УДК 512.36

О. В. Гутік[✉], І. В. Позднякова

ПРО НАПІВГРУПУ, ПОРОДЖЕНУ РОЗШИРЕНОЮ БІЦИКЛІЧНОЮ НАПІВГРУПОЮ ТА ω-ЗАМКНЕНОЮ СІМ'ЄЮ

Введено поняття алгебраїчного розширення $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ розширеної біциклічної напівгрупи для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F}$ підмножин в ω. Доведено, що $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ є комбінаторною інверсною напівгрупою. Описано відношення Ґріна, природний частковий порядок на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ та її множину ідемпотентів. Знайдено критерії простоти, 0-простоти, біпростоти та 0-біпростоти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$, а також, коли напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна розширеній біциклічній напівгрупі або зліченній напівгрупі матричних одиниць. Доведено, що у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}$ складається з усіх одноточкових підмножин в ω та порожньої множини, напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ є ізоморфною до λ-розширенню Брандта напівгратки $(\omega, \min)$.

Ключові слова: *напівгрупа, розширена біциклічна напівгрупа, розширення.*

Вступ. У цій роботі будемо користуватися термінологією з [7, 8, 19, 22]. Множину цілих чисел позначатимемо через $\mathbb{Z}$, а множину невід'ємних цілих чисел – через ω. Для довільного $k \in \mathbb{Z}$ позначимо $[k) = \{i \in \mathbb{Z} : i \geq k\}$.

Підмножину A в ω називають *індуктивною*, якщо з того, що $i \in A$ випливає, що $i+1 \in A$. Очевидно, що $\varnothing$ – індуктивна множина в ω, і непорожня підмножина $A \subseteq \omega$ є індуктивною тоді й лише тоді, коли $A = [k)$ для деякого $k \in \omega$.

Якщо S – напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупу S називають *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ [1, 22]. В інверсній напівгрупі S означений вище елемент x^{-1} називають *інверсним до* x. *В'язка* – це напівгрупа ідемпотентів, а *напівгратка* – це комутативна в'язка.

Якщо S – напівгрупа, то через $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{H}$ і $\mathscr{J}$ позначатимемо відношення Ґріна на S (див. означення в [7, §2.1] або [13]). Напівгрупу S називають *простою*, якщо S не містить власних двобічних ідеалів, тобто S складається з одного $\mathscr{J}$-класу, і *біпростою*, якщо S складається з одного $\mathscr{D}$-класу.

Відношення еквівалентності ρ на напівгрупі S називають *конгруенцією*, якщо для елементів a та b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a,b) \in \rho$, випливає, що $(ca,cb),(ad,bd) \in \rho$ для довільних $c,d \in S$. Відношення $(a,b) \in \rho$ також будемо записувати як $a\rho b$, і в цьому випадку будемо говорити, що елементи a і b є ρ-*еквівалентними*.

Якщо S – напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок: $e \preceq f$ тоді й лише тоді, коли $ef = fe = e$. Так означений частковий порядок на $E(S)$ називають *природним*.

Означимо відношення $\preceq$ на інверсній напівгрупі S так: $s \preceq t$ тоді й лише тоді, коли $s = te$ для деякого ідемпотента $e \in S$. Так означений част-

[✉]ogutik@gmail.com

ковий порядок називають *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [1]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\leq$ на інверсній напівгрупі S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

Нехай λ − довільний ненульовий кардинал. Відображення α з підмножини $D \subseteq \lambda$ в кардинал λ називають *частковим перетворенням кардинала* λ. У цьому випадку множину D називають *областю визначення* часткового перетворення α і позначають через $\operatorname{dom}\alpha$. Образ елемента $x \in \operatorname{dom}\alpha$ стосовно α будемо позначати через $x\alpha$. Множину $\{x \in \lambda : y\alpha = x$ для деякого $y \in \lambda\}$ називають *областю значень* часткового перетворення α і позначають через $\operatorname{ran}\alpha$. Для зручності позначимо через $\varnothing$ порожнє перетворення, тобто часткове перетворення з $\operatorname{dom}\varnothing = \operatorname{ran}\varnothing = \varnothing$.

Нехай $\mathscr{I}_\lambda$ − множина всіх взаємно однозначних часткових перетворень кардинала λ разом із такою напівгруповою операцією:

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta, \quad \text{якщо} \quad x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha : y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\},$$

$$\alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda.$$

Напівгрупу $\mathscr{I}_\lambda$ називають *симетричною інверсною напівгрупою* (*симетричним інверсним моноїдом*) над кардиналом λ (див. [7]). Симетрична інверсна напівгрупа, введена В. В. Вагнером [1], відіграє важливу роль у теорії напівгруп.

Нагадаємо (див. [7, §1.12]), що *біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*) $\mathcal{C}(p,q)$ називають напівгрупу з одиницею, породжену двоелементною множиною $\{p,q\}$ і визначену одним співвідношенням $pq = 1$. Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Так, зокрема, класична теорема O. Andersen-а [4] стверджує, що (0-)проста напівгрупа з (ненульовим) ідемпотентом є цілком (0-)простою тоді й лише тоді, коли вона містить ізоморфну копію біциклічного моноїда. Різні розширення біциклічного моноїда вводилися раніше у працях [10−12, 26]. Такими є, зокрема, конструкція Брука та Брука − Рейлі занурення напівгруп у прості та опис інверсних біпростих і (0-)біпростих ω-напівгруп [6, 15, 23, 25].

Зауваження 1. Легко бачити, що біциклічний моноїд $\mathcal{C}(p,q)$ ізоморфний напівгрупі, заданій на множині $\boldsymbol{B}_\omega = \omega \times \omega$ з напівгруповою операцією

$$(i_1, j_1) \cdot (i_2, j_2) = (i_1 + i_2 - \min\{j_1, i_2\},\ j_1 + j_2 - \min\{j_1, i_2\}) =$$

$$= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2), & j_1 < i_2, \\ (i_1, j_2), & j_1 = i_2, \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2), & j_1 > i_2. \end{cases} \tag{1}$$

Множину $\boldsymbol{B}_\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ з напівгруповою операцією (1) називають розширеною біциклічною напівгрупою [27]. Очевидно, що $\boldsymbol{B}_\omega$ − піднапівгрупа напівгрупи $\boldsymbol{B}_\mathbb{Z}$.

Зауваження 2. Нехай α і β − часткові перетворення множини ω, які визначаються так:

$$\operatorname{dom}\alpha = \omega, \qquad \operatorname{ran}\alpha = \omega \setminus \{0\}, \qquad (n)\alpha = n + 1,$$

$$\operatorname{dom}\beta = \omega \setminus \{0\}, \qquad \operatorname{ran}\beta = \omega, \qquad (n)\beta = n.$$

Легко бачити, що біциклічний моноїд $\mathcal{C}(p,q)$ ізоморфний напівгрупі $\boldsymbol{B}_\omega$, яка породжена елементами α і β (див. [22, вправа IV.1.11 (***ii***)]).

Означення 1. Для довільних $i, j \in \mathbb{Z}$ означимо часткове перетворення $\alpha_j^i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ так:

$$\operatorname{dom} \alpha_j^i = [i), \qquad \operatorname{ran} \alpha_j^i = [j), \qquad (i+n)\alpha_j^i = j+n$$

для всіх $i + n \in \operatorname{dom} \alpha_j^i$.

