

ВИЗНАЧЕННЯ СТАТИЧНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ПЛИТИ, ЦИЛІНДРА І КУЛІ

Розроблено методичку визначення статичного термопружного стану у багатошарових тілах канонічної форми з урахуванням теплового випромінювання, конвективного теплообміну і довільних температурних залежностей фізико-механічних характеристик матеріалу за дії поверхневих та об'ємних джерел тепла. Для розв'язування відповідних задач теплопровідності і пружності з кусково-сталими характеристиками використовуються перетворення Кірхгофа, ітераційний метод Ньютона, узагальнені функції і функції Гріна. Наведено результати числових досліджень.

Ключові слова: термочутливі плита, циліндр, куля, теплове випромінювання, термопружний стан, перетворення Кірхгофа, ітераційний метод Ньютона, функції Гріна, узагальнені функції.

Урахування температурних залежностей фізико-механічних характеристик (ФМХ) у математичних моделях, які описують термопружний стан конструктивних елементів, що зазнають істотних перепадів температур призводить, як відомо, до необхідності розв'язання нелінійних задач теплопровідності та задач для рівнянь термопружності із залежними від координат коефіцієнтами. Серед методів їх розв'язування чільне місце займають аналітично-числові, зокрема, ті, які при визначенні температурних полів ґрунтуються на використанні перетворення Кірхгофа. Найчастіше ці методи застосовують до задач з лінійними [1–3, 5, 6, 8–10, 15, 16], квадратичними [3, 4, 9] та кубічними [9, 13] температурними залежностями коефіцієнтів теплопровідності. У [7, 15] для розв'язання відповідних задач запропоновано використовувати апроксимацію ФМХ кусково-сталими функціями температури.

Без застосування перетворення Кірхгофа задачі теплопровідності при заданні на поверхнях першого та останнього шарів відповідно теплового потоку і температури для довільних температурних залежностей коефіцієнтів теплопровідності зведено у [13] до розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

У цій роботі підходи [4–6, 13, 15] розвинуто та узагальнено на задачі визначення статичного термопружного стану багатошарових тіл канонічної форми із джерелами тепла за лінійних та нелінійних граничних умов і довільного характеру температурних залежностей ФМХ шарів, товщини яких можуть істотно відрізнятися.

Знаходження температурних полів передбачає побудову з використанням перетворення Кірхгофа, узагальнених функцій, функцій Гріна та ітераційного методу Ньютона розв'язків задач теплопровідності за граничних умов першого роду на одній із обмежувальних поверхонь і другого роду – на протилежній і довільного характеру залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури; зведення за допомогою цих розв'язків вихідних задач до розв'язання одного нелінійного алгебричного рівняння.

Для визначення термопружного стану плити використовуємо розв'язок задачі термопружності в напруженнях, у якій граничні умови на циліндричній поверхні задовольняються інтегрально.

Розподіли переміщень, деформацій і напружень в ізотропних циліндрах і кулі описуємо співвідношеннями, поданими в уніфікованій формі. Їх отримуємо з аналітичних розв'язків систем інтегро-алгебричних рівнянь (відносно переміщень) задач термопружності для кусково-неоднорідних

✉dept19@iapmm.lviv.ua

анізотропних циліндра [11] і кулі [12], які знайдено методом послідовних наближень, обмеженим лише першим наближенням. За нульове наближення вибираємо точні розв'язки задач термопружності для відповідних багатошарових тіл зі сталими модулями пружності і коефіцієнтами Пуассона та заданими температурними залежностями коефіцієнтів лінійного розширення.

1. Формулювання і розв'язання задач теплопровідності. Нехай обмежувальні поверхні багатошарових плити ($k = 0$), циліндра ($k = 1$) і кулі ($k = 2$), що займають області $\tilde{x}_0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_n, i = 1, 2, \dots, n$, n – кількість шарів, підтримуються при температурах t_c^-, t_c^+ або нагріваються шляхом конвективного теплообміну із середовищами температури t_{c0}, t_{cn} і тепловими потоками густини q_0, q_n відповідно. У шарах, які ідеально контактують, діють внутрішні джерела тепла густини $w_0^{(i)} w_t^{(i)}(\tilde{x})$, а на поверхнях поділу $\tilde{x} = \tilde{x}_j, j = 1, 2, \dots, n-1$, – теплові потоки густини q_j . Одночасно з обмежувальних поверхонь відводяться теплові потоки власного випромінювання за законом Стефана – Больцмана. Визначимо стаціонарні температурні поля таких тіл з урахуванням температурних залежностей коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_t^{(i)}(T_i) = \lambda_0^{(i)} \Lambda_i(T_i)$ матеріалів шарів, тепловіддачі $\alpha_0(T_1) = \tilde{\alpha}_0 \alpha_0^*(T_1), \alpha_n(T_n) = \tilde{\alpha}_n \alpha_n^*(T_n)$ і ступенів чорноти поверхонь $\varepsilon_0(T_1) = \tilde{\varepsilon}_0 \varepsilon_0^*(T_1), \varepsilon_n(T_n) = \tilde{\varepsilon}_n \varepsilon_n^*(T_n)$. Тут множники біля функцій мають розмірності відповідних величин.

За прийнятих припущень до математичної моделі належатимуть записані у безрозмірних величинах

– *рівняння теплопровідності:*

$$\frac{1}{x^k} \frac{d}{dx} \left[x^k \bar{\Lambda}_i(\bar{T}_i) \frac{\lambda_0^{(i)}}{\lambda_0^{(1)}} \frac{d\bar{T}_i}{dx} \right] = -\text{Po}_i \bar{w}_t^{(i)}(x), \quad k = 0, 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

– *умови контакту між шарами:*

$$\bar{\Lambda}_{j+1}(\bar{T}_{j+1}) \frac{\lambda_0^{(j+1)}}{\lambda_0^{(1)}} \frac{d\bar{T}_{j+1}}{dx} - \bar{\Lambda}_j(\bar{T}_j) \frac{\lambda_0^{(j)}}{\lambda_0^{(1)}} \frac{d\bar{T}_j}{dx} = -\text{Ki}_j, \\ \bar{T}_{j+1} = \bar{T}_j, \quad x = x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2)$$

– *умови на поверхні $x = x_0$:*

$$\bar{T}_1|_{x=x_0} = \bar{t}_c^- \quad (3)$$

або

$$\left(\bar{\Lambda}_1(\bar{T}_1) \frac{d\bar{T}_1}{dx} - \text{Bi}_0 \bar{\alpha}_0(\bar{T}_1)(\bar{T}_1 - \bar{t}_{c0}) - \text{Sk}_0 \bar{\varepsilon}_0(\bar{T}_1) \bar{T}_1^4 \right) \Big|_{x=x_0} = -\text{Ki}_0, \quad (4)$$

– *умови на поверхні $x = x_n$:*

$$\bar{T}_n|_{x=x_n} = \bar{t}_c^+ \quad (5)$$

або

$$\left(\bar{\Lambda}_n(\bar{T}_n) \frac{d\bar{T}_n}{dx} + \text{Bi}_n \bar{\alpha}_n(\bar{T}_n)(\bar{T}_n - \bar{t}_{cn}) + \text{Sk}_n \bar{\varepsilon}_n(\bar{T}_n) \bar{T}_n^4 \right) \Big|_{x=x_n} = \text{Ki}_n, \quad (6)$$

а також інші варіанти граничних умов, які можна отримати, комбінуючи значення $\text{Bi}_p = 0, \text{Sk}_p = 0, p = 0, n$.

$$\begin{aligned} \text{Тут } \bar{T}_i &= \frac{T_i}{T_s}, \quad x = \frac{\tilde{x}}{\ell}, \quad x_j = \frac{\tilde{x}_j}{\ell}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad \text{Po}_i = \frac{\ell^2 w_0^{(i)}}{\lambda_0^{(1)} T_s}, \quad \text{Bi}_0 = \frac{\ell \tilde{\alpha}_0}{\lambda_0^{(1)}}, \\ \text{Bi}_n &= \frac{\ell \tilde{\alpha}_n}{\lambda_0^{(n)}}, \quad \text{Sk}_0 = \frac{\ell \tilde{\varepsilon}_0 \sigma_0}{\lambda_0^{(1)} T_s^3}, \quad \text{Sk}_n = \frac{\ell \tilde{\varepsilon}_n \sigma_0}{\lambda_0^{(n)} T_s^3}, \quad \text{Ki}_0 = \frac{\ell q_0}{\lambda_0^{(1)} T_s}, \quad \text{Ki}_n = \frac{\ell q_n}{\lambda_0^{(n)} T_s}, \\ [\bar{\Lambda}_i(\bar{T}), \bar{\alpha}_p(\bar{T}), \bar{\varepsilon}_p(\bar{T})] &= [\Lambda_i(T), \alpha_p^*(T), \varepsilon_p^*(T)] \Big|_{T=T_s \bar{T}}, \quad p = 0, n, \quad \bar{w}_t^{(i)}(x) = w_t^{(i)}(x\ell), \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{Ki}_j &= \frac{\ell q_j}{\lambda_0^{(1)} T_s}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad \bar{t}_{cp} = \frac{t_{cp}}{T_s}, \quad \bar{t}_c^\pm = \frac{t_c^\pm}{T_s}, \quad \sigma_0 - \text{ стала} \end{aligned}$$

Стефана – Больцмана; T_s – характерна для задачі температура; ℓ – параметр, який має розмірність одиниці довжини.

Температурні поля залежно від варіанту граничних умов визначатимемо за допомогою знайдених нижче аналітичних розв'язків двох задач.

