

ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ, ЯКІ НЕ ВИКЛИКАЮТЬ НАПРУЖЕНЬ В НЕОДНОРІДНОМУ ОСЕСИМЕТРИЧНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

Розглядається задача про визначення температурного поля, яке не викликає термонапружень у скінченному порожнистому осесиметричному циліндрі з характеристиками матеріалу, залежними від двох координат. Між циліндром і середовищем відбувається конвективний теплообмін, а усталена теплопередача в циліндрі відбувається за законом Фур'є. Отримано точний аналітичний розв'язок задачі, який виражається через функції нормального розподілу Гаусса, для двокомпонентних функціонально-градієнтних матеріалів з теплофізичними параметрами, що описуються за моделлю простої суміші. Показано, що такий розв'язок існує при певних зв'язках між коефіцієнтами лінійного теплового розширення і теплопровідності складових з узгодженням температур середовища на перетинах поверхонь циліндра. Розрахунки вказують на можливість забезпечення відсутності термонапружень у циліндрі, виготовленому з реально існуючих матеріалів, при перепадах температур між поверхнями циліндра у декілька сотень градусів.

Ключові слова: осесиметричний циліндр, функціонально-градієнтні матеріали, термонапруження, відсутність напружень, обернена задача, аналітичні розв'язки, оптимізація, необхідні та достатні умови.

Ресурс служби елементів конструкцій залежить від силових і температурних навантажень. Ці навантаження, які можуть бути малими порівняно з межами міцності матеріалів, часто призводять до їх деградації внаслідок пришивидження цими навантаженнями хімічних процесів взаємодії конструкції із зовнішнім середовищем [15]. Останнім часом у конструкціях, що перебувають під дією теплових навантажень, дедалі ширше застосовують композитні, зокрема, функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) [19, 20].

Сучасні технології виготовлення ФГМ дають можливість забезпечувати наперед задані розподіли термомеханічних характеристик у виробках із таких матеріалів [25, 29, 33]. Зокрема, у цих працях повідомлено про метод виготовлення ФГМ за допомогою струменевого кольорового друку. Згідно з цим методом, водні суспензії Al_2O_3 та ZrO_2 стабілізували електростатично і поміщали в резервуари для чорнила різного кольору у струменевих картриджах. Обсяг і склад суспензій, надрукованих краплинами на невеликій площі, контролювали за допомогою струменевого блакитно-пурпурово-жовто-чорного кольорового друку. Запропонований спосіб вказує на можливості виготовлення ФГМ з довільними 2D- та 3D-композиційними розподілами.

ФГМ створені для зменшення залишкових, а також температурних напружень, що можна здійснити шляхом просторового розподілу властивостей матеріалу. Дизайнери можуть отримати виняткову продуктивність, а також змінити реакцію ФГМ у тепловому середовищі. У випадку неперервно градуйованих матеріалів зміна мікроструктури, складу, а отже, і їхніх властивостей неперервно залежить від координат [16, 28]. Огляд досліджень 1997–2007 рр., які стосуються технологій виготовлення, вивчення механічної поведінки та застосування ФГМ, подано у праці [11]. У працях [13, 14, 17, 23, 24, 26] розглянуто оптимізацію дво- і тривимірного розподілу складових ФГМ з метою зменшення напружень, багатофункціональної оптимізації в різних об'єктах: циліндрах, плитах тощо, з урахуванням екологічних вимог. Під екологічними вимогами до матеріалів розуміємо екологічні аспекти їх виробництва, їх використання та утилізацію в кінці терміну експлуатації, а також способи розробки і виготовлення, які мінімізу-

✉ b-kalynyak@litech.net

ють їхній вплив на навколишнє середовище [9]. Зокрема, метою роботи [14] є визначення просторового розподілу об'ємної концентрації складових і його оптимізація для покращення екологічних характеристик матеріалу. Для розв'язання цих завдань використано найрізноманітніші методи, в тому числі методи лінійного програмування, нейронні мережі, сплайн-апроксимацію, стандартний апарат розв'язування оптимізаційних задач MATLAB з командою 'fmincon' тощо.

Тому задача визначення теплового навантаження конструкцій, які забезпечують мінімальні термонапруження або їх відсутність, є актуальною.

Задачі визначення температурних полів, які не викликають напружень чи переміщень в однорідних тілах, розглянуто в працях [6, 7]. Проблеми оптимізації характеристик матеріалів для мінімізації напружень у багатошарових пластинах із використанням генетичного алгоритму вивчено в [11, 12, 18, 21, 34]. У праці [30] з використанням нейронних мереж запропоновано підхід до оптимізації характеристик матеріалу довгого порожнистого циліндра для релаксації максимальних значень теплових напружень. Цю проблему розв'язано як задачу мінімізації максимальних напружень шляхом оптимізації керуючої змінної (показника степеня у степеневій залежності характеристик матеріалу) упродовж часового інтервалу від початкового теплового стану нагрівання до досягнення усталеного режиму. Дослідження числовими методами задач зниження рівня термонапружень за рахунок вибору залежності характеристик композита від двох координат наведено в роботі [31]. Задачі про визначення оптимального за швидкістю нагрівання тіл з обмеженнями на температуру чи напруження, а також ідентифікації термонапруженого стану тіл з неповною інформацією про умови нагрівання розглянуто в [5, 35]. Можливість існування теплових полів у довгому циліндрі, неоднорідному за радіальною координатою, з потрібним розподілом фізико-механічних характеристик матеріалу, що забезпечують відсутність напружень, показано в роботах [3, 4]. У праці [8] запропоновано методику зменшення температурних напружень у покриттях з використанням умови постійності температурних деформацій у неоднорідних покриттях, однак, без конкретних числових розрахунків.

