

**ВПЛИВ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ І ТЕМПЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ
НА РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ У ПЛОЩИНІ З'ЄДНАННЯ ДВОХ РІЗНИХ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПІВПРОСТОРІВ**

Досліджено вплив зосереджених сил і джерел тепла на розподіл напружень у площині з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів. Для цього побудовано фундаментальні розв'язки для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору, який знаходиться під дією зосереджених нормальних і дотичних сил, а також зосереджених джерел тепла. Явні вирази для них отримано шляхом зведення проблеми до матричної задачі Рімана в просторі узагальнених функцій повільного зростання, для якої записано точні розв'язки. В результаті отримано розподіл нормальних напружень в міжфазній площині для різних комбінацій трансверсально-ізотропних матеріалів за наявності однієї або двох зосереджених сил, а також за наявності зосереджених джерел тепла і зосереджених сил. Числовими розрахунками встановлено значний вплив на поле напружень у міжфазній площині термopружних характеристик вибраних матеріалів трансверсально-ізотропних півпросторів та їхніх комбінацій при дії декількох зосереджених сил і зосереджених джерел тепла.

Ключові слова: фундаментальні розв'язки, матрична задача Рімана, трансверсально-ізотропний неоднорідний простір, розподіл напружень, міжфазна площина.

Міжфазні області, тобто області з'єднання різних матеріалів, які знаходяться під дією пружних і температурних полів, завжди були предметом досліджень багатьох авторів як області можливого руйнування.

Тому дослідження концентрації напружень поблизу таких областей як міжфазних, так і внутрішніх, скінченних і нескінченних у термopружних полях має важливе практичне значення. Для різних середовищ цим проблемам присвячено чимало робіт. Зокрема, в [3–7] розглянуто задачі стаціонарної термopружності для тіл з теплопроникним дисковим включенням, між поверхнями якого існує неідеальний тепловий контакт, а також задачі з тонким теплоактивним дисковим включенням. Задачі зведено до гіперсингулярних інтегральних рівнянь першого та другого роду, для яких отримано точні розв'язки. Неосесиметричні задачі пружності і термopружності для кусково-однорідних середовищ, які містять міжфазні і внутрішні концентратори напружень різної природи розглядалися в роботах [2, 9–12, 15, 19]. Поставлені там задачі зведено за допомогою методу сингулярних інтегральних співвідношень (СІС) [31] до систем двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) і запропоновано метод їх розв'язування. Подібний підхід застосовано в роботах [8, 13, 14, 20–23] до розв'язання задач про міжфазні і внутрішні дефекти в кусково-однорідних анізотропних середовищах. Аналогічні задачі для кусково-однорідного ізотропного і трансверсально-ізотропного просторів розглядалися також у роботах [35] і [34], відповідно, однак у праці [34] розв'язки мають достатньо громіздку структуру. Функції Гріна для кусково-однорідних трансверсально-ізотропних просторів за наявності зосередженого теплового джерела і за відсутності термодифузії побудовано у [25], а за наявності термодифузії – у [32]. У роботах [24, 33] побудовано функції Гріна для шаруватого термopружного середовища.

Для дослідження міжфазних і внутрішніх дефектів в кусково-однорідних анізотропних середовищах у роботах [17, 18] побудовано фундаментальні розв'язки відповідно для дво- і чотирикомпонентних середовищ. За-

✉krivoy-odessa@ukr.net

дачу побудови фундаментальних розв'язків зведено до матричної задачі Рімана за частиною змінних у просторі $\mathfrak{Z}'(\mathbb{R}^3)$ і запропоновано підхід до її розв'язання. Аналогічний підхід у роботах [16, 26] використано для побудови фундаментальних розв'язків для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору, який перебуває під дією відповідно зосереджених сил або зосереджених джерел тепла.

У цій роботі отримано фундаментальні розв'язки для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору, який перебуває під дією зосереджених сил і зосереджених джерел тепла. За допомогою цих розв'язків досліджено розподіл напружень у міжфазній площині при різних видах силового і температурного навантажень.