Задача 1. Знайдемо розподіли температур

$$\bar{T}_i = \bar{T}_i^{(k)}(x, \text{Ki}_0^{*(k)}, T_{cn}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

які задовольняють рівняння (1), умови контакту (2) і граничні умови

$$\left[\bar{\Lambda}_1(\bar{T}_1) \frac{d\bar{T}_1^{(k)}}{dx} \right]_{x=x_0} = -\text{Ki}_0^{*(k)}, \quad (8)$$

$$\bar{T}_n^{(k)} \Big|_{x=x_n} = T_{cn}^{(k)}, \quad (9)$$

де $\text{Ki}_0^{*(k)}$ і $T_{cn}^{(k)}$ – невідомі поки що значення безрозмірних потоку тепла і температури відповідно на поверхнях $x = x_0$ і $x = x_n$.

Використовуючи перетворення Кірхгофа

$$\theta_i^{(k)} = \int_{\bar{T}_*}^{\bar{T}_i^{(k)}} \bar{\Lambda}_i(\zeta) d\zeta, \quad (10)$$

відшукування таких розподілів температур зводимо до розв'язання задач стосовно змінних Кірхгофа, в які $\text{Ki}_0^{*(k)}$ і $T_{cn}^{(k)}$ входять як параметри:

$$\frac{1}{x^k} \frac{d}{dx} \left(x^k \frac{\lambda_0^{(i)}}{\lambda_0^{(1)}} \frac{d\theta_i^{(k)}(x)}{dx} \right) = -\text{Po}_i \bar{w}_t^{(i)}(x), \quad k = 0, 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\lambda_0^{(j+1)}}{\lambda_0^{(1)}} \frac{d\theta_{j+1}^{(k)}}{dx} - \frac{\lambda_0^{(j)}}{\lambda_0^{(1)}} \frac{d\theta_j^{(k)}}{dx} \right) \Big|_{x=x_j} = -\text{Ki}_j, \quad (12)$$

$$(\theta_{j+1}^{(k)} - \theta_j^{(k)}) \Big|_{x=x_j} = F_{j+1}^{(k)}, \quad x = x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (13)$$

$$\frac{d\theta_1^{(k)}}{dx} \Big|_{x=x_0} = -\text{Ki}_0^{*(k)}, \quad \theta^{(k)} \Big|_{x=x_n} = \theta_{cn}^{(k)}, \quad (14)$$

де

$$F_{j+1}^{(k)} = \int_{\bar{T}_*}^{\bar{T}_{j+1}^{(k)}(x_j, \text{Ki}_0^{*(k)}, T_{cn}^{(k)})} [\bar{\Lambda}_{j+1}(\zeta) - \bar{\Lambda}_j(\zeta)] d\zeta, \quad (15)$$

$$\theta_{cn}^{(k)} = \int_{\bar{T}_*}^{T_{cn}^{(k)}} \bar{\Lambda}_n(\zeta) d\zeta, \quad \bar{T}_* = \frac{T_*}{T_s}, \quad T_* - \text{нижня межа діапазону температур, в яко-$$

му змінюються теплофізичні характеристики.

Зазначимо, що в задачах (11)–(14) нелінійними є лише умови контакту (13).

Надалі, ввівши функції

$$\begin{aligned}\theta^{(k)}(x) &= \theta_1^{(k)}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} [\theta_{i+1}^{(k)}(x) - \theta_i^{(k)}(x)] S(x - x_i), \\ \lambda_0(x) &= \lambda_0^{(1)}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} [\lambda_0^{(i+1)}(x) - \lambda_0^{(i)}(x)] S(x - x_i), \\ \text{Po}(x) &= \text{Po}_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} [\text{Po}_{i+1}(x) - \text{Po}_i(x)] S(x - x_i), \\ \bar{w}_i(x) &= \bar{w}_i^{(1)}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{w}_i^{(i+1)}(x) - \bar{w}_i^{(i)}(x)] S(x - x_i),\end{aligned}\quad (16)$$

де $S(\zeta)$ – функція Гевісайда, для кожного значення k , $k = 0, 1, 2$, будемо розглядати еквівалентне системі рівнянь (11) та умовам контакту (12) і (13) одне рівняння з узагальненими похідними:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[x^k \frac{\lambda_0(x)}{\lambda_0^{(1)}} \frac{d\theta^{(k)}}{dx} \right] &= - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^k \text{Ki}_j \delta(x - x_j) + \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} F_{j+1}^{(k)} \frac{d}{dx} \left[\frac{\lambda_0(x)}{\lambda_0^{(1)}} x^k \delta(x - x_j) \right] - x^k \text{Po}(x) \bar{w}_i(x).\end{aligned}\quad (17)$$

Тут $\delta(\zeta)$ – функція Дірака. Задачі (17), (14) розв’язуємо з використанням функцій Гріна

$$G^{(k)}(x, \rho) = [f^{(k)}(x_n) - f^{(k)}(x)] S(x - \rho) + [f^{(k)}(x_n) - f^{(k)}(\rho)] S(\rho - x), \quad (18)$$

які є розв’язками задач

$$\frac{d}{dx} \left[x^k \frac{\lambda_0(x)}{\lambda_0^{(1)}} \frac{dG^{(k)}(x, \rho)}{dx} \right] = -\delta(x - \rho), \quad (19)$$

$$\left. \frac{dG^{(k)}(x, \rho)}{dx} \right|_{x=x_0} = 0, \quad G^{(k)}(x, \rho) \Big|_{x=x_n} = 0. \quad (20)$$

Тут

$$\begin{aligned}f^{(0)}(x) &= x + \sum_{j=1}^{n-1} H_j (x - x_j) S(x - x_j), \\ f^{(1)}(x) &= \ln x + \sum_{j=1}^{n-1} H_j \ln \frac{x}{x_j} S(x - x_j), \\ f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{n-1} H_j \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_j} \right) S(x - x_j), \\ H_j &= \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(j+1)}} - \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(j)}}.\end{aligned}$$

Домноживши обидві частини рівняння (17) на функцію $G^{(k)}(x, \rho)$, після перетворень одержуємо

$$\frac{d}{dx} \left[x^k G^{(k)}(x, \rho) \frac{\lambda_0(x)}{\lambda_0^{(1)}} \frac{d\theta^{(k)}}{dx} \right] - \frac{d}{dx} \left[x^k \frac{dG^{(k)}(x, \rho)}{dx} \frac{\lambda_0(x)}{\lambda_0^{(1)}} \theta^{(k)} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d}{dx} \left[x^k \frac{dG^{(k)}(x, \rho)}{dx} \frac{\lambda_0(x)}{\lambda_0^{(1)}} \right] \theta^{(k)} = \\
& = - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^k \text{Ki}_j G^{(k)}(x, \rho) \delta(x - x_j) + \\
& + \sum_{j=1}^{n-1} F_{j+1}^{(k)} \frac{d}{dx} \left[\frac{\lambda_0(x)}{\lambda_0^{(1)}} x^k G^{(k)}(x, \rho) \delta(x - x_j) \right] - \\
& - \sum_{j=1}^{n-1} F_{j+1}^{(k)} \frac{dG^{(k)}(x, \rho)}{dx} \frac{\lambda_0(x)}{\lambda_0^{(1)}} x^k \delta(x - x_j) - \\
& - x^k G^{(k)}(x, \rho) \text{Po}(x) \bar{w}_t(x). \tag{21}
\end{aligned}$$

Проінтегруємо рівняння (21) у межах від x_0 до x_n , враховуючи (19), граничні умови (12), (14) і (20), а також тотожність

$$x^k \frac{\lambda_0(x)}{\lambda_0^{(1)}} \frac{dG^{(k)}(x, \rho)}{dx} = -S(x - \rho).$$

Помінявши в отриманому співвідношенні місцями аргументи x і ρ , матимемо

$$\begin{aligned}
\theta^{(k)}(x) &= \theta_{cn}^{(k)} + x_0^k \text{Ki}_0^{*(k)} [f^{(k)}(x_n) - f^{(k)}(x)] + \sum_{j=1}^{n-1} x_j^k \text{Ki}_j G^{(k)}(x, \rho) \Big|_{\rho=x_j} - \\
& - \sum_{j=1}^{n-1} F_{j+1}^{(k)} S(x_j - x) + W^{(k)}(x), \tag{22}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
W^{(k)}(x) &= \int_{x_0}^{x_n} \rho^k G^{(k)}(x, \rho) \text{Po}(\rho) \bar{w}_t(\rho) d\rho = f^{(k)}(x_n) \int_{x_0}^{x_n} \rho^k \text{Po}(\rho) \bar{w}_t(\rho) d\rho - \\
& - f^{(k)}(x) \int_{x_0}^x \rho^k \text{Po}(\rho) \bar{w}_t(\rho) d\rho - \int_x^{x_n} \rho^k \text{Po}(\rho) \bar{w}_t(\rho) f^{(k)}(\rho) d\rho.
\end{aligned}$$