У цій праці визначимо температурне поле, виражене певним класом функцій, що не викликає термонапружень у скінченному осесиметричному циліндрі з характеристиками матеріалу, залежними від двох координат. Виконані числові дослідження вказують на можливість встановлення в неоднорідному осесиметричному циліндрі температурних полів, які не викликають напружень при заданих умовах нагрівання, відсутності об'ємних теплових джерел, за рахунок встановлення характеристик матеріалу.

1. Формулювання задачі. Розглянемо порожнистий осесиметричний циліндр з віссю Oz , яка збігається з його віссю симетрії, радіусами внутрішньої і зовнішньої поверхонь ρ_1, ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$) відповідно, висотою $z_2 - z_1$. Початок координат вибрано на осі Oz . Характеристики матеріалів циліндра – модуль пружності E , коефіцієнт Пуассона ν , коефіцієнти лінійного розширення α та теплопровідності λ , а також температурне поле T є функціями від координат ρ, z : $E = E(\rho, z)$, $\nu = \nu(\rho, z)$, $\alpha = \alpha(\rho, z)$, $\lambda = \lambda(\rho, z)$, $T = T(\rho, z)$. Потрібно встановити вигляд температурного поля, яке не викликає напружень у такому циліндрі, та способи його створення в рамках класичної незв'язаної моделі термопружності, в якій температурне поле описується законом теплопровідності Фур'є та умовами конвективного теплообміну через поверхні циліндра.

Вихідними рівняннями задачі є [1, 32]:

– рівняння рівноваги

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sigma_r) + \rho \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \sigma_\theta = -\rho^2 F_r, \quad \rho \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \rho} + \sigma_{rz} + \rho \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\rho^2 F_z, \quad (1)$$

– рівняння сумісності

$$\rho \frac{\partial e_\theta}{\partial \rho} = e_r - e_\theta, \quad \rho \frac{\partial^2 e_\theta}{\partial z^2} - \frac{\partial e_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial \rho} = 0, \quad (2)$$

– зв'язки між тензорами деформацій і напружень

$$\begin{aligned} e_r(\rho, z) &= \frac{1 + \nu(\rho, z)}{E(\rho, z)} \sigma_r(\rho, z) - \frac{\nu(\rho, z)}{E(\rho, z)} \sigma(\rho, z) + \Phi(\rho, z), \\ e_\theta(\rho, z) &= \frac{1 + \nu(\rho, z)}{E(\rho, z)} \sigma_\theta(\rho, z) - \frac{\nu(\rho, z)}{E(\rho, z)} \sigma(\rho, z) + \Phi(\rho, z), \\ e_z(\rho, z) &= \frac{1 + \nu(\rho, z)}{E(\rho, z)} \sigma_z(\rho, z) - \frac{\nu(\rho, z)}{E(\rho, z)} \sigma(\rho, z) + \Phi(\rho, z), \\ e_{rz} &= \frac{1 + \nu(\rho, z)}{E(\rho, z)} \sigma_{rz}, \end{aligned} \quad (3)$$

– умови на межах

$$\begin{aligned} \sigma_r(\rho_1, z) &= -p_1(z), & \sigma_{rz}(\rho_1, z) &= q_1(z), \\ \sigma_r(\rho_2, z) &= -p_2(z), & \sigma_{rz}(\rho_2, z) &= q_2(z), \end{aligned} \quad (4)$$

де σ_r , σ_θ , σ_z , σ_{rz} – ненульові компоненти тензора напружень, e_r , e_θ , e_z , e_{rz} – ненульові компоненти тензора деформацій, $\Phi(\rho, z) = \alpha(\rho, z)(T(\rho, z) - T_0)$ – теплова деформація, $T = T(\rho, z)$ – встановлене експериментально або обчислене на основі відповідної моделі температурне поле, T_0 – відлікова температура, при якій відсутні термонапруження.

Потрібно визначити на основі рівнянь (1)–(4) точні аналітичні вирази для теплової деформації, а отже, і температурного поля, яке не викликає напружень, а також способи його отримання за рахунок вибору характеристик ФГМ з використанням відповідної задачі теплопровідності [10, 32]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \lambda(\rho, z) \frac{\partial t}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(\rho, z) \frac{\partial t}{\partial z} \right) &= 0, \\ \lambda(\rho_1, z) \frac{\partial t(\rho_1, z)}{\partial \rho} + \beta_{\rho_1} [t(\rho_1, z) - t_{\rho_1}(z)] &= 0, \\ \lambda(\rho_2, z) \frac{\partial t(\rho_2, z)}{\partial \rho} + \beta_{\rho_2} [t(\rho_2, z) - t_{\rho_2}(z)] &= 0, \\ \lambda(\rho, z_1) \frac{\partial t(\rho, z_1)}{\partial z} + \beta_{z_1} [t(\rho, z_1) - t_{z_1}(\rho)] &= 0, \\ \lambda(\rho, z_2) \frac{\partial t(\rho, z_2)}{\partial z} + \beta_{z_2} [t(\rho, z_2) - t_{z_2}(\rho)] &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

де $t(\rho, z) = T(\rho, z) - T_0$, β_ℓ , β_m – коефіцієнти теплообміну між поверхнями циліндра і середовищем, $t_\ell(z)$, $t_m(\rho)$ – відомі температури середовища на поверхнях $m = z_1, z_2$, $\ell = \rho_1, \rho_2$.