1. Постановка задачі. Нехай у довільній точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору діє зосереджена сили $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$, а в довільній точці $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – стаціонарне джерело тепла. Пружно-деформований стан простору описується вектором

$$\mathbf{v} = \{v_k(x, y, z)\}_{k=1, \dots, 9} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}, u, v, w\}. \quad (1)$$

Скориставшись узагальненим законом Гука і рівняннями рівноваги відносно компонент вектора \mathbf{v} , у просторі узагальнених функцій повільного зростання $\mathfrak{Z}'(\mathbb{R}^3)$ запишемо таку крайову задачу:

$$\mathbf{D}[z, \partial_1, \partial_2, \partial_3]\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{v}, \mathbf{F} \in \mathfrak{Z}'(\mathbb{R}^3), \quad (2)$$

$$v_k(x, y, +0) = v_k(x, y, -0), \quad k = 1, \dots, 9, \quad k \neq 1, 2, 6, \quad (3)$$

$$v_k(x, y, x)|_{(x, y, z) \rightarrow \infty} = 0, \quad k = 1, \dots, 9. \quad (4)$$

Тут введено позначення

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{D}_0^\top \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}^\top = \mathbf{F}_0^\top + \mathbf{F}_*^\top,$$

$$\mathbf{F}_0^\top = \{F_{0j}\}^9 = -\delta_0 \|P_1, P_2, P_3, \mathbf{O}_{1 \times 6}\|,$$

$$\mathbf{F}_*^\top = \{F_{*j}\}^9 = \|\mathbf{O}_{1 \times 3}, \beta_1 T, \beta_2 T, \beta_3 T, \mathbf{O}_{1 \times 3}\|,$$

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}_0 = \begin{Bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{Bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{11} & s_{13} \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{Bmatrix} s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{Bmatrix},$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$s_{kj} = \theta(z)s_{kj}^+ + \theta(-z)s_{kj}^-,$$

$\delta_0 = \delta(x - x_0, x - x_0, x - x_0)$ – дельта-функція Дірака; s_{kj}^\pm – коефіцієнти узагальненого закону Гука відповідно для верхнього $z > 0$ і нижнього $z < 0$ півпросторів; $\mathbf{O}_{k \times \ell}$ – нульова матриця розмірності $k \times \ell$.

Розподіл температури T від зосередженого джерела тепла потужністю Q отримано в роботі [15]:

$$T(x, y, z) = \frac{m_{31}}{\sqrt{r_1^2 + (\xi_0 |z - z_1|)^2}} + \frac{m_{32}}{\sqrt{r_1^2 + (\xi_0 (z + z_1))^2}} +$$

$$+ \frac{m_{33}}{\sqrt{r_1^2 + (\xi_0 z + \bar{\xi}_0 z_1)^2}},$$

де

$$m_{31} = \theta(z, z_0)m_{31}^+ + \theta(-z, -z_0)m_{31}^-, \quad m_{32} = \theta(-z, -z_0)m_{32}^- - \theta(z, z_0)m_{32}^+,$$

$$m_{33} = \theta(z, -z_0)m_{33}^+ - \theta(-z, z_0)m_{33}^-, \quad m_{11}^\pm = \frac{\lambda_1^\pm}{\xi_0^\pm},$$

$$m_{13}^\pm = \lambda_1^\pm (\lambda_3^\pm m_1^\mp \pm \frac{m_2^\mp}{\xi_0^\pm}), \quad m_{12}^\pm = \lambda_1^\pm (\lambda_3^\pm m_1^\pm \pm \frac{m_2^\pm}{\xi_0^\pm}), \quad m_{21}^\pm = 1,$$

$$m_{22}^\pm = \frac{\lambda_1^\pm \lambda_3^\pm}{\xi_0^\pm} m_1^\pm \pm \lambda_3^\pm m_2^\pm, \quad m_{23}^\pm = \frac{\lambda_1^\pm \lambda_3^\pm}{\xi_0^\pm} m_1^\mp \pm \lambda_3^\pm m_2^\mp, \quad m_{31}^\pm = \frac{1}{\lambda_3^\pm \xi_0^\pm},$$

$$m_{32}^\pm = \lambda_3^\pm m_1^\pm \pm \frac{m_2^\pm}{\xi_0^\pm}, \quad m_{33}^\pm = \lambda_3^\pm m_1^\mp + \frac{m_2^\mp}{\xi_0^\pm}, \quad \xi_0^\pm = \sqrt{\lambda_1^\pm / \lambda_3^\pm},$$