Тоді множина $\boldsymbol{B}(\mathbb{Z}) = \{\alpha_j^i : i, j \in \mathbb{Z}\}$ стосовно операції композиції часткових перетворень множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ є інверсною напівгрупою (див. [10–12, 17]), а отже, є інверсною піднапівгрупою симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_\omega$. Напівгрупова операція на $\boldsymbol{B}(\mathbb{Z})$ визначається за формулою

$$\alpha_{j_1}^{i_1} \circ \alpha_{j_2}^{i_2} = \alpha_j^i, \quad i = i_1 + i_2 - \min\{j_1, i_2\}, \quad j = j_1 + j_2 - \min\{j_1, i_2\}$$

(див. [17, формула (1)]). Отже, виконується

Твердження 1. *Відображення* $h : \boldsymbol{B}(\mathbb{Z}) \to \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$, $\alpha_j^i \mapsto (i, j)$, *є ізоморфізмом.*

1. Конструкція напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$. Нехай $\mathscr{P}(\omega)$ – сім'я усіх підмножин ординала ω. Для довільних $F \in \mathscr{P}(\omega)$ та $n, m \in \mathbb{Z}$ покладемо $n - m + F = \{n - m + k : k \in F\}$, якщо $F \neq \varnothing$, і $n - m + F = \varnothing$ при $F = \varnothing$. Будемо говорити, що підсім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ є ω-*замкненою*, якщо $F_1 \cap (-n + F_2) \in \mathscr{F}$ для довільних $n \in \omega$ і $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$.

Нехай $\alpha_{j_1}^{i_1}$, $\alpha_{j_2}^{i_2}$ – довільні елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}(\mathbb{Z})$ та $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$ – довільні підмножини в $\operatorname{dom} \alpha_{j_1}^{i_1}$ і $\operatorname{dom} \alpha_{j_2}^{i_2}$, відповідно. Позначимо через $\alpha_{j_1}^{i_1}\big|_{\overline{F}_1}$ і $\alpha_{j_2}^{i_2}\big|_{\overline{F}_2}$ звуження часткових перетворень $\alpha_{j_1}^{i_1}$ і $\alpha_{j_2}^{i_2}$ на множини $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$, відповідно. Тоді з означення композиції часткових перетворень випливає, що

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom}\left(\alpha_{j_1}^{i_1}\big|_{\overline{F}_1} \circ \alpha_{j_2}^{i_2}\big|_{\overline{F}_2}\right) &= \operatorname{dom}\left(\alpha_{j_1}^{i_1}\big|_{\overline{F}_1}\right) \cap \left(\overline{F}_2\right)\left(\alpha_{j_1}^{i_1}\big|_{\overline{F}_1}\right)^{-1} = \\
&= \overline{F}_1 \cap \left(\overline{F}_2\right)\left(\alpha_{j_1}^{i_1}\big|_{\overline{F}_1}\right)^{-1} = \overline{F}_1 \cap \left(\overline{F}_2\right)\left(\alpha_{i_1}^{j_1}\big|_{(\overline{F}_1)\alpha_{j_1}^{i_1}}\right) = \\
&= \overline{F}_1 \cap \left(\left(\overline{F}_2\right)\alpha_{i_1}^{j_1} \cap \overline{F}_1\right) = \overline{F}_1 \cap \left(\overline{F}_2\right)\alpha_{i_1}^{j_1} = \overline{F}_1 \cap \left(\overline{F}_2\right)\left(\alpha_{j_1}^{i_1}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Оскільки $\overline{F}_1 \subseteq \operatorname{dom} \alpha_{j_1}^{i_1}$ і $\overline{F}_2 \subseteq \operatorname{dom} \alpha_{j_2}^{i_2}$, то існують $F_1, F_2 \in \mathscr{P}(\omega)$ такі, що $\overline{F}_1 = i_1 + F_1$ і $\overline{F}_2 = i_2 + F_2$. Тоді

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom}\left(\alpha_{j_1}^{i_1}\big|_{\overline{F}_1} \circ \alpha_{j_2}^{i_2}\big|_{\overline{F}_2}\right) &= \overline{F}_1 \cap \left(\overline{F}_2\right)\left(\alpha_{j_1}^{i_1}\right)^{-1} = (i_1 + F_1) \cap (i_2 + F_2)\left(\alpha_{j_1}^{i_1}\right)^{-1} = \\
&= \begin{cases} i_1 - j_1 + i_2 + \left((j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2\right), & j_1 < i_2, \\ i_1 + (F_1 \cap F_2), & j_1 = i_2, \\ i_1 + \left(F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2)\right), & j_1 > i_2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Нехай $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ – розширена біциклічна напівгрупа та $\mathscr{F}$ – ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. На множині $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \times \mathscr{F}$ означимо бінарну операцію «$\cdot$» за формулою

$$(i_1, j_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2) = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2), & j_1 < i_2, \\ (i_1, j_2, F_1 \cap F_2), & j_1 = i_2, \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2)), & j_1 > i_2. \end{cases} \quad (2)$$

Зауваження 3. Якщо $\boldsymbol{B}_\omega$ − біциклічний моноїд і $\mathcal{F}$ − ω-замкнена підсім'я в $\mathcal{P}(\omega)$, то на множині $\boldsymbol{B}_\omega \times \mathcal{F}$ бінарна операція (2) є асоціативною (див. [3], твердження 1).

Оскільки довільні три елементи $(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3)$ розширеної біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ містяться в її піднапівгрупі $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^k = \{(i, j) \in \boldsymbol{B}(\mathbb{Z}) : i, j \ge k\}$, де $k = \min\{i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3\}$, яка, за твердженням 2.11(***viii***) [9], ізоморфна біциклічному моноїду, то з твердження 1 в [3] випливає, що бінарна операція (2) на $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{F}$ є асоціативною, а отже, виконується

Твердження 2. *Якщо сім'я $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ є ω-замкненою, то $(\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{F}, \cdot)$ є напівгрупою.*

Припустимо, що ω-замкнена сім'я $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ містить порожню множину $\varnothing$. Тоді з означення напівгрупової операції в $(\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{F}, \cdot)$ випливає, що множина $I = \{(i, j, \varnothing) : i, j \in \mathbb{Z}\}$ є ідеалом напівгрупи $(\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{F}, \cdot)$.

Означення 2. Для довільної ω -замкненої сім'ї $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ означимо

$$\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}} = \begin{cases} (\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{F}, \cdot) / I, & \varnothing \in \mathcal{F}, \\ (\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{F}, \cdot), & \varnothing \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

Зауваження 4. Очевидно, що для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ напівгрупа $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathcal{F}}$, введена в [3], є інверсною піднапівгрупою в $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$.

У наступному параграфі, за аналогією з [3], вивчаються властивості алгебраїчного розширення $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ розширеної біциклічної напівгрупи для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathcal{F}$ підмножин в ω.

2. Алгебраїчні властивості напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$. Надалі будемо вважати, що $\mathcal{F}$ − ω-замкнена підсім'я в $\mathcal{P}(\omega)$.

Доведення тверджень наступної леми проводяться звичайною перевіркою, аналогічно відповідним твердженням в § 3 з [3].