Змінні Кірхгофа в межах кожного з шарів $n, n-1, \dots, 1$ визначаємо за отриманими з (22) формулами:

$$\begin{aligned}
\theta_n^{(k)}(x) &= \theta_{cn}^{(k)} + x_0^k \text{Ki}_0^{*(k)} [f_n^{(k)}(x_n) - f_n^{(k)}(x)] + \\
& + \sum_{j=1}^{n-1} x_j^k \text{Ki}_j G_i^{(k)}(x, x_j) + W_n^{(k)}(x), \\
\theta_i^{(k)}(x) &= \theta_{cn}^{(k)} + x_0^k \text{Ki}_0^{*(k)} [f_n^{(k)}(x_n) - f_i^{(k)}(x)] + \sum_{j=1}^{n-1} x_j^k \text{Ki}_j G_i^{(k)}(x, x_j) - \\
& - \sum_{j=i}^{n-1} F_{j+1}^{(k)} + W_i^{(k)}(x), \quad i = n-1, n-2, \dots, 1, \tag{23}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
f_i^{(0)}(x) &= \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(i)}} x - \sum_{j=1}^{i-1} H_j x_j, & f_i^{(1)}(x) &= \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(i)}} \ln x - \sum_{j=1}^{i-1} H_j \ln x_j, \\
f_i^{(2)}(x) &= -\frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(i)}} \frac{1}{x} + \sum_{j=1}^{i-1} H_j \frac{1}{x_j}, \\
G_i^{(k)}(x, x_j) &= [f_j^{(k)}(x_j) - f_i^{(k)}(x)] S(x - x_j) + f_n^{(k)}(x_n) - f_j^{(k)}(x_j),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_n(T_{cn}^{(k)}) = & - \sum_{j=1}^{n-1} \text{Ki}_j \left(\frac{x_j}{x_0} \right)^k - \frac{1}{x_0^k} \sum_{i=1}^n \text{Po}_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho^k \bar{w}_t^{(i)}(\rho) d\rho + \\ & + \left(\frac{x_n}{x_0} \right)^k \frac{\lambda_0^{(n)}}{\lambda_0^{(1)}} [\text{Bi}_n \bar{\alpha}_n(T_{cn}^{(k)})(T_{cn}^{(k)} - \bar{t}_{cn}) + \\ & + \text{Sk}_n \bar{\varepsilon}_n(T_{cn}^{(k)})(T_{cn}^{(k)})^4 - \text{Ki}_n], \end{aligned}$$

$T_{cn}^{(k)}$ – корінь рівняння

$$\begin{aligned} & \left\{ \text{Ki}_0^{*(k)} + \text{Bi}_0 \bar{\alpha}_0(\bar{T}_1) \Big|_{\bar{T}_1 = \bar{T}_1^{(k)}(x_0, \text{Ki}_0^{*(k)}, T_{cn}^{(k)})} [\bar{T}_1^{(k)}(x_0, \text{Ki}_0^{*(k)}, T_{cn}^{(k)}) - \bar{t}_{c0}] + \right. \\ & \quad + \text{Sk}_0 \bar{\varepsilon}_0(\bar{T}_1) \Big|_{\bar{T}_1 = \bar{T}_1^{(k)}(x_0, \text{Ki}_0^{*(k)}, T_{cn}^{(k)})} \times \\ & \quad \left. \times [\bar{T}_1^{(k)}(x_0, \text{Ki}_0^{*(k)}, T_{cn}^{(k)})]^4 \right\} \Big|_{\text{Ki}_0^{*(k)} = \Phi_n(T_{cn}^{(k)})} - \text{Ki}_0 = 0, \quad (29) \end{aligned}$$

Корінь $T_{cn}^{(k)}$ знаходимо методом поділу відрізка наполовину. При цьому для кожного наближення $T_{cn}^{(k)}$ обчислюємо значення $\text{Ki}_0^{*(k)}$ за формулою (28), а $\bar{T}_1^{(k)}(x_0, \text{Ki}_0^{*(k)}, T_{cn}^{(k)})$ визначаємо з урахуванням (15), (24), (25), (27) та (23) при $i = 1$.

Задача 2. Якщо на поверхні $x = x_0$ задано температуру, а на поверхні $x = x_n$ – умову (6), або, якщо на поверхні $x = x_0$ задано умову (4), а на поверхні $x = x_n$ – тепловий потік $\text{Ki}_n^{*(k)}$, визначення відповідних температурних полів спроститься, якщо замість (7) шукати розподіли температур

$$\bar{T}_i^* = \bar{T}_i^{*(k)}(x, \text{Ki}_n^{*(k)}, T_{c0}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (30)$$

які задовольняють рівняння (1), умови контакту (2) і відмінні від (8), (9) граничні умови

$$\begin{aligned} \bar{T}_1^{*(k)} \Big|_{x=x_0} &= T_{c0}^{(k)}, \\ \left[\bar{\Lambda}_n(\bar{T}_n^{*(k)}) \frac{d\bar{T}_n^{*(k)}}{dx} \right] \Big|_{x=x_n} &= \text{Ki}_n^{*(k)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Розподіли температур $\bar{T}_i^{*(k)}$ (30) знаходимо за схемою визначення розподілів (7) у **задачі 1**.

Змінні Кірхгофа

$$\theta_i^{*(k)} = \int_{\bar{T}_*}^{\bar{T}_i^{*(k)}} \bar{\Lambda}_i(\zeta) d\zeta \quad (32)$$

визначаємо з рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x^k \frac{\lambda_0(x)}{\lambda_0^{(1)}} \frac{d\theta^{*(k)}}{dx} \right] &= - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^k \text{Ki}_j \delta(x - x_j) + \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} F_j^{*(k)} \frac{d}{dx} \left[\frac{\lambda_0(x)}{\lambda_0^{(1)}} x^k \delta(x - x_j) \right] - x^k \text{Po}(x) \bar{w}_t(x) \end{aligned} \quad (33)$$

і граничних умов

$$\theta^{*(k)} \Big|_{x=x_0} = \theta_{c0}^{*(k)}, \quad \frac{d\theta^{*(k)}}{dx} \Big|_{x=x_n} = \text{Ki}_n^{*(k)}. \quad (34)$$

Тут

$$F_j^{*(k)} = \int_{\bar{T}_*}^{\bar{T}_j^{*(k)}(x, \text{Ki}_n^{*(k)}, T_{c0}^{(k)})} [\bar{\Lambda}_{j+1}(\zeta) - \bar{\Lambda}_j(\zeta)] d\zeta, \quad \theta_{c0}^{*(k)} = \int_{\bar{T}_*}^{T_{c0}^{*(k)}} \bar{\Lambda}_1(\zeta) d\zeta. \quad (35)$$

Відповідні функції Гріна, які є розв'язками задач

$$\frac{d}{dx} \left[x^k \frac{\lambda_0(x)}{\lambda_0^{(1)}} \frac{dG^{(k)}(x, \rho)}{dx} \right] = -\delta(x - \rho), \quad (36)$$

$$G^{(k)}(x, \rho) \Big|_{x=x_0} = 0, \quad \frac{dG^{(k)}(x, \rho)}{dx} \Big|_{x=x_n} = 0, \quad (37)$$

матимуть вигляд

$$G^{(k)}(x, \rho) = [f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x_0)]S(\rho - x) + [f^{(k)}(\rho) - f^{(k)}(x_0)]S(x - \rho). \quad (38)$$

Після перетворень, аналогічних, як і в попередній задачі, але з урахуванням рівняння (36), тотожності

$$x^k \frac{\lambda_0(x)}{\lambda_0^{(1)}} \frac{dG^{(k)}(x, \rho)}{dx} = S(\rho - x),$$

і граничних умов (34), (37) матимемо

$$\begin{aligned} \theta^{*(k)}(x) = & x_n^k \text{Ki}_n^{*(k)} [f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x_0)] \frac{\lambda_0^{(n)}}{\lambda_0^{(1)}} + \theta_{c0}^{(k)} + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} x_j^k \text{Ki}_j G^{(k)}(x, \rho) \Big|_{\rho=x_j} + \sum_{j=1}^{n-1} F_j^{*(k)} S(x - x_j) + W^{(k)}(x), \end{aligned} \quad (39)$$

де

$$\begin{aligned} W^{(k)}(x) = & \int_{x_0}^{x_n} \rho^k G^{(k)}(x, \rho) \text{Po}(\rho) \bar{w}_t(\rho) d\rho = \\ = & [f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x_0)] \int_{x_0}^{x_n} \rho^k \text{Po}(\rho) \bar{w}_t(\rho) d\rho + \\ & + \int_{x_0}^x [f^{(k)}(\rho) - f^{(k)}(x)] \rho^k \text{Po}(\rho) \bar{w}_t(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Для визначення змінних Кірхгофа в кожному з шарів $1, 2, \dots, n$ отримаємо з рівності (39) такі формули:

$$\begin{aligned} \theta_1^{*(k)}(x) = & x_n^k \text{Ki}_n^{*(k)} [f_1^{(k)}(x) - f_1^{(k)}(x_0)] \frac{\lambda_0^{(n)}}{\lambda_0^{(1)}} + \theta_{c0}^{*(k)} + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} x_j^k \text{Ki}_j G_1^{(k)}(x, x_j) + W_1^{(k)}(x), \\ \theta_i^{*(k)}(x) = & x_n^k \text{Ki}_n^{*(k)} [f_i^{(k)}(x) - f_1^{(k)}(x_0)] \frac{\lambda_0^{(n)}}{\lambda_0^{(1)}} + \theta_{c0}^{*(k)} + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} x_j^k \text{Ki}_j G_i^{(k)}(x, x_j) + \sum_{j=1}^{i-1} F_j^{*(k)} + W_i^{(k)}(x), \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (40)$$

де

$$G_i^{(k)}(x, x_j) = [f_j^{(k)}(x_j) - f_i^{(k)}(x)]S(x - x_j) + f_i^{(k)}(x) - f_1^{(k)}(x_0),$$