$$\xi_0 = \theta(z, z_0)\xi_0^+ + \theta(-z, -z_0)\xi_0^-,$$

$$\bar{\xi}_0 = \theta(z, z_0)\xi_0^+ + \theta(z, -z_0)\xi_0^+ + \theta(-z, -z_0)\xi_0^- + \theta(-z, z_0)\xi_0^-,$$

$$\bar{\bar{\xi}}_0 = \theta(z, z_0)\xi_0^- - \theta(z, -z_0)\xi_0^- + \theta(-z, -z_0)\xi_0^+ - \theta(-z, z_0)\xi_0^+,$$

$$Q = \theta(z, z_1)Q^+ + \theta(-z, -z_1)Q^-, \quad \lambda_i = \lambda_i^+ \theta(x_3) + \lambda_i^- \theta(-x_3), \quad i = 1, 2, 3,$$

λ_i^\pm – коефіцієнти теплопровідності для верхнього $z > 0$ і нижнього $z < 0$ півпросторів відповідно, $r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$.

2. Побудова розв'язку задачі. Розв'язки поставленої задачі, з огляду на її лінійність, можна подати так:

$$v_k(x, y, z) = -\sum_{j=1}^3 P_j w_{kj} + \sum_{j=4}^6 w_{kj} * F_{*j}, \quad (5)$$

де функції $w_{kj}(x, y, z) \in \mathfrak{Z}'(\mathbb{R}^3)$ – компоненти системи фундаментальних розв'язків $\mathbf{w}_j = \{w_{kj}\}_{k=1}^9$, $j = 1, 2, \dots, 6$, задачі (2)–(4), тобто \mathbf{w}_j є розв'язками системи крайових задач

$$\mathbf{D}[z, \partial_1, \partial_2, \partial_3] \mathbf{w}_j = \mathbf{f}^0, \quad \mathbf{w}_j, \mathbf{f}^0 \in \mathfrak{Z}'(\mathbb{R}^3), \quad (6)$$

$$w_{kj}(x, y, +0) = w_{kj}(x, y, -0), \quad k = 1, \dots, 9, \quad k \neq 1, 2, 6, \quad (7)$$

$$w_{kj}(x, y, x)|_{(x, y, z) \rightarrow \infty} = 0, \quad k = 1, \dots, 9, \quad (8)$$

де

$$\mathbf{f}^0 = \{\delta_{kj} \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\}_{k=1}^9,$$

δ_{kj} – символ Кронекера.

Компоненти векторів \mathbf{w}_j допускають подання

$$w_{kj} = \theta(z)w_{kj} + \theta(-z)w_{kj} = w_{kj}^+ + w_{kj}^-,$$

де $w_{kj}^\pm \in \mathfrak{F}'(\mathbb{R}_\pm^3)$, $\mathbb{R}_\pm^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_\pm$. Застосувавши до матричного рівняння (6) оператор тривимірного перетворення Фур'є F_3 із $\mathfrak{F}'(\mathbb{R}^3)$, враховуючи рівності (7), умови (8) і результати робіт [8–23], відносно $W_{kj}^\pm(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = F_3[w_{kj}^\pm] \in \mathfrak{F}'(\mathbb{R}^3)$ отримаємо таке матричне рівняння:

$$\mathbf{M}^+ \mathbf{W}_j^+ = \mathbf{M}^- \mathbf{W}_j^- + \mathbf{F}_j^0, \quad \mathbf{W}_j^\pm, \mathbf{F}_j^0 \in \mathfrak{F}'(\mathbb{R}^3), \quad j = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Тут позначено

$$\mathbf{W}_j^\pm = \{W_{kj}^\pm\}_{k=1}^9, \quad \mathbf{M}^\pm = \mathbf{D}[\pm 0, -i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3], \quad \mathbf{F}_j^0 = \{\delta_{kj}e_0\}_{k=1}^9,$$

де $e_0 = \exp(i\alpha_1 x_0 + i\alpha_2 y_0 + i\alpha_3 z_0)$.