Лема 1. *Нехай $\mathcal{F}$ − ω-замкнена підсім'я в $\mathcal{P}(\omega)$. Тоді:*

1°) *Напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ містить нуль **0** тоді й лише тоді, коли $\varnothing \in \mathcal{F}$, причому нуль **0** є образом ідеала I при природному гомоморфізмі, породженому конгруенцією Ріса $\mathcal{R}_I = \{(x, x) \in \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{F}\} \cup (I \times I)$ на напівгрупі $(\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{F}, \cdot)$.*

2°) *Ненульовий елемент (i, j, F) напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ є ідемпотентом тоді й лише тоді, коли $i = j$.*

3°) *Ідемпотенти в $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ комутують.*

4°) *Елементи (i, j, F) і (j, i, F) є інверсними в $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$.*

З теореми 1.17 [7] і тверджень ***3°*** і ***4°*** леми 1 випливає

Теорема 1. *Якщо $\mathcal{F}$ − ω-замкнена підсім'я в $\mathcal{P}(\omega)$, то $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ − інверсна напівгрупа.*

Наступне твердження описує природний частковий порядок на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$.

Твердження 3. *Нехай (i_1, j_1, F_1) і (i_2, j_2, F_2) − ненульові елементи на-*

півгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$. *Тоді* $(i_1, j_1, F_1) \preceq (i_2, j_2, F_2)$ *тоді й лише тоді, коли* $F_1 \subseteq -k + F_2$ *та* $i_1 - i_2 = j_1 - j_2 = k$ *для деякого* $k \in \omega$.

Д о в е д е н н я. ($\Leftarrow$) Якщо $F_1 \subseteq -k + F_2$ та $i_1 - i_2 = j_1 - j_2 = k$ для деякого $k \in \omega$, то

$$\begin{aligned}(i_1, j_1, F_1) \cdot (i_1, j_1, F_1)^{-1} \cdot (i_2, j_2, F_2) &= (i_1, j_1, F_1) \cdot (j_1, i_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2) = \\ &= (i_1, i_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2) = \left(i_1, i_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - i_1 + F_2)\right) = \\ &= \left(i_1, j_1 - j_2 + j_2, F_1 \cap (-k + F_2)\right) = \left(i_1, j_1, F_1 \cap (-k + F_2)\right) = \\ &= (i_1, j_1, F_1),\end{aligned}$$

і за лемою 1.4.6 в [19] отримуємо, що $(i_1, j_1, F_1) \preceq (i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$.

($\Rightarrow$) Припустимо, що $(i_1, j_1, F_1) \preceq (i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$. Згідно з лемою 1.4.6 [19]

$$\begin{aligned}(i_1, j_1, F_1) &= (i_1, j_1, F_1) \cdot (i_1, j_1, F_1)^{-1} \cdot (i_2, j_2, F_2) = \\ &= (i_1, j_1, F_1) \cdot (j_1, i_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2) = (i_1, i_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2) = \\ &= \begin{cases} (i_1 - i_1 + i_2, j_2, (i_1 - i_2 + F_1) \cap F_2), & i_1 < i_2, \\ (i_1, j_2, F_1 \cap F_2), & i_1 = i_2, \\ (i_1, i_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - i_1 + F_2)), & i_1 > i_2, \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i_2, j_2, (i_1 - i_2 + F_1) \cap F_2), & i_1 < i_2, \quad (1_1) \\ (i_1, j_2, F_1 \cap F_2), & i_1 = i_2, \quad (2_1) \\ (i_1, i_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - i_1 + F_2)), & i_1 > i_2, \quad (3_1) \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(i_1, j_1, F_1) &= (i_2, j_2, F_2) \cdot (i_1, j_1, F_1)^{-1} \cdot (i_1, j_1, F_1) = \\ &= (i_2, j_2, F_2) \cdot (j_1, i_1, F_1) \cdot (i_1, j_1, F_1) = (i_2, j_2, F_2) \cdot (j_1, j_1, F_1) = \\ &= \begin{cases} (i_2, j_2 - j_1 + j_1, F_2 \cap (j_1 - j_2 + F_1)), & j_1 < j_2, \\ (i_2, j_1, F_2 \cap F_1), & j_1 = j_2, \\ (i_2 - j_2 + j_1, j_1, (j_2 - j_1 + F_2) \cap F_1), & j_1 > j_2, \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i_2, j_2, F_2 \cap (j_1 - j_2 + F_1)), & j_1 < j_2, \quad (1_2) \\ (i_2, j_1, F_2 \cap F_1), & j_1 = j_2, \quad (2_2) \\ (i_2 - j_2 + j_1, j_1, (j_2 - j_1 + F_2) \cap F_1), & j_1 > j_2. \quad (3_2) \end{cases}\end{aligned}$$

У випадках (1_1) і (1_2) та (2_1) і (2_2) отримуємо, що $i_1 = i_2$, $j_1 = j_2$, а отже, $i_1 - i_2 = j_1 - j_2 = 0$ і $F_1 \subseteq -0 + F_2$. У випадках (3_1) і (3_2) отримуємо, що $i_1 = i_2 - j_2 - j_1$ і, врахувавши, що $i_1 > i_2$, $j_1 > j_2$ і $(j_2 - j_1 + F_2) \cap F_1 = F_1$, та прийнявши $k = i_1 - i_2 = j_1 - j_2$, отримуємо, що $F_1 \subseteq -k + F_2$ для деякого $k \in \omega$. ♦

Наслідок 1. $(i, i, F_1) \preceq (j, j, F_2)$ *в* $E(\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}})$ *тоді й лише тоді, коли* $i \geq j$ *і* $F_1 \subseteq j - i + F_2$.

Наступна теорема описує відношення Ґріна на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$.

Теорема 2. *Нехай* $\mathscr{F}$ – ω*-замкнена сім'я в* $\mathscr{P}(\omega)$ *і* (i_1, j_1, F_1), $(i_2, j_2, F_2) \in \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$. *Тоді*:

(***i***) $(i_1,j_1,F_1)\mathscr{R}(i_2,j_2,F_2)$ *тоді й лише тоді, коли* $i_1=i_2$, $F_1=F_2$;

(***ii***) $(i_1,j_1,F_1)\mathscr{L}(i_2,j_2,F_2)$ *тоді й лише тоді, коли* $j_1=j_2$, $F_1=F_2$;

(***iii***) $(i_1,j_1,F_1)\mathscr{H}(i_2,j_2,F_2)$ *тоді й лише тоді, коли* $i_1=i_2$, $j_1=j_2$, $F_1=F_2$, *а отже, всі* $\mathscr{H}$*-класи напівгрупи* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ *є одноелементними;*

(***iv***) $(i_1,j_1,F_1)\mathscr{D}(i_2,j_2,F_2)$ *тоді й лише тоді, коли* $F_1=F_2$;

(***v***) $(i_1,j_1,F_1)\mathscr{J}(i_2,j_2,F_2)$ *тоді й лише тоді, коли існують* $k_1,k_2\in\omega$ *такі, що* $F_1\subseteq -k_1+F_2$ *і* $F_2\subseteq -k_2+F_1$.