2. Визначення термопружного стану. Прийmemo, що розглядувані тіла вільні від силових навантажень, модулі пружності їхніх складових $E_p(T_p^{(k)})$, коефіцієнти Пуассона $\nu_p(T_p^{(k)})$ і лінійного розширення $\alpha_{tp}(T_p^{(k)})$ є функціями температури, а теплові деформації визначаються співвідношеннями

$$\Phi_{rp}^{(k)}(x) = \int_{T_*}^{T_p^{(k)}(x)} \alpha_{tp}(\zeta) d\zeta.$$

Температурні напруження у круглій **плиті** визначаємо за формулами, отриманими в [15]:

$$\sigma_p^{(0)} = \sigma_{rp}^{(0)} = \sigma_{\phi p}^{(0)} = E_p^{(0)}(z)[C_1 + zC_2 - \Phi_{rp}^{(0)}(z)], \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad (43)$$

де

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{d_1 a_{22} - d_2 a_{12}}{d_3}, & C_2 &= \frac{d_2 a_{11} - d_1 a_{12}}{d_3}, \\ a_{11} &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} E_i^{(0)}(z) dz, & a_{12} &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} z E_i^{(0)}(z) dz, \\ a_{22} &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} z^2 E_i^{(0)}(z) dz, & d_3 &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \\ d_1 &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} E_i^{(0)}(z) \Phi_{ri}^{(0)}(z) dz, & d_2 &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} z E_i^{(0)}(z) \Phi_{ri}^{(0)}(z) dz, \\ E_p^{(0)}(z) &= \frac{E_p(T_p^{(0)})}{1 - \nu_p(T_p^{(0)})}. \end{aligned}$$

Для визначення температурних напружень у **циліндрі** (із закріпленими торцями) і **кулі** використовуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_{rp}^{(k)} &= c_p^{(k)}(\rho) \left[\frac{du_p^{(k)}(\rho)}{d\rho} + k\nu_p^{*(k)}(\rho) \frac{u_p^{(k)}(\rho)}{\rho} \right] - c_p^{*(k)}(\rho) \Phi_{rp}^{(k)}(\rho), \\ \sigma_{\phi p}^{(k)} &= c_p^{(k)}(\rho) \left[\nu_p^{*(k)}(\rho) \frac{du_p^{(k)}(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1}{1 - \nu_p^{(k)}(\rho)} \right)^{k-1} \frac{u_p^{(k)}(\rho)}{\rho} \right] - c_i^{*(k)}(\rho) \Phi_{rp}^{(k)}(\rho), \end{aligned} \quad (44)$$

у яких віднесені до ℓ переміщення і відповідні їм деформації визначаємо за отриманими в [11, 12] формулами

$$\begin{aligned} u_p^{(k)}(\rho) &= \frac{u_{tp}^{(k)}(\rho)}{c_p^{(k)}(\rho)} + \frac{L_{1p}^{(k)} \phi_{2p}^{(k)}(\rho) + L_{2p}^{(k)} \phi_{1p}^{(k)}(\rho)}{4q_k^2 Q_k c_p^{(k)}(\rho)} + \frac{V_p^{(1k)}(\rho) + V_p^{(2k)}(\rho)}{2q_k c_p^{(k)}(\rho)} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_{up}^{(ik)}(\rho)}{c_p^{(k)}(\rho)} \bar{u}_i^{(k)}(r_i). \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_p^{(k)}(\rho)}{d\rho} &= \frac{\varepsilon_{tp}^{(k)}(\rho)}{c_p^{(k)}(\rho)} + \frac{L_{1p}^{(k)} \phi_{4p}^{(k)}(\rho) + L_{2p}^{(k)} \phi_{3p}^{(k)}(\rho)}{4q_k^2 Q_k c_p^{(k)}(\rho)} - \frac{kV_p^{(1k)}(\rho) - V_p^{(2k)}(\rho)}{2q_k \rho c_p^{(k)}(\rho)} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_{\varepsilon p}^{(ik)}(\rho)}{\rho c_p^{(k)}(\rho)} \bar{u}_i^{(k)}(r_i). \end{aligned} \quad (46)$$

Тут

$$c_p^{(k)}(\rho) = \frac{E_p^{(k)}(\rho)[1 - v_p^{(k)}(\rho)]}{[1 + v_p^{(k)}(\rho)][1 - 2v_p^{(k)}(\rho)]}, \quad c_p^{*(k)}(\rho) = \frac{E_p^{(k)}(\rho)}{1 - 2v_p^{(k)}(\rho)},$$

$$E_p^{(k)}(\rho) = E_p(\bar{T}_p^{(k)}(\rho)), \quad v_p^{(k)}(\rho) = v_p(\bar{T}_p^{(k)}(\rho)), \quad v_p^{*(k)}(\rho) = \frac{v_p^{(k)}(\rho)}{1 - v_p^{(k)}(\rho)},$$

$$u_{tp}^{(k)}(\rho) = \frac{R_{1p}^{(k)}\varphi_{2p}^{(k)}(\rho) - R_{2p}^{(k)}\varphi_{1p}^{(k)}(\rho)}{(k+1)Q_k} + \frac{1}{\rho^k} J_{tp}^{(k)}(\rho),$$

$$\varepsilon_{tp}^{(k)}(\rho) = \frac{R_{1p}^{(k)}\varphi_{4p}^{(k)}(\rho) - R_{2p}^{(k)}\varphi_{3p}^{(k)}(\rho)}{(k+1)Q_k} - \frac{k}{\rho^{k+1}} J_{tp}^{(k)}(\rho) + c_p^*(\rho)\Phi_{rp}^{(k)}(\rho),$$

$$R_{1p}^{(k)} = \sum_{j=1}^{p-1} M_{1j}^{(k)+} J_{tj}^{(k)}(r_j), \quad R_{2p}^{(k)} = \sum_{j=p}^n M_{2j}^{(k)-} J_{tj}^{(k)}(r_j) \frac{c_{0p}^{(k)}}{r_j^{2q_k} c_{0j}^{(k)}},$$

$$\Phi_{1p}^{(k)}(\rho) = M_{1p}^{(k)+} \rho + M_{1p}^{(k)-} \frac{\rho^{k+1}}{\rho^k}, \quad \Phi_{3p}^{(k)}(\rho) = M_{1s}^{(k)+} - kM_{1p}^{(k)-} \left(\frac{\rho^{p-1}}{\rho}\right)^{k+1},$$

$$\Phi_{2p}^{(k)}(\rho) = M_{2p}^{(k)+} \frac{1}{\rho^k} - M_{2p}^{(k)-} \frac{\rho}{r_p^{k+1}}, \quad \Phi_{4p}^{(k)}(\rho) = -kM_{2p}^{(k)+} \frac{1}{\rho^{k+1}} - M_{2p}^{(k)-} \frac{1}{r_p^{k+1}},$$

$$J_{tp}^{(k)}(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^k c_p^{*(k)}(r) \Phi_{rp}^{(k)}(r) dr, \quad p = 1, 2, \dots, n,$$

$$Q_k = \Phi_n^{(k1)}(r_n) + \beta_n^{(k)} \Phi_n^{(k0)}(r_n), \quad M_{11}^{(k)\pm} = 2q_k(q_k \mp \beta_1^{(k)}),$$

$$M_{1p}^{(k)\pm} = \Phi_{p-1}^{(k0)}(r_{p-1})(q_k \pm K_p^{(k)}) \pm \Phi_{p-1}^{(k1)}(r_{p-1})K_{cp}^{(k)},$$

$$\Phi_1^{(km)}(r) = q_k^m \left[q_k - \beta_1^{(k)} + (-1)^m (q_k + \beta_1^{(k)}) \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2q_k} \right],$$

$$\Phi_p^{(km)}(r) = \Phi_{p-1}^{(k0)}(r_{p-1})f_{p1}^{(km)}(r) + \Phi_{p-1}^{(k1)}(r_{p-1})f_{p2}^{(km)}(r),$$

$$f_{p1}^{(km)}(r) = \frac{1}{2q_k^{1-m}} \left[q_k + K_p^{(k)} + (-1)^m (q_k - K_p^{(k)}) \left(\frac{r_{p-1}}{r}\right)^{2q_k} \right],$$

$$f_{p2}^{(km)}(r) = \frac{K_{cp}^{(k)}}{2q_k^{1-m}} \left[1 - (-1)^m \left(\frac{r_{p-1}}{r}\right)^{2q_k} \right], \quad K_p^{(k)} = K_{cp}^{(k)}\beta_{p-1}^{(k)} - \beta_p^{(k)},$$

$$m = 0, 1, \quad p = 2, 3, \dots, n, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = 3/2,$$

$$M_{2p}^{(k)\pm} = \alpha_{np}^{(k2)} + \beta_n^{(k)} \alpha_{np}^{(k1)} \pm q_k (\alpha_{np}^{(k4)} + \beta_n^{(k)} \alpha_{np}^{(k3)}),$$

$$K_{cp}^{(k)} = \frac{c_{0,p-1}^{(k)}}{c_{0p}^{(k)}}, \quad \beta_p^{(1)} = v_{0p}^{*(k)}, \quad \beta_p^{(2)} = \frac{5v_{0p}^{(2)} - 1}{2(1 - v_{0p}^{(2)})},$$

$$c_{0p}^{(k)} = \frac{E_{0p}^{(k)}(1 - v_{0p}^{(k)})}{(1 + v_{0p}^{(k)})(1 - 2v_{0p}^{(k)})}, \quad v_{0p}^{*(k)} = \frac{v_{0p}^{(k)}}{1 - v_{0p}^{(k)}}, \quad p = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mathfrak{a}_{ii}^{(k1)} = \mathfrak{a}_{ii}^{(k4)} = 1, \quad \mathfrak{a}_{ii}^{(k2)} = \mathfrak{a}_{ii}^{(k3)} = 0,$$