Враховуючи властивості узагальнених функцій і застосовуючи методику робіт [8–23], отримаємо розв'язок крайові задачі (9) і після застосування оберненого перетворення Фур'є знаходимо компоненти векторів $\mathbf{w}_j = \{w_{kj}\}_{k=1}^9$. Далі, застосувавши формулу (5), перші три компоненти вектора $\mathbf{v} = \{v_k(x, y, z)\}_{k=1}^9$ запишемо так:

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \sum_{n=1}^3 \left(\frac{-R_{1,n}^0}{\sqrt{r_1^2 + (\zeta_n^1)^2}} + \frac{\omega_{1,n}}{\sqrt{r_1^2 + \zeta_{n,0}^1 (\zeta_{n,0}^1)^2}} \right) + \sum_{n,m=1}^3 \frac{\alpha_{1,n,m}}{\sqrt{r_1^2 + (\zeta_{n,m}^1)^2}} + \\ & + \sum_{j=1}^2 P_j \mathfrak{D}_{2j} \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{R_{1,2,n}^*}{(r_0^2 + (\zeta_n^0)^2)^{3/2}} + \sum_{n,m=1}^2 \frac{\beta_{1,n,m}^2}{(r_0^2 + (\zeta_{n,m}^0)^2)^{3/2}} \right\} - \\ & - P_3 \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{|z - z_0| \tilde{R}_{1,1,n}^*}{(r_0^2 + (\zeta_n^0)^2)^{3/2}} - \sum_{n,m=1}^2 \frac{z \tilde{\beta}_{1,n,m}^1 + z_0 \tilde{\beta}_{1,n,m}^1}{(r_0^2 + (\zeta_{n,m}^0)^2)^{3/2}} \right\}, \\ \tau_{xz} = & \mathfrak{D}_{11} \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{R_{2,n}^0 (r_0^2 + (\zeta_n^1)^2)^{-1/2}}{\zeta_n^1 + \sqrt{r_0^2 + (\zeta_n^1)^2}} - \frac{\omega_{2,n} (r_0^2 + (\zeta_{n,0}^1)^2)^{-1/2}}{\zeta_{n,0}^1 + \sqrt{r_0^2 + (\zeta_{n,0}^1)^2}} - \right. \\ & \left. - \sum_{n,m=1}^3 \frac{\alpha_{2,n,m} (r_0^2 + (\zeta_{n,m}^1)^2)^{-1/2}}{\zeta_{n,m}^1 + \sqrt{r_0^2 + (\zeta_{n,m}^1)^2}} \right\} + \\ & + \partial_2 \sum_{j=1}^2 P_j \mathfrak{D}_{1j} \left\{ \frac{(-1)^{j-1} S_{11} (r_0^2 + (\zeta_0^0)^2)^{-1/2}}{(\zeta_0^0 + (r_0^2 + (\zeta_0^0)^2)^{1/2})} + \right. \\ & \left. + \frac{(-1)^{j-1} \tilde{\beta}_1 (r_0^2 + \zeta_{0,0}^2)^{-1/2}}{\zeta_{0,0} + \sqrt{r_0^2 + \zeta_{0,0}^2}} \right\} + \\ & + \partial_1 \mathfrak{D}_{2j} \sum_{n,m=1}^2 \left\{ \frac{-R_{2,2,n}^* (r_0^2 + (\zeta_n^0)^2)^{-1/2}}{\zeta_n^0 + \sqrt{r_0^2 + (\zeta_n^0)^2}} + \right. \\ & \left. + \frac{\beta_{2,n,m}^2 (r_0^2 + (\zeta_{n,m}^0)^2)^{-1/2}}{\zeta_{n,m}^0 + \sqrt{r_0^2 + (\zeta_{n,m}^0)^2}} \right\} \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{R_{2,1,n}^*}{(r_0^2 + (\zeta_n^0)^2)^{3/2}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n,m=1}^2 \frac{\beta_{q,n,m}^1}{(r_0^2 + \zeta_{n,m}^2)^{3/2}} \Big\}, \\