Д о в е д е н н я. (***i***). Нехай (i_1,j_1,F_1) і (i_2,j_2,F_2) – $\mathscr{R}$-еквівалентні елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ такі, що $(i_1,j_1,F_1)\mathscr{R}(i_2,j_2,F_2)$. Оскільки згідно з теоремою 1, $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ – інверсна напівгрупа та $(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}=(i_2,j_2,F_2)\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$, то з теореми 1.17 в [7] випливає, що

$$(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}=(i_1,j_1,F_1)(i_1,j_1,F_1)^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}=(i_1,i_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}},$$

$$(i_2,j_2,F_2)\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}=(i_2,j_2,F_2)(i_2,j_2,F_2)^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}=(i_2,i_2,F_2)\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}},$$

звідки $(i_1,i_1,F_1)=(i_2,i_2,F_2)$. Таким чином, виконуються рівності $i_1=i_2$ і $F_1=F_2$.

Навпаки, нехай (i_1,j_1,F_1) і (i_2,j_2,F_2) – елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ такі, що $i_1=i_2$ і $F_1=F_2$. Тоді $(i_1,i_1,F_1)=(i_2,i_2,F_2)$. Оскільки за теоремою 1, $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ – інверсна напівгрупа, то з теореми 1.17 в [7] випливає, що

$$(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}=(i_1,j_1,F_1)(i_1,j_1,F_1)^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}=(i_1,i_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}=$$
$$=(i_2,j_2,F_2)(i_2,j_2,F_2)^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}=(i_2,j_2,F_2)\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}},$$

а отже, $(i_1,j_1,F_1)\mathscr{R}(i_2,j_2,F_2)$ у напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$.

Доведення твердження (***ii***) аналогічне доведенню твердження (***i***).

Твердження (***iii***) випливає з (***i***) та (***ii***).

(***iv***). Нехай (i_1,j_1,F_1) і (i_2,j_2,F_2) – елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ такі, що $(i_1,j_1,F_1)\mathscr{D}(i_2,j_2,F_2)$. Оскільки $\mathscr{R},\mathscr{L}\subseteq\mathscr{D}$ і $(i_1,i_1,F_1)\mathscr{R}(i_1,j_1,F_1)$ та $(i_2,j_2,F_2)\mathscr{L}(j_2,j_2,F_2)$ за твердженнями (***i***) та (***ii***), то $(i_1,i_1,F_1)\mathscr{D}(j_2,j_2,F_2)$. За лемою W. D. Munn-а (див. [21, лема 1.1]) або за твердженням 3.2.5 в [19] існує елемент (i,j,F) напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ такий, що $(i,j,F)\cdot(i,j,F)^{-1}=(i_1,i_1,F_1)$ і $(i,j,F)^{-1}(i,j,F)=(j_2,j_2,F_2)$. Із твердження ***4°*** леми 1 випливає, що $(i,j,F)\cdot(i,j,F)^{-1}=(i,j,F)\cdot(j,i,F)=(i,i,F)$ та $(i,j,F)^{-1}\cdot(i,j,F)=$ $=(j,i,F)\cdot(i,j,F)=(j,j,F)$, а отже, $F=F_1=F_2$.

Нехай i_1,i_2,j_1,j_2 – довільні цілі числа та $F\in\mathscr{F}$. За твердженнями (***i***) та (***ii***) маємо, що $(i_1,i_1,F)\mathscr{R}(i_1,j_1,F)$ та $(i_2,j_2,F)\mathscr{L}(j_2,j_2,F)$, а з твердження ***2°*** леми 1 випливає, що $(i_1,i_1,F),(j_2,j_2,F)\in E(\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}})$. Оскільки

$$(i_1,j_2,F)\cdot(i_1,j_2,F)^{-1}=(i_1,j_2,F)\cdot(j_2,i_1,F)=(i_1,i_1,F),$$

$$(i_1,j_2,F)^{-1}\cdot(i_1,j_2,F)=(j_2,i_1,F)\cdot(j_2,i_1,F)=(j_2,j_2,F),$$

то з леми Munn-а випливає, що $(i_1,i_1,F)\mathscr{D}(j_2,j_2,F)$ в $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$, і внаслідок $\mathscr{R}\circ\mathscr{D}\circ\mathscr{L}\subseteq\mathscr{D}$ виконується $(i_1,j_1,F)\mathscr{D}(i_2,j_2,F)$.

(***v***). Зауважимо, що, оскільки $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{J}$ і за твердженням (***iv***) маємо, що $(0,0,F)\mathscr{D}(i,j,F)$ у напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ для довільних $i,j\in\mathbb{Z}$ і $F\in\mathscr{F}$, то достатньо знайти необхідну і достатню умову, коли елементи $(0,0,F_1)\mathscr{D}(0,0,F_2)$ є $\mathscr{J}$-еквівалентними в напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$.

За твердженням 3.2.8 [19] елементи a і b інверсної напівгрупи S є $\mathscr{J}$-еквівалентними тоді й лише тоді, коли $a\mathscr{D}b' \preceq b$ та $b\mathscr{D}a' \preceq a$ для деяких $a', b' \in S$. Згідно з твердженням 3, ідемпотенти $(0,0,F_1)$ і $(0,0,F_2)$ є $\mathscr{J}$-еквівалентними в напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ тоді й лише тоді, коли існують невід'ємні цілі числа k_1 і k_2 такі, що $F_1 \subseteq -k_1 + F_2$ і $F_2 \subseteq -k_2 + F_1$. Зі сказаного вище випливає, що $(i_1, j_1, F_1)\mathscr{J}(i_2, j_2, F_2)$ у напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ тоді й лише тоді, коли існують $k_1, k_2 \in \omega$ такі, що $F_1 \subseteq -k_1 + F_2$ і $F_2 \subseteq -k_2 + F_1$. ♦

Нагадаємо (див. [5, 9]), що інверсну напівгрупу S називають *комбінаторною*, якщо відношення Ґріна $\mathscr{H}$ на S є відношенням рівності. Із твердження (***iii***) теореми 2 випливає

Наслідок 2. *Якщо* $\mathscr{F}$ *–* ω*-замкнена підсім'я в* $\mathscr{P}(\omega)$, *то* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ *– комбінаторна інверсна напівгрупа.*

Також із твердження (***v***) теореми 2 випливає

Наслідок 3. *Нехай* $\mathscr{F}$ *–* ω*-замкнена підсім'я в* $\mathscr{P}(\omega)$ *і* $\varnothing \notin \mathscr{F}$. *Тоді напівгрупа* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ *є простою тоді й лише тоді, коли для довільних* $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ *існують* $k_1, k_2 \in \omega$ *такі, що* $F_1 \subseteq -k_1 + F_2$ *і* $F_2 \subseteq -k_2 + F_1$.

Нагадаємо (див. [7]), що напівгрупа S з нулем 0 називається 0-простою, якщо $S \cdot S \neq \{0\}$ і $\{0\}$ – єдиний власний двобічний ідеал в S. Добре відомо (див. [7, лема 2.28]), що напівгрупа S з нулем 0 є 0-простою тоді й лише тоді, коли S має лише два $\mathscr{J}$-класи: $S \setminus \{0\}$ і $\{0\}$. Із твердження (***v***) теореми 2 випливає

Наслідок 4. *Нехай* $\mathscr{F}$ *–* ω*-замкнена підсім'я в* $\mathscr{P}(\omega)$ *і* $\varnothing \in \mathscr{F}$. *Тоді напівгрупа* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ *є 0-простою тоді й лише тоді, коли для довільних непорожніх множин* $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ *існують* $k_1, k_2 \in \omega$ *такі, що* $F_1 \subseteq -k_1 + F_2$ *і* $F_2 \subseteq -k_2 + F_1$.