$$\mathfrak{a}_{n,i}^{(k1)} = f_{n1}^{(k0)}(r_n)\mathfrak{a}_{n-1,i}^{(k1)} + f_{n2}^{(k0)}(r_n)\mathfrak{a}_{n-1,i}^{(k2)},$$

$$\mathfrak{a}_{n,i}^{(k2)} = f_{n1}^{(k1)}(r_n)\mathfrak{a}_{n-1,i}^{(k1)} + f_{n2}^{(k1)}(r_n)\mathfrak{a}_{n-1,i}^{(k2)},$$

$$\mathfrak{a}_{n,i}^{(k3)} = f_{n1}^{(k0)}(r_n)\mathfrak{a}_{n-1,i}^{(k3)} + f_{n2}^{(k0)}(r_n)\mathfrak{a}_{n-1,i}^{(k4)},$$

$$\mathfrak{a}_{n,i}^{(k4)} = f_{n1}^{(k1)}(r_n)\mathfrak{a}_{n-1,i}^{(k3)} + f_{n2}^{(k1)}(r_n)\mathfrak{a}_{n-1,i}^{(k4)}, \quad i = n, n-1, \dots, 1,$$

$$L_{1p}^{(k)} = H_{1p}^{(k)} + 4kq_k^2 \gamma_1^{(k)} r_0^k \bar{u}_1^{(k)}(r_0), \quad L_{2p}^{(k)} = H_{2p}^{(k)} - 2kq_k \gamma_n^{(k)} \bar{u}_n^{(k)}(r_n) \frac{c_{0p}^{(k)}}{r_n c_{0n}^{(k)}},$$

$$\gamma_1^{(k)} = [v_1^{*(k)}(r_0) - v_{01}^{*(k)}]c_1^{(k)}(r_0), \quad \gamma_n^{(k)} = [v_n^{*(k)}(r_n) - v_{0n}^{*(k)}]c_n^{(k)}(r_n),$$

$$H_{1p}^{(k)} = \sum_{j=1}^{p-1} r_j^k M_{1j}^{(k)+} V_j^{(1k)}(r_j) + \sum_{j=1}^p r_{j-1}^k M_{1j}^{(k)-} V_j^{(2k)}(r_{j-1}),$$

$$H_{2p}^{(k)} = \sum_{j=p+1}^n M_{2j}^{(k)+} V_j^{(2k)}(r_{j-1}) \frac{c_{0p}^{(k)}}{r_{j-1} c_{0j}^{(k)}} - \sum_{j=p}^n M_{2j}^{(k)-} V_j^{(1k)}(r_j) \frac{c_{0p}^{(k)}}{r_j c_{0j}^{(k)}},$$

$$g_{up}^{(ik)}(\rho) = \frac{2q_k r_i^k K_{11}^{(ik)} g_{2up}^{(ki)}(\rho) - g_{1up}^{(ki)}(\rho)}{4q_k^2 Q_k},$$

$$g_{\varepsilon p}^{(ik)}(\rho) = \frac{2q_k r_i^k K_{11}^{(ik)} g_{2\varepsilon p}^{(ki)}(\rho) - g_{1\varepsilon p}^{(ki)}(\rho)}{4q_k^2 Q_k},$$

$$g_{1up}^{(ik)}(\rho) = \begin{cases} b_{2p}^{(ik)} \varphi_{1p}^{(k)}(\rho) \frac{c_{0p}}{c_{0i}}, & p \leq i, \\ b_{1p}^{(ik)} \varphi_{2p}^{(k)}(\rho), & p > i, \end{cases}$$

$$g_{2up}^{(ik)}(\rho) = \begin{cases} -r_{i+1}^{-k-1} M_{2,i+1}^{(k)-} \varphi_{1p}^{(k)}(\rho) \frac{c_{0p}}{c_{0,i+1}}, & p < i+1, \\ M_{1,i+1}^{(k)+} \varphi_{2p}^{(k)}(\rho), & p \geq i+1, \end{cases}$$

$$g_{1\varepsilon p}^{(ik)}(\rho) = \begin{cases} b_{2p}^{(ik)} \varphi_{3p}^{(k)}(\rho) \frac{c_{0p}}{c_{0i}}, & p \leq i, \\ b_{1p}^{(ik)} \varphi_{4p}^{(k)}(\rho), & p > i, \end{cases}$$

$$g_{2\varepsilon p}^{(ik)}(\rho) = \begin{cases} -r_{i+1}^{-k-1} M_{2,i+1}^{(k)-} \varphi_{3p}^{(k)}(\rho) \frac{c_{0p}}{c_{0,i+1}}, & p < i+1, \\ M_{1,i+1}^{(k)+} \varphi_{4p}^{(k)}(\rho), & p \geq i+1, \end{cases}$$

$$b_{2p}^{(ik)} = \frac{1}{r_i} [m_{0i}^{(k)} m_{2i}^{(1k)} - (1 - K_{0c}^{(k,i+1)}) c_i^{(k)}(r_i) m_{2i}^{(2k)}], \quad K_{0c}^{(k,i+1)} = \frac{c_{0i}^{(k)}}{c_{0,i+1}^{(k)}},$$

$$b_{1p}^{(ik)} = r_i^k [m_{0i}^{(k)} m_{1i}^{(1k)} + (1 - K_{0c}^{(k,i+1)}) c_i^{(k)}(r_i) m_{1i}^{(2k)}],$$

$$m_{0i}^{(k)} = k [K_{11}^{(ik)} - K_{12}^{(ik)} + (v_{0,i+1}^{*(k)} - v_{0,i}^{*(k)} K_{0c}^{(k,i+1)}) c_i^{(k)}(r_i)],$$

$$\begin{aligned}
K_{11}^{(ik)} &= c_{i+1}^{(k)}(r_i) - c_i^{(k)}(r_i), & K_{12}^{(ik)} &= v_{i+1}^{*(k)}(r_i)c_{i+1}^{(k)}(r_i) - v_i^{*(k)}(r_i)c_i^{(k)}(r_i), \\
m_{1i}^{(1k)} &= M_{1i}^{(k)+} + M_{1i}^{(k)-} \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^{k+1}, & m_{1i}^{(2k)} &= M_{1i}^{(k)+} - kM_{1i}^{(k)-} \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^{k+1}, \\
m_{2i}^{(1k)} &= M_{2i}^{(k)+} - M_{2i}^{(k)-}, & m_{2i}^{(2k)} &= kM_{2i}^{(k)+} + M_{2i}^{(k)-}, \\
V_p^{(1k)}(\rho) &= c_p^{(1k)}(\rho)\bar{u}_p^{(k)}(\rho) - c_p^{(1k)}(r_{p-1})\bar{u}_p^{(k)}(r_{p-1}) \left(\frac{r_{p-1}}{\rho} \right)^k - \frac{1}{\rho^k} \int_{r_{p-1}}^{\rho} U_p^{(1k)}(r)r^k dr, \\
V_p^{(2k)}(\rho) &= -kc_p^{(2k)}(r_p)\bar{u}_p^{(k)}(r_p) \frac{\rho}{r_p} + kc_p^{(2k)}(\rho)\bar{u}_p^{(k)}(\rho) - \rho \int_{\rho}^{r_p} U_p^{(2k)}(r) \frac{1}{r} dr, \\
U_p^{(1k)}(r) &= c_p^{(1k)}(r) \left[\frac{d\bar{u}_p^{(k)}(r)}{dr} + k \frac{\bar{u}_p^{(k)}(r)}{r} \right], \\
U_p^{(2k)}(r) &= kc_p^{(2k)}(r) \left[-\frac{d\bar{u}_p^{(k)}(r)}{dr} + \frac{\bar{u}_p^{(k)}(r)}{r} \right], \\
c_p^{(1k)}(r) &= c_p^{*(k)}(r) \left(\frac{1}{1+v_p^{(k)}(r)} \right)^{2-k}, & c_p^{(2k)}(r) &= \frac{E_p^{(k)}(r)}{1+v_p^{(k)}(r)}.
\end{aligned}$$

Тут $\bar{u}_p^{(k)}(r)$ і $\frac{d\bar{u}_p^{(k)}(r)}{dr}$ – переміщення і деформації за сталих модулів пружності і коефіцієнтів Пуассона, для яких з (45), (46) маємо такі вирази:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_p^{(k)}(\rho) &= \frac{\bar{R}_{1p}^{(k)}\Phi_{2p}^{(k)}(\rho) - \bar{R}_{2p}^{(k)}\Phi_{1p}^{(k)}(\rho)}{(k+1)Q_k} + \frac{k_{0p}^{*(k)}}{\rho^k} J_{tp}^{(0k)}(\rho), \\
\frac{d\bar{u}_p^{(k)}(\rho)}{d\rho} &= \frac{\bar{R}_{1p}^{(k)}\Phi_{4p}^{(k)}(\rho) - \bar{R}_{2p}^{(k)}\Phi_{3p}^{(k)}(\rho)}{(k+1)Q_k} + k_{0p}^{*(k)} \left[-\frac{k}{\rho^{k+1}} J_{tp}^{(0k)}(\rho) + \Phi_{rp}^{(k)}(\rho) \right], \\
\bar{R}_{1p}^{(k)} &= \sum_{j=1}^{p-1} M_{1j}^{(k)+} k_{0j}^{*(k)} J_{tj}^{(0k)}(r_j) \frac{c_{0j}^{(k)}}{c_{0p}^{(k)}}, & \bar{R}_{2p}^{(k)} &= \sum_{j=p}^n M_{2j}^{(k)-} J_{tj}^{(0k)}(r_j) \frac{k_{0j}^{*(k)}}{r_j^{k+1}}, \\
J_{tp}^{(0k)}(\rho) &= \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^k \Phi_{rp}^{(k)}(r) dr, & k_{0p}^{*(k)} &= \frac{1+v_{0p}^{(k)}}{1-v_{0p}^{(k)}}.
\end{aligned}$$

Якщо виявиться, що точність обчислених переміщень, деформацій і напружень менша від заданої точності, тоді повторюємо процедуру їхніх обчислень за тими самими формулами (44)–(46), але тепер зі збільшеною кількістю шарів. Додаткові шари появляються в результаті поділу p -ї області на n_p частин, кожна з яких має модулі пружності, коефіцієнти Пуассона і лінійного розширення цієї ж області.

