – P. 357–368.
– [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(96\)00037-2](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(96)00037-2).
7. Kwak M. K., Han S. Free vibration analysis of rectangular plate with a hole by means of independent coordinate coupling method // J. Sound Vib. – 2007. – **306**, No. 1-2. – P. 12–30. – <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.05.041>
8. Lee W. M., Chen J. T., Lee Y. T. Free vibration analysis of circular plates with multiple circular holes using indirect BIEMs // J. Sound Vib. – 2007. – **304**, No. 3-5. – P. 811–830.
9. Merneed A., Nalluri M. R., Vissakodeti V. S. R. Free vibration analysis of an elliptical plate with cut-out // J. Vibroengineering. – 2017. – **19**, No. 4. – P. 2341–2353.
10. Sakiyama T., Huang M., Matsuda H., Morita C. Free vibration of orthotropic square plates with a square hole // J. Sound Vib. – 2003. – **259**, No. 1. – P. 63–80.
11. Shufrin I., Eisenberger M. Semi-analytical modeling of cutouts in rectangular plates with variable thickness – Free vibration analysis // App. Math. Mod. – 2016. – **40**, No. 15-16. – P. 6983–7000.
12. Torabi K., Azadi A. R. Vibration analysis for rectangular plate having a circular central hole with point support by Rayleigh-Ritz method // J. Solid Mech. – 2014. – **6**, No. 1. – P. 28–42.

13. Wang G., Li W., Feng Z., Ni J. A unified approach for predicting the free vibration of an elastically restrained plate with arbitrary holes // Int. J. Mech. Sci. – 2019. – 159. – P. 267–277. – <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.06.003>.

TRANSVERSE VIBRATION OF ORTHOTROPIC PLATE OF ARBITRARY SHAPE WITH A SET OF SUPPORTED CUTOUTS OF ARBITRARY CONFIGURATION TAKING INTO ACCOUNT DISTRIBUTED LOAD ON THE SURFACE

The problem of steady-state transverse vibrations of an orthotropic plate of arbitrary shape with a set of supported cutouts of arbitrary configuration under the harmonic in time distributed arbitrary load on the surface is solved. Equations of the refined plate theory that take into account transverse shear deformation and all inertial components are used. The solution is based on the indirect boundary elements method. Numerical results when contours of the cutouts and outer boundary of the plate have the shape of superellipse are presented.

Key words: *vibrations, orthotropic plate, cutouts, superellipse, distributed load, indirect boundary elements method.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
03.04.21