Нагадаємо (див. [24], також [19]), що інверсна напівгрупа S є E-унітарною, якщо для $e \in E(S)$ і $s \in S$ з $e \preceq s$ випливає, що $s \in E(S)$. Тоді з твердження 3 випливає

Наслідок 5. *Якщо* $\mathscr{F}$ *–* ω*-замкнена підсім'я в* $\mathscr{P}(\omega)$ *і* $\varnothing \notin \mathscr{F}$, *то* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ *–* E*-унітарна інверсна напівгрупа.*

Твердження 4. *Якщо* $\mathscr{F}$ *–* ω*-замкнена підсім'я в* $\mathscr{P}(\omega)$, *то* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ *містить одиницю тоді й лише тоді, коли* $\mathscr{F} = \{\varnothing\}$.

Д о в е д е н н я. ($\Rightarrow$) Припустимо, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ містить одиницю. Оскільки одиниця кожної напівгрупи є ідемпотентом, то, згідно з твердженням ***2°*** леми 1, одиниця в $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ має вигляд (i,i,F) для деяких $i \in \mathbb{Z}$ і $F \in \mathscr{F}$. Якщо $\mathscr{F} = \{\varnothing\}$, то твердження очевидне, а тому надалі вважатимемо, що $\mathscr{F} \neq \varnothing$. Тоді

$$(i,i,F) \cdot (i-1, i-1, F) = \big(i, i, F \cap (-1+F)\big) \neq (i-1, i-1, F),$$

а отже, елемент (i,i,F) не є одиницею в $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$, тобто суперечність. З отриманої суперечності випливає, що $\mathscr{F} = \{\varnothing\}$.

Імплікація ($\Leftarrow$) очевидна. ♦

Твердження 5. *Напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна розширеній біциклічній напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ тоді й лише тоді, коли $\mathscr{F}=\{F\}$ і F – непорожня індуктивна підмножина в ω.*

Д о в е д е н н я. ($\Leftarrow$) Нехай F – індуктивна підмножина в ω і $\mathscr{F}=\{F\}$. Для довільних $i,j,k,\ell\in\mathbb{Z}$ маємо, що

$$(i,j,F)\cdot(k,\ell,F)=\begin{cases}(i-j+k,\ell,(j-k+F)\bigcap F), & j<k,\\ (i,\ell,F\bigcap F), & j=k,\\ (i,j-k+\ell,F\bigcap(k-j+F)), & j>k,\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}(i-j+k,\ell,F), & j<k,\\ (i,\ell,F), & j=k,\\ (i,j-k+\ell,F), & j>k,\end{cases}$$

і з означення напівгрупової операції на розширеній біциклічній напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ випливає, що відображення $f:\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}\to\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$, означене за формулою $f(i,j,F)=(i,j)$, є ізоморфізмом.

($\Rightarrow$) Припустимо, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна розширеній біциклічній напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$. Оскільки за теоремою 2.3 в [27] розширена біциклічна напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ є біпростою, то з твердження (***iv***) теореми 2 отримуємо, що сім'я $\mathscr{F}$ складається з однієї множини F. З означення напівгрупової операції $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ випливає, що $\mathscr{F}$ – нескінченна підмножина в ω. Справді, якщо $\mathscr{F}$ – скінченна підмножина в ω, то

$$(0,0,F)\cdot(1,1,F)=(1,1,(-1+F)\bigcap F)\notin\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}},$$

оскільки $(-1+F)\bigcap F\neq F$. У випадку, коли F – нескінченна неіндуктивна підмножина в ω, то з леми 6 в [3] випливає, що $(-1+F)\bigcap F\neq F$, а тому

$$(0,0,F)\cdot(1,1,F)=(1,1,(-1+F)\bigcap F)\notin\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}.$$

Отже, F – непорожня індуктивна підмножина в ω. ♦

Із твердження 5 випливає

Наслідок 6. *Нехай $\mathscr{F}$ – ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Якщо сім'я $\mathscr{F}$ містить непорожню індуктивну підмножину в ω, то напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ містить ізоморфну копію розширеної біциклічної напівгрупи.*

Теорема 3. *Нехай $\mathscr{F}$ – ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(***i***) $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ *– біпроста напівгрупа;*

(***ii***) $\mathscr{F}$ *– одноелементна сім'я;*

(***iii***) *напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ або тривіальна, або ізоморфна розширеній біциклічній напівгрупі.*

Д о в е д е н н я. Еквівалентність умов (***i***) та (***ii***) випливає з твердження (***iv***) теореми 2. Імплікація (***iii***) $\Rightarrow$ (***ii***) випливає з твердження 5.

Доведемо імплікацію (***ii***) $\Rightarrow$ (***iii***). Якщо $\mathscr{F}=\{\varnothing\}$, то з означення напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ випливає, що $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ – тривіальна (одноелементна) напівгрупа. Тому припустимо, що $\mathscr{F}=\{F\}$ для деякої непорожньої множини F. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ – ω-замкнена, то $(-1+F)\bigcap F=F$, а отже, за лемою 6 в [3], F – індуктивна підмножина в ω. Далі скористаємося твердженням 5. ♦

Якщо λ – ненульовий кардинал, то множину $\mathcal{B}_\lambda = (\lambda \times \lambda) \bigcup \{\mathbf{o}\}$ з напівгруповою операцією

$$(a,b)\cdot(c,d) = \begin{cases} (a,d), & b = c, \\ \mathbf{o}, & b \neq c, \end{cases}$$

$$(a,b)\cdot\mathbf{o} = \mathbf{o}\cdot(a,b) = \mathbf{o}\cdot\mathbf{o} = \mathbf{o},$$

де $a,b,c,d \in \lambda$, називають *напівгрупою* $\lambda \times \lambda$*-матричних одиниць* [19, 22].

Твердження 6. *Нехай* $\mathcal{F}$ – ω*-замкнена підсім'я в* $\mathcal{P}(\omega)$. *Напівгрупа* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ *ізоморфна напівгрупі* $\omega \times \omega$*-матричних одиниць* $\mathcal{B}_\omega$ *тоді й тільки тоді, коли* $\mathcal{F} = \{F, \varnothing\}$, *де* F *– одноточкова підмножина в* ω.

Д о в е д е н н я. ($\Leftarrow$) Припустимо, що $\mathcal{F} = \{F, \varnothing\}$ і F – одноточкова підмножина в ω. Для довільних $i,j,k,\ell \in \mathbb{Z}$ маємо

$$(i,j,F)\cdot(k,\ell,F) = \begin{cases} (i-j+k, \ell, (j-k+F)\bigcap F), & j < k, \\ (i,\ell,F), & j = k, \\ (i, j-k+\ell, F\bigcap(k-j+F)), & j > k, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (i,\ell,F), & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

і очевидно, що $(i,j,F)\cdot 0 = 0\cdot(i,j,F) = 0\cdot 0 = 0$, звідки випливає, що відображення $f : \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}} \to \mathcal{B}_\omega$, означене за формулою $f(i,j,F) = (i,j)$, є ізоморфізмом.