3. Приклади числових розрахунків.

I. Розглянуто *тришарові плити* з різними температурними залежностями коефіцієнта теплопровідності третього шару. За матеріали першого і другого шарів вибрано сплави ВК6 і ВК15, а третього – відповідно сплав ВК10 (*плита 1*), сплав Ti-6Al-4V (*плита 2*), кераміка ZrO_2 (*плита 3*), кераміка Si_3N_4 (*плита 4*) і метал SUS304 (*плита 5*). Досліджено температур-

ні поля, які описуються розв'язком (7) при $k = 0$, $n = 3$, $T_* = 273 \text{ K}$, $T_s = 1273 \text{ K}$, $Ki_0^{*(0)} = 0.3283$, $T_{cn}^{(0)} = 0.2301$, $\tilde{x}_0 = 0$, $\tilde{x}_1 = \frac{1}{3} \tilde{x}_3$, $\tilde{x}_2 = \frac{2}{3} \tilde{x}_3$, $\tilde{x}_3 = 0.01 \text{ м}$, з такими коефіцієнтами теплопровідності:

– для ВК6, ВК15, і ВК10 [14]

$$\lambda_t^{(1)}(T) = 58.618 \left[1 + a_0 e^{-0.4(9/100-5.2)^2} - b_0 e^{-0.275(9/100-2.29)^2} \right] [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})],$$

де $a_0 = 0.214454$, $b_0 = 0.4285714$, $\vartheta = T - T_*$,

$$\lambda_t^{(2)}(T) = 71.09(1 - 2.8984 \cdot 10^{-3} \vartheta + 6.1466 \cdot 10^{-6} \vartheta^2 - 6.1789 \cdot 10^{-9} \vartheta^3 + 2.2844 \cdot 10^{-12} \vartheta^4) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})],$$

$$\lambda_t^{(3)}(T) = 54.057(1 - 7.4218 \cdot 10^{-4} \vartheta - 7.7696 \cdot 10^{-5} \vartheta^2 + 1.718 \cdot 10^{-8} \vartheta^3 - 8.5704 \cdot 10^{-12} \vartheta^4) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})];$$

– для Ti-6Al-4V і ZrO₂ [18]

$$\lambda_t^{(3)}(T) = 5.741(1 + 2.961 \cdot 10^{-3} \vartheta) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})],$$

$$\lambda_t^{(3)}(T) = 1.776(1 + 1.539 \cdot 10^{-4} \vartheta + 6.5316 \cdot 10^{-8} \vartheta^2) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})];$$

– для Si₃N₄ і SUS304 [17]

$$\lambda_t^{(3)}(T) = 10.394(1 - 9.9187 \cdot 10^{-4} \vartheta + 6.365 \cdot 10^{-7} \vartheta^2 - 1.04 \cdot 10^{-10} \vartheta^3) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})],$$

$$\lambda_t^{(3)}(T) = 12.244(1 - 3.558 \cdot 10^{-4} \vartheta + 1.884 \cdot 10^{-6} \vartheta^2 - 9.072 \cdot 10^{-10} \vartheta^3) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})].$$

Для плит, у яких температурна залежність коефіцієнта теплопровідності третього шару апроксимована поліномами не вище третього степеня

$$\tilde{\Lambda}(\bar{\vartheta}) = 1 + \bar{\beta}_1 \bar{\vartheta} + \bar{\beta}_2 \bar{\vartheta}^2 + \bar{\beta}_3 \bar{\vartheta}^3, \quad \bar{\vartheta} = \bar{T} - \bar{T}_*,$$

температуру (для порівняння) визначаємо також з використанням точних розв'язків рівнянь, відповідних рівнянню (26). Зокрема, при $\beta_3 \neq 0$ після підстановки $\bar{\vartheta} = y - \bar{\beta}_2/(3\bar{\beta}_3)$ відносно нової змінної зводимо їх до таких:

$$y^4 + m y^2 + p y + q = 0, \quad (47)$$

де

$$m = 2 \left[\frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_3} \right)^2 \right], \quad p = \frac{4}{3} \frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\beta}_3} \left[\frac{2}{9} \left(\frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\beta}_3} \right)^2 - \frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_3} \right] + \frac{4}{\bar{\beta}_3},$$

$$q = \frac{1}{9} \left(\frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\beta}_3} \right)^2 \left[\frac{2\bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\beta}_3} \right)^2 \right] - \frac{4}{\bar{\beta}_3} \left(\frac{\bar{\beta}_2}{3\bar{\beta}_3} + \theta_3(x) \right).$$

Корені рівняння (47) знаходимо [13] серед коренів рівнянь

$$y^2 \pm \sqrt{\chi} y + \frac{m + \chi + s}{2} = 0,$$

$$y^2 \pm \sqrt{\chi} y + \frac{m + \chi - s}{2} = 0,$$

де $s = \sqrt{(m + \chi)^2 - 4q}$, χ – невід'ємний корінь кубічного рівняння

$$\chi^3 + 2m\chi^2 + (m^2 - 4q)\chi - p^2 = 0,$$

який визначали за формулою Кардано

$$\chi = \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} + \sqrt{\tilde{Q}}} + \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} - \sqrt{\tilde{Q}}} - \frac{2}{3}m. \quad (48)$$

Тут

$$\tilde{Q} = \left(\frac{\tilde{p}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\tilde{q}}{2}\right)^2, \quad \tilde{p} = -\frac{1}{3}m^2 - 4q, \quad \tilde{q} = -\frac{2}{27}m^3 + \frac{8}{3}qm - p^2.$$

Якщо $\bar{\beta}_3 = 0$ (квадратична залежність), то потрібний корінь відповідного кубічного рівняння знаходили за такою формулою Кардано:

$$\bar{\vartheta} = \sqrt[3]{-\frac{q^*}{2} + \sqrt{Q^*}} + \sqrt[3]{-\frac{q^*}{2} - \sqrt{Q^*}} - \frac{\bar{\beta}_1}{2\beta_2}, \quad (49)$$

де

$$Q^* = \left(\frac{p^*}{3}\right)^3 + \left(\frac{q^*}{2}\right)^2, \quad p^* = \frac{3}{\beta_2} - \frac{3}{4}\left(\frac{\bar{\beta}_1}{\beta_2}\right)^2, \quad q^* = \frac{1}{4}\left(\frac{\bar{\beta}_1}{\beta_2}\right)^3 - \frac{3}{2}\frac{\bar{\beta}_1}{\beta_2} - \frac{3}{\beta_2}\theta_3(x).$$

Якщо $\bar{\beta}_2^{(i)} = 0$, $\bar{\beta}_3^{(i)} = 0$ (лінійна залежність), то

$$\bar{\vartheta} = \frac{\sqrt{1 + 2\bar{\beta}_1\theta_3(x)} - 1}{\bar{\beta}_1}. \quad (50)$$

Порівняльний аналіз температур у третьому шарі, обчислених з використанням методу Ньютона при 30-ти ітераціях і за точними розв'язками (48)–(50), показав, що вони відрізняються щонайбільше двома останніми значущими цифрами. При використанні розв'язків Кардано (48), (49) необхідно було враховувати для кожного значення $x = x_{3j}$ знак відповідних підкореневих виразів. З огляду на це, у *платі 5* формули для коренів рівняння (48) для значень $x_{3j} = x_2 + (j-1)\frac{x_3 - x_2}{4}$ при $j = 1, 2$ і при $j = 3, 4, 5$ були різні. Зазначимо, що у *платі 4*, де також кубічна температурна залежність коефіцієнта теплопровідності, корені рівняння (48) для всіх п'яти значень x_{3j} визначали за однією формулою.

Проведено також порівняння з температурами, обчисленими на основі відповідного розподілу температурного поля, яке описується розв'язком рекурентної системи інтегральних рівнянь Вольтерра [13]:

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_3(x) &= \bar{\vartheta}_{cn} + \text{Ki}_0 \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(3)}} \int_x^{x_3} \frac{1}{\tilde{\Lambda}_3(\bar{\vartheta}_3(\zeta))} d\zeta, \\ \bar{\vartheta}_2(x) &= \bar{\vartheta}_3(x_2) + \text{Ki}_0 \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(2)}} \int_x^{x_2} \frac{1}{\tilde{\Lambda}_2(\bar{\vartheta}_2(\zeta))} d\zeta, \\ \bar{\vartheta}_1(x) &= \bar{\vartheta}_2(x_1) + \text{Ki}_0 \int_x^{x_1} \frac{1}{\tilde{\Lambda}_1(\bar{\vartheta}_1(\zeta))} d\zeta, \end{aligned} \quad (51)$$

отриманих без застосування перетворення Кірхгофа. Розв'язок системи рівнянь (51) знаходили методом послідовних наближень. Інтеграли обчислювали з використанням формули трапецій з поділом кожного шару на 1600 частин. Кількість ітерацій не перевищувала 15-ти.