Виразами (6) описуються умови конвективного теплообміну. Крім того, повинні виконуватись умови рівності температур середовища на перетинах поверхонь циліндра:

$$\begin{aligned} t_{z_1}(\rho_1) &= t_{\rho_1}(z_1), & t_{z_1}(\rho_2) &= t_{\rho_2}(z_1), \\ t_{z_2}(\rho_1) &= t_{\rho_1}(z_2), & t_{z_2}(\rho_2) &= t_{\rho_2}(z_2). \end{aligned} \quad (7)$$

2. Визначення температурного поля, яке не викликає напружень у циліндрі. Запишемо рівняння сумісності деформацій у напруженнях. Для

цього вирази (3) підставимо у рівняння сумісності (2) з використанням рівнянь рівноваги (1). Отримаємо:

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1 + v(\rho, z)}{E(\rho, z)} \sigma_\theta(\rho, z) - \frac{v(\rho, z)}{E(\rho, z)} \sigma(\rho, z) + \Phi(\rho, z) \right] = \\
& = \frac{1 + v(\rho, z)}{E(\rho, z)} [\sigma_r(\rho, z) - \sigma_\theta(\rho, z)], \\
& 2\rho \frac{\partial \sigma_\theta(\rho, z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1 + v(\rho, z)}{E(\rho, z)} \right] + \sigma_\theta(\rho, z) \rho \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1 + v(\rho, z)}{E(\rho, z)} \right] + \\
& + \frac{1 + v(\rho, z)}{E(\rho, z)} \rho \frac{\partial^2 \sigma_\theta(\rho, z)}{\partial z^2} - 2\rho \frac{\partial \sigma(\rho, z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{v(\rho, z)}{E(\rho, z)} \right] - \\
& - \sigma(\rho, z) \rho \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{v(\rho, z)}{E(\rho, z)} \right] - \frac{v(\rho, z)}{E(\rho, z)} \rho \frac{\partial^2 \sigma(\rho, z)}{\partial z^2} + \\
& + \rho \frac{\partial^2 \Phi(\rho, z)}{\partial z^2} - \sigma_{rz}(\rho, z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1 + v(\rho, z)}{E(\rho, z)} - \\
& - \frac{1 + v(\rho, z)}{E(\rho, z)} \frac{\partial \sigma_{rz}(\rho, z)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1 + v(\rho, z)}{E(\rho, z)} \sigma_z(\rho, z) \right] - \\
& - \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{v(\rho, z)}{E(\rho, z)} \sigma(\rho, z) \right] + \frac{\partial \Phi(\rho, z)}{\partial \rho} = 0. \tag{8}
\end{aligned}$$

Умовою відсутності напружень є рівність нулів всіх компонент тензора напружень у двох рівняннях сумісності (8). Тоді з (8) отримаємо

$$\rho \frac{\partial \Phi(\rho, z)}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \Phi(\rho, z)}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \Phi(\rho, z)}{\partial z^2} = 0. \tag{9}$$

Найпростішим розв'язком рівнянь (9) є $\Phi(\rho, z) = C$, звідки

$$T(\rho, z) - T_0 = t(\rho, z) = \frac{C}{\alpha(\rho, z)}. \tag{10}$$

Формула (10) виражає необхідну умову відсутності напружень у скінченному осесиметричному циліндрі. Покажемо, що умова (10) є і достатньою умовою. Міркування будуть подібними, як і в праці [6], де відповідне твердження доведено для однорідних тіл. Для доведення достатності розглянемо деформований стан. Позначимо через u_ρ , u_z переміщення уздовж координат ρ , z . Після нагрівання ця точка матиме нові координати $\bar{\rho} = \rho + u_\rho$, $\bar{z} = z + u_z$. При зміні температури, яка не викликає напружень, подібний трикутник переходить у подібний. Зі співвідношень Коші між деформаціями і переміщеннями маємо $\frac{\partial u_z}{\partial \rho} = -\frac{\partial u_\rho}{\partial z}$ ($e_{rz} = 0$), $\frac{\partial u_r}{\partial \rho} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$. Розглянемо поворот відносно осі, перпендикулярної до ρ , θ , пов'язаний з деформацією:

$$\omega_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right).$$

Для двох точок A і B повинна виконуватись рівність

$$\omega_{rz}(B) - \omega_{rz}(A) = \int_A^B \left[\frac{\partial \omega_{rz}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \omega_{rz}}{\partial z} dz \right]. \tag{11}$$

Врахуємо, що

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_{rz}}{\partial \rho} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial z} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho^2} \right) = \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \frac{\partial \omega_{rz}}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \rho} \right) = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \rho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}.\end{aligned}\quad (12)$$

Тоді формула (11) з урахуванням (12) набуде вигляду

$$\omega_{rz}(B) - \omega_{rz}(A) = \int_A^B \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial z} d\rho \right] = \int_A^B \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds, \quad (13)$$

де $\frac{\partial}{\partial n}$ – похідна по нормалі.

Якщо точки A і B збігаються, то вираз (13) запишемо як

$$\oint \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = 0. \quad (14)$$

Формула (14) є достатньою умовою відсутності напружень. Отже, вираз (10) є також достатньою умовою для температурного поля, яке не викликає напружень, оскільки $\Phi(\rho, z) = C$.