($\Rightarrow$) Припустимо, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\omega\times\omega$-матричних одиниць $\mathcal{B}_\omega$. Зафіксуємо довільний ненульовий елемент (i,j,F) напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$. Якщо (i,j,F) не є ідемпотентом, то, за твердженням ***2°*** леми 1, маємо, що $i \neq j$, а тоді

$$0 = (i,j,F)\cdot(i,j,F) = \begin{cases} (i-j+i, j, (j-i+F)\bigcap F), & j < i, \\ (i, j-i+j, F\bigcap(i-j+F)), & j > i. \end{cases}$$

Отже, для довільних різних $i,j \in \mathbb{Z}$ маємо, що $(j-i+F)\bigcap F = \varnothing = F\bigcap(i-j+F)$, а це означає, що $(-k+F)\bigcap F = \varnothing$ для довільного натурального числа k. Звідси випливає, що множина F – одноелементна.

Припустимо, що сім'я $\mathcal{F}$ містить дві одноелементні множини $F_k = \{k\}$ і $F_\ell = \{\ell\}$ для деяких $k,\ell \in \omega$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $k < \ell$. Згідно з твердженням ***2°*** леми 1, для довільного $i \in \mathbb{Z}$ елементи $(i+k, i+k, F_k)$ і $(i+\ell, i+\ell, F_\ell)$ є ідемпотентами в $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$, причому $(i+k,i+k,F_k) \neq (i+\ell,i+\ell,F_\ell)$, оскільки $k \neq \ell$. Оскільки напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ і $\mathcal{B}_\omega$ є ізоморфними, то всі ненульові ідемпотенти в $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ примітивні, а отже, маємо, що

$$0 = (i+k,i+k,F_k)\cdot(i+\ell,i+\ell,F_\ell) =$$

$$= \left(i+\ell, i+\ell, (k-\ell+F_\ell)\bigcap F_k\right) = (i+\ell,i+\ell,F_k) \neq 0,$$

суперечність. З отриманої суперечності випливає, що сім'я $\mathcal{F}$ містить лише одну одноелементну множину. ♦

Нехай $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathcal{F}}$ – напівгрупа, означена в [3]. З теореми 3 випливає, що для фіксованої сім'ї $\mathscr{F}$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ неізоморфні. Однак, із твердження 4 в [3] і твердження 6 випливає

Наслідок 7. *Якщо* $\mathscr{F}$ *– одноточкова підмножина в* ω *і* $\mathscr{F} = \{F, \varnothing\}$, *то напівгрупи* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ *і* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ *ізоморфні.*

Нагадаємо (див. [19]), що інверсну напівгрупу S із нулем 0 називають 0-біпростою, якщо S має лише два $\mathscr{D}$-класи: $S \setminus \{0\}$ і $\{0\}$.

Для довільного натурального числа n позначимо $n\omega = \{n \cdot i : i \in \omega\}$.

Приклад 1. Зафіксуємо довільні $i_0 \in \omega$ та натуральне число j_0. Покладемо $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{(i_0,j_0)} = \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$, де $\mathscr{F} = \{\varnothing, i_0 + j_0\omega\}$. Тоді очевидно, що $\mathscr{F}$ – ω-замкнена сім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, а за теоремою 1 інверсна напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{(i_0,j_0)}$ є 0-біпростою. Більше того, за твердженням 5, для довільного $i_0 \in \omega$ напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{(i_0,1)}$ ізоморфна розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем.

Безпосередньо звичайною перевіркою доводимо, що для довільних $i_1, i_2 \in \omega$ та довільного натурального числа j_0 відображення $h : \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{(i_1,j_0)} \to$ $\to \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{(i_2,j_0)}$, означене $h(n, m, i_1 + j_0\omega) = (n, m, i_2 + j_0\omega)$ і $h(0) = 0$, є ізоморфізмом. Отже, виконується

Твердження 7. *Для довільних* $i_1, i_2 \in \omega$ *та довільного натурального* j_0 *напівгрупи* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{(i_1,j_0)}$ *і* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{(i_2,j_0)}$ *є ізоморфними.*

Наступна теорема описує структуру 0-біпростих напівгруп $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ з точністю до ізоморфізму.

Теорема 4. *Нехай* $\mathscr{F}$ *–* ω*-замкнена підсім'я в* $\mathscr{P}(\omega)$, $\varnothing \in \mathscr{F}$ *і* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ *– 0-біпроста напівгрупа. Тоді виконується лише одна з умов*:

(***i***) *напівгрупа* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ *ізоморфна напівгрупі* $\omega \times \omega$*-матричних одиниць* $\mathscr{B}_{\omega}$;

(***ii***) *напівгрупа* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ *ізоморфна напівгрупі* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{(0,j_0)}$ *для деякого натурального числа* j_0.

Д о в е д е н н я. За твердженням (***iv***) теореми 2, сім'я $\mathscr{F}$ містить непорожню множину F та порожню множину $\varnothing$. Припустимо, що множина F скінченна. Тоді аналогічно, як і в твердженні 5, доводимо, що F – одноелементна множина, а отже, за твердженням 6, напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\omega \times \omega$-матричних одиниць $\mathscr{B}_{\omega}$.

Якщо ж F – нескінченна множина, то з твердження (***iv***) теореми 2 випливає, що виконується одна з умов:

а) $(-1 + F) \bigcap F = F$

або

б) $(-1 + F) \bigcap F = \varnothing$.

У випадку ***а***) за твердженням 5 множина $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}} \setminus \{0\}$ є піднапівгрупою $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$, яка ізоморфна розширеній біциклічній напівгрупі, а отже, виконується твердження (***ii***).

Якщо ж виконується умова ***б***), то з леми 7 в [3] випливає, що $F = i_0 + j_0\omega$ для деяких натурального числа j_0 та $i_0 \in \omega$. Застосувавши твердження 7, отримуємо, що виконується умова (***ii***). ♦

Нагадаємо (див. [19, 22]), що найменша (мінімальна) групова конгруенція σ на інверсній напівгрупі S означається так: $s\sigma t \Leftrightarrow es = et$ для деякого $e \in E(S)$. Очевидно, що, якщо $\mathscr{F}$ – ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$ і $\varnothing \in \mathscr{F}$, то напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ містить нуль, а отже, фактор-напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}} / \sigma$ ізоморфна тривіальній групі.

Твердження 8. *Нехай $\mathscr{F}$ – ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$ і $\varnothing \notin \mathscr{F}$. Тоді $(i_1, j_1, F_1)\sigma(i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ тоді й лише тоді, коли $i_1 - j_1 = i_2 - j_2$, а отже, фактор-напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}} / \sigma$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел $Z(+)$.*

Доведення. Нехай (i_1, j_1, F_1) і (i_2, j_2, F_2) – довільні елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$. З означення найменшої групової конгруенції σ випливає, що $(i_1, j_1, F_1)\sigma(i_2, j_2, F_2)$ тоді й тільки тоді, коли існує елемент $(i, j, F) \in \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ такий, що $(i, j, F) \preceq (i_1, j_1, F_1)$ і $(i, j, F) \preceq (i_2, j_2, F_2)$. Тоді за твердженням 3 маємо, що $F \subseteq -k_1 + F_1$ і $i - i_1 = j - j_1 = k_1$, а також $F \subseteq -k_2 + F_2$ і $i - i_2 = j - j_2 = k_2$ для деяких $k_1, k_2 \in \omega$. Отже, з $(i_1, j_1, F_1)\sigma(i_2, j_2, F_2)$ випливає, що $i_1 - j_1 = i_2 - j_2 = i - j$.