\tau_{yz} = & \mathfrak{G}_{12} \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{R_{2,n}^0 (r_0^2 + (\zeta_n^1)^2)^{-1/2}}{\zeta_n^1 + \sqrt{r_0^2 + (\zeta_n^1)^2}} - \sum_{n=1}^3 \frac{\Omega_{2,n} (r_0^2 + (\zeta_{n,0}^1)^2)^{-1/2}}{\zeta_{n,0}^{*,1} + \sqrt{r_0^2 + (\zeta_{n,0}^1)^2}} - \right. \\
& \left. - \sum_{n,m=1}^3 \frac{\alpha_{2,n,m} (r_0^2 + (\zeta_{n,m}^0)^2)^{-1/2}}{\zeta_{n,m}^{*,0} + \sqrt{r_0^2 + (\zeta_{n,m}^0)^2}} \right\} + \\
& + \sum_{j=1}^2 P_j \left\{ \partial_1 \mathfrak{G}_{1j} \left\{ \frac{(-1)^{j-1} \mathcal{S}_{11} (r_0^2 + (\zeta_n^0)^2)^{-1/2}}{(\zeta_n^0 + r_0^2 + (\zeta_n^0)^2)^{1/2}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(-1)^{j-1} \tilde{\beta}_1 (r_0^2 + (\zeta_{0,0}^0)^2)^{-1/2}}{\zeta_{0,0} + \sqrt{r_0^2 + (\zeta_{0,0}^0)^2}} \right\} + \right. \\
& \left. + \partial_2 \mathfrak{G}_{2j} \sum_{n,m=1}^2 \left\{ \frac{-R_{2,2,n}^* (r_0^2 + (\zeta_n^0)^2)^{-1/2}}{\zeta_n^0 + \sqrt{r_0^2 + (\zeta_n^0)^2}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\beta_{2,n,m}^2 (r_0^2 + (\zeta_{n,m}^0)^2)^{-1/2}}{\zeta_{n,m}^{*,0} + \sqrt{r_0^2 + (\zeta_{n,m}^0)^2}} \right\} \right\} + \\
& + \mathfrak{G}_{12} P_3 \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{R_{2,1,n}^*}{(r_0^2 + (\zeta_n^0)^2)^{3/2}} + \sum_{n,m=1}^2 \frac{\beta_{q,n,m}^1}{(r_0^2 + (\zeta_{n,m}^0)^2)^{3/2}} \right\},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
q_j^\pm(\alpha_3, r) &= g_{j2}^{*\pm}(\alpha_3, r) \gamma_1^\pm r^2 + g_{j4}^{*\pm}(\alpha_3, r) \gamma_2^\pm, \quad j = 1, \dots, 4, \\
R_{1,n}^{0,+} &= \frac{q_1^+(-i\xi_n^+, 1) \tau^{++}(-i\xi_n^+, 1)}{\xi_n^+ h_n^+}, \quad \bar{R}_{1,n}^{0,+} = \frac{q_1^+(i\xi_n^+, 1) \tau^{++}(i\xi_n^+, 1)}{\xi_n^+ h_n^+}, \\
\tau^{++}(\alpha_3, r) &= (-i\alpha_3) \lambda_3^+ m_1^+ - r m_2^+, \quad \tau^{-+}(\alpha_3, r) = (-i\alpha_3) \lambda_3^- m_1^+ - r m_2^+, \\
\tau^{+-}(\alpha_3, r) &= (-i\alpha_3) \lambda_3^+ m_1^- - r m_2^-, \\
\tilde{\beta}_{1,n}^- &= \frac{q_1^-(i\xi_n^\pm, 1) \tau^{-+}(i\xi_n^-, 1)}{\xi_n^- h_n^-}, \quad \tilde{\beta}_{1,n}^{+-} = \frac{q_1^+(-i\xi_n^+, 1) \tau^{+-}(-i\xi_n^+, 1)}{\xi_n^+ h_n^+}, \\