Це означає, що температурне поле (10) повинно задовольняти задачу теплопровідності (5)–(7).

Отже, потрібно визначити зв'язки між коефіцієнтами лінійного теплового розширення $\alpha = \alpha(\rho, z)$, теплопровідності $\lambda = \lambda(\rho, z)$ та температурами середовищ, які для заданого температурного поля (10) точно задовольняють рівняння теплопровідності (5), умови (6) на межі і умови (7) на перетинах поверхонь циліндра.

З рівняння (5) методом відокремлення змінних отримаємо такий зв'язок між коефіцієнтами теплового лінійного розширення $\alpha(\rho, z) = \alpha_\rho(\rho)\alpha_z(z)$ та коефіцієнтами теплопровідності:

$$\begin{aligned}\lambda(\rho, z) &= \lambda_\rho(\rho)\lambda_z(z) = \\ &= \frac{D\alpha_\rho^2(\rho)\alpha_z^2(z) \exp \left[c \left(\int_{z_1}^z \frac{d\zeta}{d\zeta} \ln \alpha_z(\zeta) - \int_{\rho_1}^\rho \frac{d\eta}{d\eta} \ln \alpha_\rho(\eta) \right) \right]}{\rho \frac{d\alpha_\rho(\rho)}{d\rho} \frac{d\alpha_z(z)}{dz}},\end{aligned}\quad (15)$$

де D , c , C_1 , C_3 – довільні сталі.

Оскільки на сьогоднішній день технологічно неможливо виготовляти матеріали з довільним способом заданими характеристиками, обмежимося при подальшому розгляді двокомпонентними матеріалами, характеристики яких описуються у циліндричній системі координат моделлю простої суміші [27]:

$$\begin{aligned}\lambda(\rho, z) &= \lambda_1[1 - S(\rho, z)] + \lambda_2 S(\rho, z) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)S(\rho, z), \\ \alpha(\rho, z) &= \alpha_1[1 - S(\rho, z)] + \alpha_2 S(\rho, z) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)S(\rho, z).\end{aligned}\quad (16)$$

Тут індексами «1» і «2» позначено характеристики складових першого і другого матеріалів. Якщо характеристики (16) функціонально-градієнтного матеріалу підставити у рівняння теплопровідності (5), то отримаємо нелінійне диференціальне рівняння для визначення розподілу невідомої концентрації $S(\rho, z)$ в осесиметричному циліндрі:

$$\left[\frac{\partial^2 S(\rho, z)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 S(\rho, z)}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial S(\rho, z)}{\partial \rho} - \left[\left(\frac{\partial S(\rho, z)}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial S(\rho, z)}{\partial z} \right)^2 \right] \times \\ \times \left[\frac{2\alpha_{21}}{\alpha_1 + \alpha_{21}S(\rho, z)} - \frac{\lambda_{21}}{(\lambda_1 + \lambda_{21}S(\rho, z))} \right] = 0. \quad (17)$$

До рівняння (17) слід додати умови (6) теплообміну на поверхні і умови (7) рівності температур на перетинах поверхонь циліндра, виражені через концентрацію з використанням виразів (10) та (16). Такі обернені задачі щодо визначення концентрації на основі диференціального рівняння (17) та узгодження умов теплообміну можна розв'язувати чисельними методами.

Спробуємо все таки отримати точні аналітичні розв'язки рівняння (5) $t = t(\rho, z)$ вигляду (10) відносно характеристик матеріалу з виконанням умов конвективного теплообміну (6), рівності температур середовища на перетинах поверхонь циліндра (7) та подання характеристик виразами (16). Для цього треба дослідити умови, які накладаються на $S(\rho, z)$, λ_1 , λ_2 , α_1 , α_2 , щоб коефіцієнти теплопровідності і лінійного теплового розширення можна було подати у вигляді

$$\lambda(\rho, z) = \lambda_1[1 - S(\rho, z)] + \lambda_2 S(\rho, z) = \lambda_\rho(\rho)\lambda_z(z), \\ \alpha(\rho, z) = \alpha_1[1 - S(\rho, z)] + \alpha_2 S(\rho, z) = \alpha_\rho(\rho)\alpha_z(z) \quad (18)$$

через одну функцію концентрації $S(\rho, z)$. Крім цього, потрібно перевірити наявність двокомпонентних матеріалів, характеристики яких задовольнятимуть отримані умови. З рівностей (18) запишемо

$$S(\rho, z) = \frac{\lambda(\rho, z) - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\alpha(\rho, z) - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}. \quad (19)$$

Рівність (19) виконується, якщо

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Звідси отримуємо такі зв'язки між коефіцієнтами теплопровідності та коефіцієнтами лінійного теплового розширення складових:

$$\lambda_\rho(\rho)\lambda_z(z) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \alpha_\rho(\rho)\alpha_z(z), \quad \alpha_\rho(\rho)\alpha_z(z) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_\rho(\rho)\lambda_z(z),$$

а формулу (10) можемо подати у вигляді

$$t(\rho, z) = \frac{C}{\lambda_\rho(\rho)\lambda_z(z)} = \frac{C}{\lambda(\rho, z)} = \frac{C}{\alpha(\rho, z)}. \quad (20)$$