Припустимо, що для елементів (i_1, j_1, F_1) і (i_2, j_2, F_2) напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ справджується рівність $i_1 - j_1 = i_2 - j_2$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $i_1 > i_2$. Оскільки $\mathscr{F}$ – ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, то $F = F_1 \cap (i_2 - i_1 + F_2) \in F$. Тоді $j_1 > j_2$ і за твердженням 3 маємо, що

$$(i_1, j_1, F) = (i_1, j_1, F \cap F_1) = (i_1, i_1, F) \cdot (i_1, j_1, F_1) \leq (i_1, j_1, F_1)$$

і

$$\begin{aligned}(i_1, i_1, F) \cdot (i_2, j_2, F_2) &= \left(i_1, i_1 - i_2 + j_2, F \cap (i_2 - i_1 + F_2)\right) = \\ &= \left(i_1, j_1 - j_2 + j_2, F \cap (i_2 - i_1 + F_2)\right) = \\ &= \left(i_1, j_1, F \cap (i_2 - i_1 + F_2)\right) = (i_1, j_1, F) \leq (i_2, j_2, F_2),\end{aligned}$$

а отже, $(i_1, j_1, F_1)\sigma(i_2, j_2, F_2)$.

Означимо відображення $h : \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}} \to Z(+)$ за формулою $h(i, j, F) = i - j$. Із доведеного вище випливає, що $h(i_1, j_1, F_1) = h(i_2, j_2, F_2)$ тоді і лише тоді, коли $(i_1, j_1, F_1)\sigma(i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$, а отже, відображення $h : \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}} \to Z(+)$ є гомоморфізмом і фактор-напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}} / \sigma$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел $Z(+)$. ♦

На завершення опишемо структуру напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$, де сім'я $\mathscr{F}$ складається з усіх одноелементних підмножин в ω і порожньої множини. Зауважимо, що в [20] і [16] отримано подібні результати для напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$, де сім'ї $\mathscr{F}$ і $\mathscr{F}_1$ складаються з усіх одноелементних підмножин в ω і порожньої множини і атомарних підмножин в ω, відповідно.

Приймемо $\mathscr{F}_1 = \{A \subseteq \omega : |A| \leq 1\}$. Очевидно, що $\mathscr{F}_1$ – ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, а отже, $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}_1}$ – інверсна напівгрупа з нулем. Далі через $(i, j, \{k\})$ будемо позначати ненульовий елемент $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}_1}$ для деяких $i, j \in \mathbb{Z}$ і $k \in \omega$, а через $\mathbf{0}$ – нуль напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}_1}$.

Скористаємося конструкцією з [2]. Нехай S – напівгрупа та X – непорожня множина потужності λ. На множині $\mathscr{B}_X(S) = (X \times S \times X) \bigcup \{\mathbf{o}\}$ означимо напівгрупову операцію так:

$$(\alpha, s, \beta) \cdot (\gamma, t, \delta) = \begin{cases} (\alpha, st, \delta), & \beta = \gamma, \\ \mathbf{o}, & \beta \neq \gamma, \end{cases}$$

і $(\alpha, s, \beta) \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o} \cdot (\alpha, s, \beta) = \mathbf{o} \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$ для всіх $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in X$ і $s, t \in S$. Якщо S – моноїд, то напівгрупу $\mathscr{B}_X(S)$ називають λ-розширенням Брандта напівгрупи S [2]. Властивості напівгрупи $\mathscr{B}_X(S)$ та її узагальнення λ^0-розширення Брандта $\mathscr{B}_X^0(S)$ напівгруп вивчалися в [2, 14, 18].

Через $\omega_{\min}$ позначимо множину ω з бінарною операцією $xy = \min(x, y)$ для $x, y \in \omega$. Очевидно, що $\omega_{\min}$ – напівгратка.

Означимо відображення $f : \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}_1} \to \mathscr{B}_{\mathbb{Z}}(\omega_{\min})$ так:

$$f(i, j, \{k\}) = (i + k, k, j + k), \qquad f(\mathbf{0}) = \mathbf{o}, \tag{3}$$

для $i, j \in \mathbb{Z}$ і $k \in \omega$.

Теорема 5. *Напівгрупа* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}_1}$ *ізоморфна напівгрупі* $\mathscr{B}_{\mathbb{Z}}(\omega_{\min})$ *стосовно відображення* f.

Д о в е д е н н я. Очевидно, що відображення f, визначене за формулою (3), є бієктивним. Зафіксуємо довільні $(i_1, j_1, \{k_1\}), (i_2, j_2, \{k_2\}) \in \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}_1}$. Тоді

$$f\big((i_1, j_1, \{k_1\}) \cdot (i_2, j_2, \{k_2\})\big) =$$

$$= \begin{cases} f\big(i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + \{k_1\}) \bigcap \{k_2\}\big), & j_1 < i_2,\ j_1 + k_1 = i_2 + k_2, \\ f(\mathbf{0}) & j_1 < i_2,\ j_1 + k_1 \neq i_2 + k_2, \\ f(i_1, j_2, \{k_1\} \bigcap \{k_2\}), & j_1 = i_2,\ k_1 = k_2, \\ f(\mathbf{0}) & j_1 = i_2,\ k_1 \neq k_2, \\ f\big(i_1, j_1 - i_2 + j_2, \{k_1\} \bigcap (i_2 - j_1 + \{k_2\})\big), & j_1 > i_2,\ j_1 + k_1 = i_2 + k_2, \\ f(\mathbf{0}), & j_1 > i_2,\ j_1 + k_1 \neq i_2 + k_2, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} f\big(i_1 - j_1 + i_2, j_2, \{k_2\}\big), & j_1 < i_2,\ j_1 + k_1 = i_2 + k_2, \\ f\big(i_1 - j_1 + i_2, j_2, \{k_2\}\big), & j_1 = i_2,\ k_1 = k_2, \\ f\big(i_1, j_1 - i_2 + j_2, \{k_1\}\big), & j_1 > i_2,\ j_1 + k_1 = i_2 + k_2, \\ f(\mathbf{0}), & j_1 + k_1 \neq i_2 + k_2, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2 + k_2, k_2, j_2 + k_2), & j_1 < i_2,\ j_1 + k_1 = i_2 + k_2, \\ (i_1 + k_1, k_1, j_2 + k_1), & j_1 = i_2,\ k_1 = k_2, \\ (i_1 + k_1, k_1, j_1 - i_2 + j_2 + k_1), & j_1 > i_2,\ j_1 + k_1 = i_2 + k_2, \\ \mathbf{o}, & j_1 + k_1 \neq i_2 + k_2, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (i_1 + k_1, k_2, j_2 + k_2), & j_1 < i_2,\ j_1 + k_1 = i_2 + k_2, \\ (i_1 + k_1, k_1, j_2 + k_2), & j_1 = i_2,\ k_1 = k_2, \\ (i_1 + k_1, k_1, j_2 + k_2), & j_1 > i_2,\ j_1 + k_1 = i_2 + k_2, \\ \mathbf{o}, & j_1 + k_1 \neq i_2 + k_2, \end{cases}$$