Крім того, з метою ілюстрації застосовності запропонованої методики у випадку задання температурних залежностей коефіцієнтів теплопровідності дискретними (табличними) значеннями розглядали апроксимації залежності

$\tilde{\Lambda}_1(\bar{\vartheta})$ лінійними сплайнами з рівномірно розташованими 11-ма і 21-ма вузлами (на рис. 1 суцільна крива відповідає заданій залежності $\tilde{\Lambda}_1(\bar{\vartheta})$, штрихова – сплайну з 11-ма вузлами):

$$\tilde{\Lambda}_1(\bar{\vartheta}) \approx s_1 \bar{\vartheta} + h_1 + \sum_{p=1}^{N_s-1} [(s_{p+1} - s_p) \bar{\vartheta} + h_{p+1} - h_p] S(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_p),$$

де

$$s_j = \frac{\tilde{\Lambda}_1(\bar{\vartheta}_j) - \tilde{\Lambda}_1(\bar{\vartheta}_{j-1})}{\bar{\vartheta}_j - \bar{\vartheta}_{j-1}}, \quad h_j = \tilde{\Lambda}_1(\bar{\vartheta}_{j-1}) - s_j \bar{\vartheta}_{j-1},$$

$\bar{\vartheta}_j$ – температури з діапазону $[\bar{T}_*, 1]$, $N_s = 10, 20$.

Для цієї залежності і її апроксимацій у рівнянні (26) відповідно маємо

$$\begin{aligned} \Psi_1(\bar{\vartheta}) = & \bar{\vartheta} + a_0 d_1 \left[\operatorname{erf} \left(\bar{\vartheta} \sqrt{a_1} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right) \right] - \\ & - b_0 d_2 \left[\operatorname{erf} \left(\bar{\vartheta} \sqrt{a_2} + \frac{b_2}{2\sqrt{a_2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{b_2}{2\sqrt{a_2}} \right) \right], \\ d_j = & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a_j}} \exp \left(c_j - \frac{b_j^2}{4a_j} \right), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(\bar{\vartheta}) \approx & \frac{s_1}{2} \bar{\vartheta}^2 + h_1 \bar{\vartheta} + \sum_{p=1}^{N_s-1} \left[\frac{s_{p+1} - s_p}{2} \bar{\vartheta}^2 + \right. \\ & \left. + (h_{p+1} - h_p) \bar{\vartheta} + \frac{s_{p+1} - s_p}{2} \bar{\vartheta}_p^2 \right] S(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_p). \end{aligned} \quad (53)$$

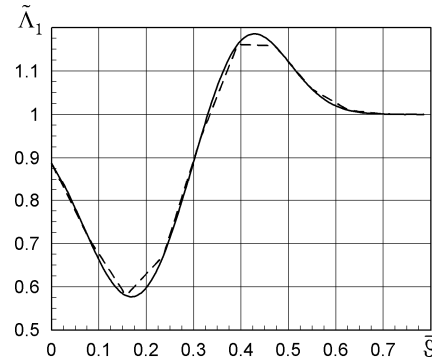


Рис. 1

Значення температури на поверхнях $x = 0, x_1/4, x_1/2, 3x_1/4, x_1$ першого шару плити 1 наведено у табл. 1.

Таблиця 1

x	Запропонована методика			З викорис- танням (51)
	з викорис- танням (52)	з викорис- танням (53), $N_s = 10$	з викорис- танням (53), $N_s = 20$	
0	0.68095934	0.68010031	0.68074456	0.68095938
$x_1/4$	0.64201194	0.64123680	0.64181598	0.64201198
$x_1/2$	0.60336321	0.60270337	0.60320513	0.60336325
$3x_1/4$	0.56538833	0.56500614	0.56528355	0.56538837
x_1	0.52856933	0.52827185	0.52850974	0.52856937

Дані, наведені в табл. 1, засвідчують високу точність температури, обчисленої з використанням запропонованої методики. Апроксимацією температурної залежності лінійним сплайном з густішою у два рази сіткою отримуємо уточнення у значеннях температури 3-ї ÷ 5-ї цифр після коми.

II. Досліджували вплив температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності і теплового випромінювання на тепловий і термомружний стан термочутливих **чотиришарових плити, циліндра і кулі** при $q_0 = 2.0 \cdot 10^6$ Вт/м², $q_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, $w_0^{(i)} = 0$, $\tilde{\alpha}_0 = 0$, $\alpha_n^*(T_n) = 1$, $\varepsilon_0^*(T_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}_n = 0$, $t_{cn} = T^*$, $T^* = 273$ К, $T_s = 1373$ К, $Bi_n = 3$.

За матеріали шарів вибрано кераміку ZnO₂ (*шар 1*), сплав Ti-6Al-4V (*шар 2*), кераміку Si₃N₄ (*шар 3*) і метал SUS304 (*шар 4*).

Геометричні параметри для плити: $x_0 = 0$, $\tilde{x}_1 = 0.32$ мм, $\tilde{x}_2 = 2.32$ мм, $\tilde{x}_3 = 3.32$ мм, $\tilde{x}_4 = 4.32$ мм; для циліндра і кулі: $x_0 = 10$ мм, $\tilde{x}_1 = 10.32$ мм, $\tilde{x}_2 = 12.32$ мм, $\tilde{x}_3 = 13.32$ мм, $\tilde{x}_4 = 14.32$ мм.

Температурні залежності коефіцієнтів теплопровідності наведено вище, а решта ФМХ є такими:

$$\begin{aligned} E_1(T) &= (132 - 50.3 \cdot 10^{-3} T - 8.1 \cdot 10^{-6} T^2) [\text{ГПа}], & v_1(T) &= 0.333, \\ \alpha_{t1}(T) &= 9.087 \cdot 10^{-6} (1 - 13.168 \cdot 10^{-4} T + 13.976 \cdot 10^{-7} T^2) [\text{К}^{-1}], \\ E_2(T) &= (122.7 - 0.056 T) [\text{ГПа}], & v_2(T) &= 0.2888 + 32 \cdot 10^{-6} T, \\ \alpha_{t2}(T) &= 8.747 \cdot 10^{-6} (1 + 46.771 \cdot 10^{-5} T - 3.075 \cdot 10^{-7} T^2) [\text{К}^{-1}], \\ E_3(T) &= (348.43 - 106.96801 \cdot 10^{-3} T + 752.6088 \cdot 10^{-7} T^2 - \\ &\quad - 311.7054 \cdot 10^{-10} T^3) [\text{ГПа}], & v_3(T) &= 0.24, \\ \alpha_{t3}(T) &= 7.33 \cdot 10^{-6} (1 + 72.859 \cdot 10^{-5} T) [\text{К}^{-1}], \\ E_4(T) &= 201.04 (1 + 3.079 \cdot 10^{-4} T - 6.534 \cdot 10^{-7} T^2) [\text{ГПа}], \\ v_4(T) &= 0.3263 - 65.26 \cdot 10^{-9} T + 12.39 \cdot 10^{-8} T^2, \\ \alpha_{t4}(T) &= 15.05 \cdot 10^{-6} (1 + 66.238 \cdot 10^{-5} T) [\text{К}^{-1}]. \end{aligned}$$

Значення $Ki_0^{*(k)}$ обчислювали за формулою (28), де тепер

$$\varphi_n(T_{cn}^{(k)}) = \left(\frac{x_n}{x_0} \right)^k \frac{\lambda_0^{(n)}}{\lambda_0^{(1)}} Bi_n(T_{cn}^{(k)} - \bar{t}_{cn}).$$

Значення $T_{cn}^{(k)}$ з точністю 10^{-8} знаходили методом поділу відрізка наполовину із рівняння

$$\left\{ Ki_0^{*(k)} + Sk_0 [\bar{T}_1^{(k)}(x_0, Ki_0^{*(k)}, T_{cn}^{(k)})]^4 \right\} \Big|_{Ki_0^{*(k)} = \varphi_n(T_{cn}^{(k)})} = Ki_0.$$

Зауважимо, що значення температури, обчислені при $Sk_0 = 0$ за сталих коефіцієнтів теплопровідності, і на основі точного розв'язку відповідних задач

$$\bar{T}_i^{(k)}(x) = Ki_0 \left(\frac{x_0}{x_n} \right)^k \left\{ \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(n)} Bi_n} + x_n^k [f_n^{(k)}(x_n) - f_i^{(k)}(x)] \right\} + \bar{t}_{cn}$$

були в межах цієї є ж точності.

Результати розрахунків наведено у вигляді графіків на рис. 2–9. Суцільним лініям відповідають температурозалежні, штриховим – сталі коефіцієнти теплопровідності, за які вибрано значення температурозалежних при $\bar{T} = \bar{T}_*$. Криві **1** побудовано з урахуванням теплового випромінювання ($Sk_0 = 1.1833$), криві **2** – без його врахування ($Sk_0 = 0$). З розподілів температур по товщині плити (рис. 2), циліндра (рис. 3) і кулі (рис. 4), зокрема, впливає, що за нехтування температурною залежністю коефіцієнтів теплопровідності і тепловим випромінюванням максимальні температури в 1.2÷1.5 рази вищі. При цьому радіальні напруження у других шарах циліндра (рис. 5) і кулі (рис. 6) можуть відрізнятись у 2 рази, а якісний характер поведінки радіальних напружень у плиті (рис. 7), кільцевих у циліндрі (рис. 8) та кулі (рис. 9) у перших шарах відрізняється від поведінки з урахуванням зазначених вище факторів.