Підставивши температурне поле (20) у рівняння теплопровідності (5) і умови (6), отримаємо таке нелінійне диференціальне рівняння відносно коефіцієнта теплопровідності:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \lambda(\rho, z) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\lambda(\rho, z)} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\lambda(\rho, z) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\lambda(\rho, z)} \right) \right) \right] = 0 \quad (21)$$

та умови на межі:

$$C \lambda(\rho_1, z) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\lambda(\rho_1, z)} + \beta_{\rho_1} \left(\frac{C}{\lambda(\rho_1, z)} - t_{\rho_1}(z) \right) = 0, \\ C \lambda(\rho_2, z) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\lambda(\rho_2, z)} + \beta_{\rho_2} \left(\frac{C}{\lambda(\rho_2, z)} - t_{\rho_2}(z) \right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
C\lambda(\rho, z_1) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\lambda(\rho, z_1)} + \beta_{z_1} \left(\frac{C}{\lambda(\rho, z_1)} - t_{z_1}(\rho) \right) &= 0, \\
C\lambda(\rho, z_2) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\lambda(\rho, z_2)} + \beta_{z_2} \left(\frac{C}{\lambda(\rho, z_2)} - t_{z_2}(\rho) \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Умови (7) при цьому також повинні виконуватись.

Аналітичний розв'язок рівняння (21), отриманий методом відокремлення змінних, має вигляд

$$\lambda(\rho, z) = \frac{1}{\rho^{C_2}} C_4 \exp \left[\frac{1}{4} C_1 \rho^2 - \frac{1}{2} C_1 (z + C_3)^2 \right], \tag{23}$$

де C_i , $i = 1, \dots, 4$, – довільні сталі.

Отже, потрібно визначити сталі C_i , C , які задовольняють умови (6) на межах поверхонь, умови узгодження температур (7), а також умови, які накладаються на температури навколишнього середовища на поверхнях, коефіцієнти теплообміну, теплопровідності, коефіцієнти лінійного теплового розширення, максимально можливий перепад температур в циліндрі.

Природними додатковими умовами, які накладаються на коефіцієнти теплопровідності, теплообміну, лінійного теплового розширення, є:

- задоволення умов зміни коефіцієнтів теплопровідності і лінійного теплового розширення у заданих моделлю межах: $\lambda_1 \leq \lambda(\rho, z) \leq \lambda_2$, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, $\alpha_1 \leq \alpha(\rho, z) \leq \alpha_2$, $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$;
- між максимальним і мінімальним значенням температури тіла у будь-якій його точці нема температур фазових переходів;
- коефіцієнти теплообміну повинні набувати значень з технологічно допустимих меж;
- найбільшому значенню температури циліндра відповідає найменше значення коефіцієнта теплопровідності, і навпаки.

Підставивши розв'язок (23) в умови (22) на межах, отримаємо вирази для коефіцієнта теплопровідності через характеристики матеріалу:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta_{\rho_1}} C \left(C_2 \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{2} \rho_1 C_1 \right) + \frac{C}{\lambda(\rho_1, z)} &= t_{\rho_1}(z), \\
\frac{1}{\beta_{\rho_2}} C \left(C_2 \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{2} \rho_2 C_1 \right) + \frac{C}{\lambda(\rho_2, z)} &= t_{\rho_2}(z), \\
\frac{1}{\beta_{z_1}} C (C_1 z_1 + C_3) + \frac{C}{\lambda(\rho, z_1)} &= t_{z_1}(\rho), \\
\frac{1}{\beta_{z_2}} C (C_1 z_2 + C_3) + \frac{C}{\lambda(\rho, z_2)} &= t_{z_2}(\rho).
\end{aligned} \tag{24}$$

З умов теплообміну (24) і умов узгодження температур на поверхнях (7) маємо

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{z_1}} &= \frac{C_2 \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{2} \rho_1 C_1}{C_1 z_1 + C_3}, & \frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{z_2}} &= \frac{C_2 \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{2} \rho_1 C_1}{C_1 z_2 + C_3}, \\
\frac{\beta_{\rho_2}}{\beta_{z_1}} &= \frac{C_2 \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{2} \rho_2 C_1}{C_1 z_1 + C_3}, & \frac{\beta_{\rho_2}}{\beta_{z_2}} &= \frac{C_2 \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{2} \rho_2 C_1}{C_1 z_2 + C_3}.
\end{aligned} \tag{25}$$

З формул (24) і (23) випливає, що температура на поверхнях $\ell = \rho_1, \rho_2$ повинна належати до множини функцій вигляду

$$t_\ell(z) = A_\ell \exp\left[\frac{1}{2} C_1(z + C_3)^2\right] + B_\ell, \quad (26)$$

а на поверхнях $m = z_1, z_2$ – до множини

$$t_m(\rho) = A_m \rho^{C_2} \exp\left[-\frac{1}{4} C_1 \rho^2\right] + B_m, \quad (27)$$

де

$$A_\ell = \frac{C}{C_4} \ell^{C_2} \exp\left[-\frac{1}{4} C_1 \ell^2\right], \quad B_\ell = \frac{1}{\beta_\ell} C \left(C_2 \frac{1}{\ell} - \frac{1}{2} \ell C_1\right),$$

$$A_m = \frac{C}{C_4} \exp\left[\frac{1}{2} C_1(m + C_3)^2\right], \quad B_m = \frac{1}{\beta_m} C(C_1 m + C_3).$$

Зазначимо, що функція (23) для визначення коефіцієнта теплопровідності не має екстремуму, а отже, і температура (20) теж не має екстремуму. (В цьому можна переконатись стандартним дослідженням функції двох змінних на екстремум [2]). Тому найбільші та найменші їхні значення досягаються на поверхнях циліндра.