і

$$
\begin{aligned}
& f(i_1, j_1, \{k_1\}) \cdot f(i_2, j_2, \{k_2\}) = \\
& \qquad = (i_1 + k_1, k_1, j_1 + k_1) \cdot (i_2 + k_2, k_2, j_2 + k_2) = \\
& \qquad = \begin{cases} (i_1 + k_1, \min\{k_1, k_2\}, j_2 + k_2), & j_1 + k_1 = i_2 + k_2, \\ \boldsymbol{o}, & j_1 + k_1 \neq i_2 + k_2, \end{cases} = \\
& \qquad = \begin{cases} (i_1 + k_1, k_2, j_2 + k_2), & k_2 < k_1,\ j_1 + k_1 = i_2 + k_2, \\ (i_1 + k_1, k_1, j_2 + k_2), & k_2 = k_1,\ j_1 = i_2, \\ (i_1 + k_1, k_1, j_2 + k_2), & k_2 > k_1,\ j_1 + k_1 = i_2 + k_2, \\ \boldsymbol{o}, & j_1 + k_1 \neq i_2 + k_2, \end{cases} = \\
& \qquad = \begin{cases} (i_1 + k_1, k_2, j_2 + k_2), & j_1 < i_2,\ j_1 + k_1 = i_2 + k_2, \\ (i_1 + k_1, k_1, j_2 + k_2), & j_1 = i_2,\ k_2 = k_1, \\ (i_1 + k_1, k_1, j_2 + k_2), & j_1 > i_2,\ j_1 + k_1 = i_2 + k_2, \\ \boldsymbol{o}, & j_1 + k_1 \neq i_2 + k_2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Оскільки $\mathbf{0}$ і $\boldsymbol{o}$ відповідно є нулями напівгруп $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}_1}$ і $\mathscr{B}_{\mathbb{Z}}(\omega_{\min})$, то з наведеного вище випливає, що відображення $f : \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}_1} \to \mathscr{B}_{\mathbb{Z}}(\omega_{\min})$ є ізоморфізмом. ♦

1. *Вагнер В. В.* Обобщенные группы // Докл. АН СССР. – 1952. – **84**, No. 6. – С. 1119–1122.
2. *Гутік О. В.* Про напівгрупу Гауі // Мат. методи фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 127–132.
3. *Гутік О., Михаленич М.* Про одне узагальнення біциклічного моноїда // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2020. – Вип. 90. – С. 5–19.
4. *Andersen O.* Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen. – Hamburg: PhD Thesis. – 1952.
5. *Ash C. J.* The J-classes of an inverse semigroup // J. Austral. Math. Soc. – **28**, No. 4. – 1979. – P. 427–432. – https://doi.org/10.1017/S144678870001257X.
6. *Bruck R. H.* A survey of binary systems. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1958. – 185 p. – (Ser.: Ergebnisse Der Mathematic Und Ihrer Grenzgebiete. – Vol. 20.)
7. *Clifford A. H., Preston G. B.* The algebraic theory of semigroups. – Providence: Amer. Math. Soc., 1961. – Vol. 1.– xv+224 p.
8. *Clifford A. H., Preston G. B.* The algebraic theory of semigroups. – Providence: Amer. Math. Soc., 1967. – Vol. 2. – xv+352 p.
9. *Fihel I. R., Gutik O. V.* On the closure of the extended bicyclic semigroup // Карпат. мат. публікації. – 2011. – **3**, No. 2. – P. 131–157.
10. *Fortunatov V. A.* Congruences on simple extensions of semigroups // Semigroup Forum. – 1976. – **13**. – P. 283–295. – https://doi.org/10.1007/BF02194949.
11. *Fotedar G. L.* On a class of bisimple inverse semigroups // Riv. Mat. Univ. Parma. Ser. 4. – 1978. – **4**. – P. 49–53.
12. *Fotedar G. L.* On a semigroup associated with an ordered group // Math. Nachr. – 1974. – **60**, No. 1–6. – P. 297–302. – https://doi.org/10.1002/mana.19740600128.
13. *Green J. A.* On the structure of semigroups // Ann. Math. (2). – 1951. – **54**, No. 1. – P. 163–172. – https://doi.org/10.2307/1969317.
14. *Gutik O. V., Pavlyk K.* On Brandt λ^0-extensions of semigroups with zero // Мат. методи фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 3. – С. 26–40.
15. *Gutik O.* On locally compact semitopological 0-bisimple inverse ω-semigroups // Topol. Algebra Appl. – 2018. – **6**. – P. 77–101. – https://doi.org/10.1515/taa-2018-0008.
16. *Gutik O., Lysetska O.* On the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ which is generated by the family $\mathscr{F}$ of singletons of ω // Preprint. – 2021.

17. *Gutik O., Pagon D., Pavlyk K.* Congruences on bicyclic extensions of a linearly ordered group // Acta Comment. Univ. Tartu. Math. – 2011. – **15**, No. 2. – P. 61–80.
18. *Gutik O., Repovš D.* On the Brandt λ^0-extensions of monoids with zero // Semigroup Forum. – 2010. – **80**, No. 1. – P. 8–32.
 – https://doi.org/10.1007/s00233-009-9191-8.
19. *Lawson M. V.* Inverse semigroups. The theory of partial symmetries. – Singapore: World Sci., 1998. – 428 p.
20. *Lysetska* O. On feebly compact on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2020. – Вип. 90. – С. 48–56.
21. *Munn W. D.* Uniform semilattices and bisimple inverse semigroups // Quart. J. Math. Oxford. – 1966. – **17**, No. 1. – P. 151–159.
 – https://doi.org/10.1093/qmath/17.1.151.
22. *Petrich M.* Inverse semigroups. – New York: John Wiley & Sons, 1984. – 674 p.
23. *Reilly N. R.* Bisimple ω-semigroups // Glasgow Math. J. – 1966. – **7**, No. 3. – P. 160–167. – https://doi.org/10.1017/S2040618500035346.
24. *Saitô T.* Proper ordered inverse semigroups // Pacific. J. Math. – 1965. – **15**, No. 2. – P. 649–666. – https://doi.org/10.2140/pjm.1965.15.649.
25. *Warne R. J.* A class of bisimple inverse semigroups // Pacific. J. Math. – 1966. – **18**, No. 3. – P. 563–577. – https://doi.org/10.2140/pjm.1966.18.563.
26. *Warne R. J.* Bisimple inverse semigroups mod groups // Duke Math. J. – 1967. – **34**, No. 4. – P. 787–811. – https://doi.org/10.1215/S0012-7094-67-03481-3.
27. *Warne R. J.* I-bisimple semigroups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – **130**, No. 3. – P. 367–386. – https://doi.org/10.2307/1994755.

ON THE SEMIGROUP WHICH IS GENERATED BY EXTENDED BICYCLIC SEMIGROUP AND ω-CLOSED FAMILY

The algebraic extension $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ of the extended bicyclic semigroup is introduced for an arbitrary ω-closed family $\mathscr{F}$ of subsets of ω. It is proved that $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ is a combinatorial inverse semigroup. Green's relations and the natural partial order on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ and its set of idempotents are described. The criteria of simplicity, 0-simplicity, bisimplicity, 0-bisimplicity of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$, and the criterion for $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ to be isomorphic to the extended bicyclic semigroup or the countable semigroup of matrix units are derived. It is proved that in the case when the family $\mathscr{F}$ consists of all singletons of ω and the empty set, the semigroup $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ is isomorphic to the Brandt λ-extension of the semilattice $(\omega, \min)$.

Key words**:** *semigroup, extended bicyclic semigroup, extension.*

Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів

Одержано
21.10.20