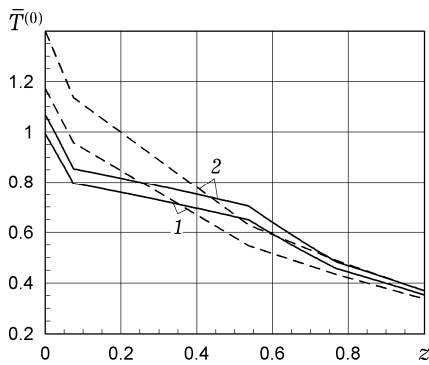


Рис. 2

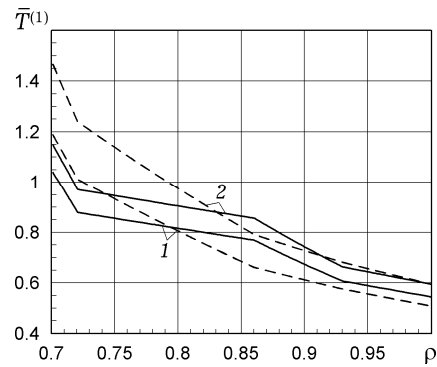


Рис. 3

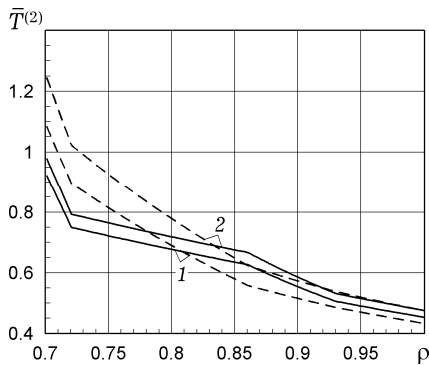


Рис. 4

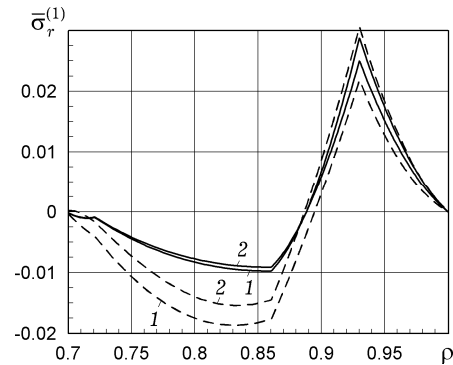


Рис. 5

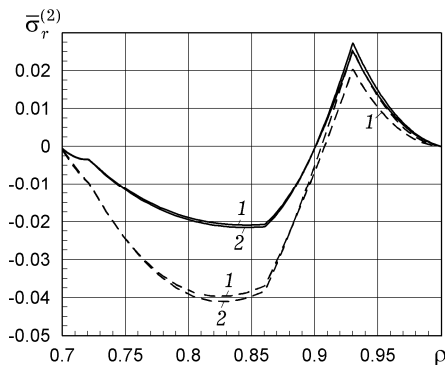


Рис. 6

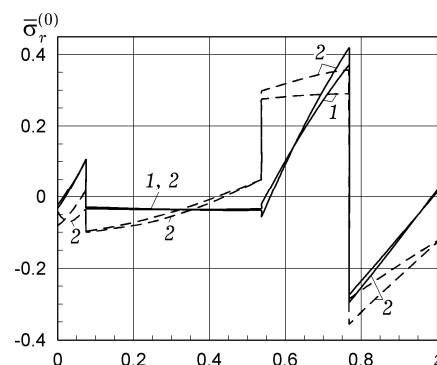


Рис. 7

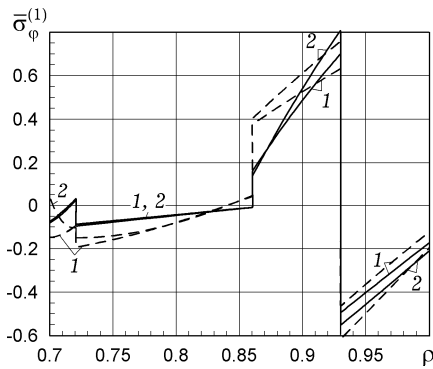


Рис. 8

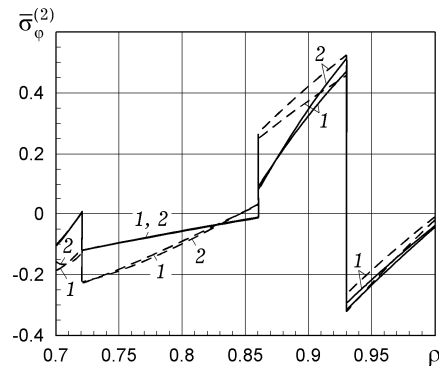


Рис. 9

Висновки. Числові дослідження засвідчили ефективність запропонованої методики визначення статичного термопружного стану багатошарових тіл канонічної форми, а також її застосовність до розв'язання статичних задач термопружності з температурними залежностями коефіцієнтів теплопровідності, заданими дискретними значеннями. Встановлено істотну відмінність у якісному і кількісному характері поведінки температурних напружень в окремих шарах з урахуванням температурних залежностей коефіцієнтів теплопровідності та теплового випромінювання і без такого врахування.

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проекту ВБ-460 (2020-2021) спільного конкурсу наукових проектів НАН України і НАН Білорусії.

1. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
2. Кушнір Р. М., Попович В. С. Про визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного нагрівання // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 42–47.
3. Кушнір Р. М., Попович В. С. Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Споллом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
4. Кушнір Р. М., Процюк Ю. Б. Термопружний стан шаруватих термочутливих тіл обертання за квадратичної залежності коефіцієнтів теплопровідності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 7–18.
 The same: Kushnir R. M., Protsyuk Yu. B. Thermoelastic state of layered thermosensitive bodies of revolution for the quadratic dependence of the heat-conduction coefficients // Mater Sci. – 2011. – **46**, No. 1. – P. 1–15.
 – <https://doi.org/10.1007/s11003-010-9258-4>.
5. Кушнір Р., Процюк Ю. Термопружний стан шаруватих термочутливих циліндрів і куль за конвективно-променевого теплообміну // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 103–112.
6. Кушнір Р., Процюк Ю. Температурні поля в шаруватих тілах канонічної форми за лінійної температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності // Машинознавство. – 2009. – № 1. – С. 13–18.
7. Махоркін І. М., Мастикаш Л. В. Про один аналітично-числовий спосіб розв'язування одновимірної квазістатичної задачі термопружності для термочутливого тіла простої геометрії // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 4. – С. 99–106.
 The same: Makhorkin I. M., Mastykash L. V. On one numerical-analytic method for the solution of one-dimensional quasistatic problems of thermoelasticity for thermosensitive bodies of simple geometry // J. Math. Sci. – 2018. – **228**, No. 2. – P. 122–132. – <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3610-2>.
8. Попович В. С., Калиняк Б. М. Математичне моделювання і методика визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 2. – С. 169–186.

- Те саме: Popovych V. S., Kalynyak B. M. Mathematical modeling and methods for the determination of the static thermoelastic state of multilayer thermally sensitive cylinders // J. Math. Sci. – 2016. – **215**, No. 2. – P. 218–242. – <https://doi.org/10.1007/s10958-016-2833-y>.
9. Постольник Ю. С., Огурцов А. П. Металургійна термомеханіка. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2002. – 633 с.
 10. Процюк Б. В. Моделювання та визначення з використанням побудованих функцій Гріна термопружного стану шаруватих тіл: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 2006. – 40 с.
 11. Процюк Б. В. Термопружний стан кусково-неоднорідного ортотропного термочутливого циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 3. – С. 57–73.
 12. Процюк Б. В. Термопружний стан кусково-неоднорідної термочутливої трансверсально-ізотропної кулі // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 71–80.
 13. Процюк Ю. Б. Статичні задачі термопружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 4. – С. 151–161.
Те саме: Protsyuk Yu. B. Static thermoelasticity problems for layered thermo-sensitive plates with cubic dependence of the coefficients of heat conductivity on temperature // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, No. 4. – P. 481–496. – <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0700-z>.
 14. Туманов В. И. Свойства сплавов системи карбид вольфрам-кобальт: Справ. Москва: Металлургия, 1971. – 96 с.
 15. Kushnir R., Protsiuk B. Determination of the thermal fields and stresses in multilayer solids by means of the constructed Green functions // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 924–931. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_608.
 16. Noda N. Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // In: Thermal Stresses I // In: R. B. Hetnarski (ed.). Thermal Stresses I. – Amsterdam: Elsevier, 1986. – P. 391–483.
 17. Reddy J. N., Chin C. D. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates // J. Therm. Stresses. – 1998. – **21**, No. 6. – P. 593–626. – <https://doi.org/10.1080/01495739808956165>.
 18. Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Therm. Stresses. – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102. – <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>.

DETERMINATION OF STATIC THERMOELASTIC STATE OF LAYERED THERMOSENSITIVE PLATE, CYLINDER AND SPHERE

A method for determination of the static thermoelastic state in an multilayer bodies of canonical form are developed, taking into account the thermal radiation, convective heat exchange and arbitrary temperature dependences of the physical and mechanical characteristics of material under the action of surface and volume heat sources. The Kirchhoff's transforms, Newton's iterative method, generalized functions and Green's functions are used for solution of the corresponding heat conduction and thermoelasticity problems with piecewise constant characteristics. The results of numerical investigations are presented.

Key words: *thermosensitive plate, cylinder, sphere, thermal radiation, thermoelastic state, Kirchhoff transformation, Newtonian iterative method, Green's functions, generalized functions.*