3. Алгоритм визначення характеристик матеріалу. Вважатимемо, що на одній із поверхонь задано розподіл температури. Виберемо поверхню $\rho = \rho_2$. Кроки для визначення характеристик матеріалу та умов нагрівання, які створюють температурне поле, що не викликає напружень будуть такими:

- 1°) побудова функції вигляду (26) для температури і задання коефіцієнта теплообміну β_{ρ_2} ; перевірка, чи значення коефіцієнта теплопровідності знаходиться в межах $\lambda_1 \leq \lambda(\rho, z) \leq \lambda_2$. Якщо ця умова не виконується, то слід змінити значення сталих A_{ρ_2} , B_{ρ_2} , C_1 , C_3 ;
- 2°) вибір точки z_* , у якій $t_{\rho_2}(z_*)$ приймає найбільше значення. Ця точка одночасно буде точкою на поверхні, в якій коефіцієнт теплопровідності буде найменшим (оскільки $t(\rho_2, z_*) = C/\lambda(\rho_2, z_*)$) і рівним λ_1 ;
- 3°) з умов (24) та умов рівності температур навколишнього середовища на перетинах циліндричних поверхонь і площин (7) визначення сталих C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C ;
- 4°) визначення з умов (22) коефіцієнтів теплообміну;
- 5°) визначення з умов (24) і формул (18), (19) температури зовнішнього середовища на поверхнях, концентрації, коефіцієнта лінійного теплового розширення.

Приклад. Розглянемо порожнистий неоднорідний циліндр з внутрішнім радіусом $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 1$, значеннями $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, виготовлений з ФГМ (оксид алюмінію і сталь) з характеристиками складових [22]:

$$\lambda_1 = 8 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \quad \lambda_2 = 19.4 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \quad C_\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2.425,$$

$$\alpha_1 = 7.5 \cdot 10^{-6} \text{ 1}/\text{К}, \quad \alpha_2 = 18.2 \cdot 10^{-6} \text{ 1}/\text{К}.$$

Сталу C визначено з умови (26) на межі $\rho = \rho_2$ з використанням (10) у точці $z = z_*$, в якій досягається максимальна температура, а отже, мінімальне значення коефіцієнта теплопровідності λ_1 :

$$C = \lambda_1(t_{\rho_2}(z^*) - B_{\rho_2}). \quad (28)$$

Отже, виконано пункти алгоритму 1°)–2°). Після застосування пунктів 3°)–5°) отримаємо такі числові значення сталих:

$$A_{\rho_2} = 150, B_{\rho_2} = 10, C_1 = -4, C_2 = -0.9891155672,$$

$$C_3 = 2, C_4 = 35.85351257, C = 1978.465525$$

$$\beta_{\rho_1} = 193.5396574, \beta_{z_2} = 408.9013180,$$

$$\beta_{z_1} = 395.6931049, \beta_{\rho_2} = 200.$$

Розподіли температури, коефіцієнта теплопровідності, концентрації, температур на поверхнях подані на рисунках 1–4. Суцільними лініями позначені температури навколишнього середовища на поверхнях, а штриховими – поверхневі температури осесиметричного циліндра.

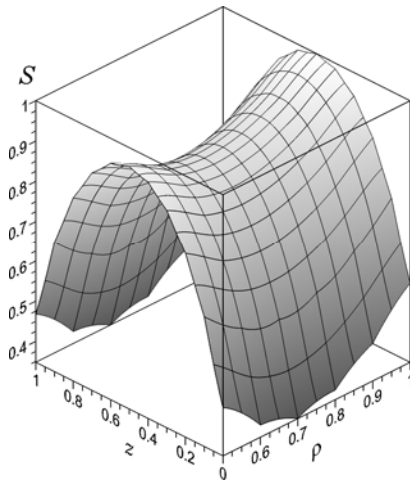


Рис. 1. Залежність розподілу концентрації оксиду алюмінію від координат в ізотропному матеріалі.

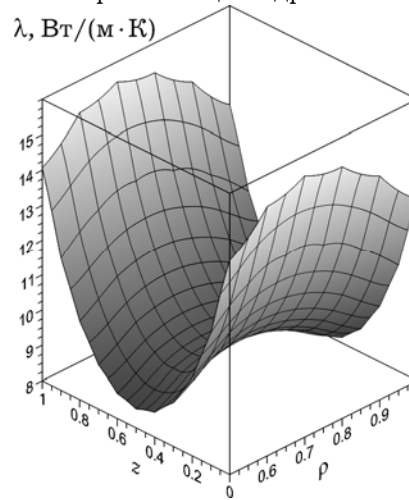


Рис. 2. Залежність коефіцієнта теплопровідності ФГМ від координат.

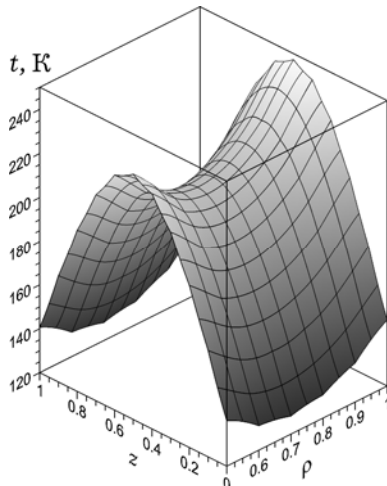


Рис. 3. Температурне поле в осесиметричному циліндрі, яке не спричинює термонапружень.