\tilde{\beta}_{j,n}^{++} &= \frac{q_j^+(-i\xi_n^+, 1) \tau^{++}(-i\xi_n^+, 1)}{\xi_n^+ h_n^+}, \quad j = 1, \dots, 4, \quad h_n^\pm = \prod_{\ell=1, \ell \neq n}^3 (\xi_n^\pm)^2 - (\xi_\ell^\pm)^2, \\
\tau^{--}(\alpha_3, r) &= (-i\alpha_3) \lambda_3^- m_1^- - r m_2^-, \quad \tilde{\beta}_{1,n}^{--} = \frac{q_1^-(i\xi_n^-, 1) \tau^{--}(i\xi_n^-, 1)}{\xi_n^- h_n^-}, \\
R_{j,k}^\pm &= \sum_{n=1}^2 R_{j,k,n}^{*,\pm}, \quad \beta_j^{\pm\pm} = \sum_{n=1}^3 \tilde{\beta}_{j,n}^{\pm\pm}, \quad \beta_j^{\pm\mp} = \sum_{n=1}^3 \tilde{\beta}_{j,n}^{\pm\mp}, \\
\mathbf{A}_0 &= \{a_{k,j}\}_{k,j=1,\dots,4} = \mathbf{N}^+ + \bar{\mathbf{N}}^-, \quad \mathbf{A}_0^{-1} = \{a_{kj}^*\}_{k,j=1,\dots,4} \\
\mathbf{N}^\pm &= \{R_{j,k}^\pm\}_{k,j=1,\dots,4}, \quad \alpha_{j,m}^+ = \sum_{k=1}^4 a_{jk}^* \bar{R}_{k,n}^{0,+},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{j,m}^- &= \sum_{k=1}^4 a_{jk}^* R_{k,m}^{0,-}, & \mu_j^+ &= \sum_{k=1}^4 a_{jk}^* \beta_k^+, & \mu_j^- &= \sum_{k=1}^4 a_{jk}^* \beta_k^-, \\
\beta_j^+ &= \beta_j^{++} + \beta_j^{-+}, & \beta_j^- &= \beta_j^{--} + \beta_j^{+-}, & \mathfrak{G}_{1j} &= \frac{(y-y_0)^{2-j}}{(x-x_0)^{1-j}}, \\
\mathfrak{G}_{2j} &= \frac{(x-x_0)^{2-j}}{(y-y_0)^{1-j}}, & \alpha_{j,n,m}^{++} &= \sum_{k=1}^4 R_{j,k,n}^{*,+} \alpha_{k,m}^+, & \alpha_{j,n,m}^{+-} &= \sum_{k=1}^4 R_{j,k,n}^{*,+} \alpha_{k,m}^+, \\
\mu_j^{++} &= \sum_{k=1}^4 R_{j,k,n}^{*,+} \mu_j^+, & \mu_{j,n}^{+-} &= \sum_{k=1}^4 R_{j,k,n}^{*,+} \mu_j^-, & n &= 1, 2, \\
\mu_{j,n}^{+-} &= 0, & n &= 3, & \alpha_{j,n,m}^{--} &= \sum_{k=1}^4 R_{j,k,n}^{*,-} \alpha_{k,m}^+, & \alpha_{j,n,m}^{-+} &= \sum_{k=1}^4 R_{j,k,n}^{*,-} \alpha_{k,m}^+, \\
\mu_{j,n}^{--} &= \sum_{k=1}^4 R_{j,k,n}^{*,-} \mu_j^-, & \mu_{j,n}^{-+} &= \sum_{k=1}^4 R_{j,k,n}^{*,-} \mu_j^+, & n &= 1, 2, \\
\mu_{j,n}^{--} &= \mu_{j,n}^{-+} = 0, & n &= 3, & \tilde{\omega}_{j,n}^{\pm\pm} &= \tilde{\beta}_{j,n}^{\pm\pm} - \mu_{j,n}^{\pm\pm}, & \tilde{\omega}_{j,n}^{\pm\mp} &= \tilde{\beta}_{j,n}^{\pm\mp} - \mu_{j,n}^{\pm\mp}, \\
\widehat{R}_{j,n}^{0,+} &= \theta(z-z_0) R_{j,n}^{0,+} + \theta(z_0-z) \bar{R}_{j,n}^{0,+}, \\
\bar{R}_{j,n}^{0,-} &= \theta(z-z_0) R_{j,n}^{0,-} + \theta(z_0-z) \bar{R}_{j,n}^{0,-}, \\
\zeta_{n,m}^k &= \widehat{\xi}_n z + \check{\xi}_m z_k, & \zeta_{n,m}^{*,k} &= \widehat{\xi}_n |z| + \check{\xi}_m |z_k|, & \zeta_n^k &= \xi_n |z - z_k|.
\end{aligned}$$