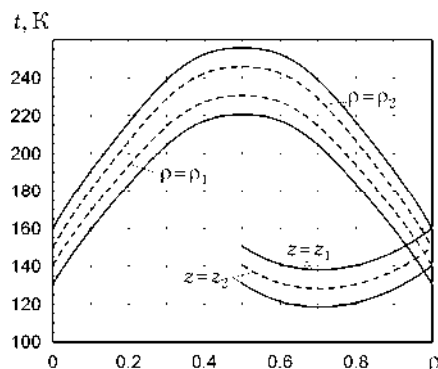


Рис. 4. Залежність температур на поверхнях середовища і циліндра від координат

Обговорення і висновки. Встановлено, що постійна теплова деформація є необхідною і достатньою умовою відсутності термонапружень в неод-

норідному осесиметричному циліндрі. Вказано можливий шлях досягнення відповідних теплових полів, які не спричиняють виникнення напружень.

У випадку конвективного теплообміну з середовищем та теплопередачі за законом теплопровідності Фур'є отримано аналітичні вирази для температур оточуючого середовища на поверхнях осесиметричного циліндра, виготовленого з двокомпонентного ФГМ, які створюють температурне поле, що не спричиняє напружень в ньому. Відповідні можливі розподіли температур виражені через функції нормального розподілу Гаусса.

Аналітичні вирази для характеристик двокомпонентного ФГМ, які описуються моделлю простої суміші отримано при умові рівності відношень коефіцієнтів теплопровідності та лінійного теплового розширення складових.

Важливу роль при отриманні результатів відіграють умови узгодження – рівності температур на перетинах поверхонь осесиметричного циліндра.

Числові дослідження вказують на те, що існують області, в яких невеликі зміни розподілу температури на одній з циліндричних поверхонь та коефіцієнта теплообміну приводять до невеликих змін концентрації складових і температурного поля, яке не викликає напружень.

1. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. – Москва: Высш. шк., 1976. – 272 с.
2. *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз. – Ч. 2. – Київ: Либідь, 1994. – 304 с.
3. *Калиняк Б. М.* Забезпечення нульових радіальних напружень у довгому порожнистому циліндрі неоднорідністю матеріалу // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 2. – С. 104–110.
Te same: *Kalynyak B. M.* Guaranteeing the absence of radial stresses in a long hollow cylinder by the inhomogeneity of material // Mater. Sci. – 2016. – **52**, No. 2. – P. 261–268. – <https://doi.org/10.1007/s11003-016-9953-x>.
4. *Калиняк Б. М.* Забезпечення нульових радіальних напружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі стаціонарним температурним полем // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 1. – С. 91–97.
Te same: *Kalynyak B. M.* Attainment of zero radial stresses in inhomogeneous long hollow cylinders by stationary temperature fields // Mater. Sci. – 2016. – **52**, No. 1. – P. 99–107. – <https://doi.org/10.1007/s11003-016-9931-3>.
5. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В.* Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: Сполом, 2011. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 5.
6. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – Москва: Физматгиз, 1958. – 167 с.
Te same: *Melan H., Parkus H.* Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. – Wien: Springer-Verlag, 1953. – 114 S.
7. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
8. *Шевченко В. Г., Попович О. Г.* Методика розрахунку складу покриття для мінімізації в ньому температурних напружень // Вестн. двигателестроения. – 2010. – № 1. – С. 96–98.
9. *Ashby M. F.* Materials and the environment. Eco-informed material choice. – Amsterdam etc.: Butterworth-Heinemann, Elsevier Inc., 2013. – 620 p.
– <https://doi.org/10.1016/C2010-0-66554-0>.
10. *Bejan A., Kraus A. D.* Heat transfer handbook. – Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2003. – 1480 p.
11. *Birman V., Byrd L. W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Appl. Mech. Rev. – 2007. – **60**, No. 5. – P. 195–216.
– <https://doi.org/10.1115/1.2777164>.
12. *Ding S., Wu C.-P.* Optimization of material composition to minimize the thermal stresses induced in FGM plates with temperature-dependent material properties // Int. J. Mech. Mater. Des. – 2018. – **14**, No. 4. – P. 527–549.
– <https://doi.org/10.1007/s10999-017-9388-z>.
13. *Franco Correia V. M., Aguilar Madeira J. F., Araújo A. L., Mota Soares C. M.* Multiobjective optimization of ceramic-metal functionally graded plates using a higher order model // Compos. Struct. – 2018. – **183**. – P. 146–160.
– <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.02.013>.

14. *Gautam M., Chaturvedi M.* Optimization of FGM composition for better environment material // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2021. – **1017**.– Article 012024. – <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1017/1/012024>.
15. *Handbook of environmental degradation of materials / Myer Kutz (ed.)*. – Norwich: William Andrew, 2005. – 614 p.
16. *Kayikci R., Savaş Ö.* Fabrication and properties of functionally graded Al/AlB₂ composites // J. Compos. Mater. – 2014. – **49**, No. 16. – P. 2029–2037. – <https://doi.org/10.1177/0021998314541490>.
17. *Kou X. Y., Parks G. T., Tan S. T.* Optimal design of functionally graded materials using a procedural model and a particle swarm optimization // Computer-Aided Design. – 2012. – **44**, No. 4. – P. 300–310. – <https://doi.org/10.1016/j.cad.2011.10.007>.
18. *Lieu Q. X., Lee J.* Modeling and optimization of functionally graded plates under thermo-mechanical load using isogeometric analysis and adaptive hybrid evolutionary firefly algorithm // Compos. Struct. – 2017. – **179**. – P. 89–106. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.07.016>
19. *Mahamood R. M., Akinlabi E. T.* Functionally graded materials. – Cham: Springer, 2017. – xxi+103 p.
20. *Mahamood R. M., Akinlabi E. T., Shukla M., Pityana S. L.* Functionally graded material: An overview // Proc. of the World Congress on Engineering WCE-2012 (4–6 July 2012, London). – 2012. – Vol. III. – P. 1593–1597. – <http://hdl.handle.net/10204/6548>.
21. *Mahmoud Nemat-Alla.* Reduction of thermal stresses by composition optimization of two-dimensional functionally graded materials // Acta Mech. – 2009. – **208**, No. 3–4. – P. 147–161. – <https://doi.org/10.1007/s00707-008-0136-1>.
22. *Mechanical & Industrial Ceramics*. – Japan, Kyocera Corporation, 2021. – 15 p. – <https://globalkyocera.com/prdct/fc/product/pdf/mechanical.pdf>.
23. *Mohammadiha O., Ghariblu H.* Crush behavior optimization of multi-tubes filled by functionally graded foam // Thin-Walled Struct. – 2016. – **98**, Part B. – P. 627–639. – <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.10.025>.
24. *Na K. S., Kim J. H.* Volume fraction optimization of functionally graded composite panels for stress reduction and critical temperature // Finite Elem. Anal. Des. – 2009. – **45**, No. 11. – P. 845–851. – <https://doi.org/10.1016/j.finel.2009.06.023>.
25. *Naebe M., Shirvanimoghaddam K.* Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // Appl. Mater. Today. – 2016. – **5**. – P. 223–245. – <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2016.10.001>.
26. *Noh Y. J., Kang Y. J., Youn S. J., Cho J. R., Lim O. K.* Reliability-based design optimization of volume fraction distribution in functionally graded composites // Comput. Mater. Sci. – 2013. – **69**. – P. 435–442. – <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2012.12.003>.
27. *Reddy J. N., Chin C. D.* Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates // J. Therm. Stresses. – 1998. – **21**, No. 6. – P. 593–626. – <https://doi.org/10.1080/01495739808956165>.
28. *Roque C. M. C., Martins P. A. L. S.* Differential evolution for optimization of functionally graded beams // Compos. Struct. – 2015. – **133**. – P. 1191–1197. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.041>.
29. *Saiyathibrahim A., Mohamed Nazirudeen S. S., Dhanapal P.* Processing techniques of functionally graded materials – A review // Proc. Int. Conference on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology – ICSSCET-2015, (10–11 August 2015, Coimbatore, India). – 2015. – Vol. 1. – P. 98–105.
30. *Shabana Y. M., Elsayaf A., Khalaf H., Khalil Y.* Stresses minimization in functionally graded cylinders using particle swarm optimization technique // Int. J. Pres. Vessels Pip. – 2017. – **154**. – P. 1–10. – <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2017.05.013>.
31. *Shi J. X., Shimoda M.* Interface shape optimization of designing functionally graded sandwich structures // Compos. Struct. – 2015. – **125**. – P. 88–95. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.01.045>.
32. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids. – Cambridge: Cambridge Scholars Publishing, 2021. – 346 p.
33. *Wang J., Shaw L. L.* Fabrication of functionally graded materials via inkjet color printing // J. Am. Ceram. Soc. – 2006. – **89**, No. 10. – P. 3285–3289. – <https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2006.01206.x>.

34. Wetherhold R. C., Seelman S., Wang J. The use of functionally graded materials to eliminate or control thermal deformation // Compos. Sci. Technol. – 1996. – **56**, No. 9. – P. 1099–1104. – [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(96\)00075-9](https://doi.org/10.1016/0266-3538(96)00075-9).
35. Yasinsky A. Determination and optimization of stress state of bodies on the basis of inverse thermoelasticity problems // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 916–924. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_607.

TEMPERATURE FIELDS THAT DO NOT CAUSE STRESSES IN AN INHOMOGENEOUS AXYSYMMETRIC HOLLOW CYLINDER

The problem of determining the temperature field that does not cause thermal stresses in a finite hollow axisymmetric cylinder with material characteristics depending on two coordinates is considered. Convective heat exchange takes place between the cylinder and the medium. The steady-state heat transfer in the cylinder is modeled by the Fourier's law. An exact analytical solution of the problem is obtained in terms of the normal Gaussian distribution functions for two-component functionally graded materials with thermophysical parameters described by the simple mixture model. It is shown that such a solution exists with certain relations between the coefficients of linear thermal expansion and thermal conductivity of the components with the equality of ambient temperatures at the intersections of the cylinder surfaces. Calculations indicate the possibility of ensuring the absence of thermal stresses in the cylinder, made of real materials, with temperature differences between the surfaces of the cylinder of several hundred degrees.

Key words: *axisymmetric cylinder, functionally graded materials, thermal stresses, absence of stresses, inverse problem, analytical solutions, optimization, necessary and sufficient conditions.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.10.20