3. Поля напружень і переміщень у площині з'єднання півпросторів.

Поклавши в отриманих виразах $z = 0$, отримаємо розподіл нормальних і дотичних напружень у площині з'єднання півпросторів, коли в довільній точці $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ діє зосереджена сила $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$, ($P_k \geq 0$), а в довільній точці $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – стаціонарне джерело тепла:

$$\begin{aligned}
\sigma_z(x, y) &= -\sum_{n=1}^3 \frac{R_{1,n}^0}{\sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}} + \frac{\omega_1}{\sqrt{r_0^2 + (\xi_0 z_0)^2}} + \sum_{n=1}^3 \frac{\alpha_{1,n}}{\sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}} + \\
&+ \sum_{j=1}^2 P_j \sum_{n=1}^2 B_{1,n} \frac{\mathfrak{G}_{2j} z_0}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}} - P_3 \sum_{n=1}^2 \frac{A_{1,n} z_0}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}}, \\
\tau_{xz}(x, y) &= \mathfrak{G}_{11} \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{R_{2,n}^0 (r_1^2 + (\xi_n z_1)^2)^{-1/2}}{\xi_n |z_1| + \sqrt{r_1^2 + (\xi_n z_1)^2}} - \frac{\omega_2 (r_1^2 + (\xi_1 z_0)^2)^{-1/2}}{\check{\xi}_0 |z_0| + \sqrt{r_1^2 + (\xi_0 z_1)^2}} - \right. \\
&- \left. \sum_{n=1}^3 \frac{\alpha_{2,n} (r_1^2 + (\xi_n z_1)^2)^{-1/2}}{\xi_n |z_1| + \sqrt{r_1^2 + (\xi_n z_1)^2}} \right\} + P_3 \sum_{n=1}^2 \frac{A_{2,n} (x - x_0)}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}} - \\
&- \sum_{j=1}^2 P_j \left\{ \partial_2 \frac{\mathfrak{G}_{1j} (-1)^j S_1 (r_0^2 + (\xi z_0)^2)^{-1/2}}{\xi |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi z_0)^2}} + \right. \\
&+ \left. \partial_2 \sum_{n=1}^2 \frac{\mathfrak{G}_{2j} B_{2,n} (r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{-1/2}}{\xi_n |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz}(x, y) = \mathfrak{G}_{12} & \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{R_{2,n}^0 (r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{-1/2}}{\xi_n |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}} - \frac{\omega_2 (r_0^2 + (\tilde{\xi}_0 z_0)^2)^{-1/2}}{\tilde{\xi}_0 |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\tilde{\xi}_0 z_0)^2}} - \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^3 \frac{\alpha_{2,n} (r_0^2 + (\tilde{\xi}_n z_0)^2)^{-1/2}}{\tilde{\xi}_n |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\tilde{\xi}_n z_0)^2}} \right\} + P_3 \sum_{n=1}^2 \frac{A_{2,n} (y - y_0)}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}} - \\ & - \sum_{j=1}^2 P_j \left\{ -\partial_1 \frac{\mathfrak{G}_{1j} (-1)^{3-j} (r_0^2 + (\xi z_0)^2)^{-1/2} \mathcal{S}_1}{\xi |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi z_0)^2}} + \right. \\ & \left. + \partial_2 \sum_{n=1}^2 \frac{\mathfrak{G}_{2j} B_{2,n} (r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{-1/2}}{\xi_n |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}} \right\}, \end{aligned}$$

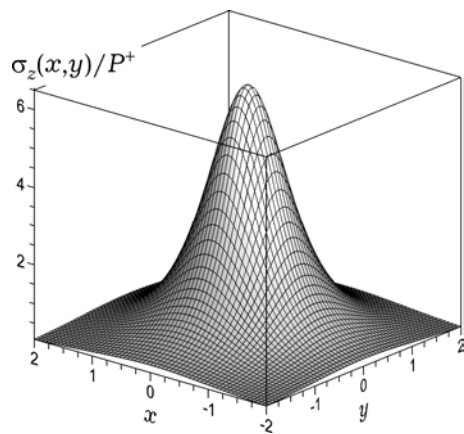
де

$$\begin{aligned} S_p &= \theta(z_0) S_{p1}^+ + \theta(-z_0) S_{p1}^-, \quad A_{p,n} = \theta(z_0) A_{p,n}^+ + \theta(-z_0) A_{p,n}^-, \quad p = 1, 2, \\ B_{p,n} &= \theta(z_0) B_{p,n}^+ + \theta(-z_0) B_{p,n}^-, \quad A_{1,n}^+ = -\hat{R}_n^+ + \hat{\beta}_n^{++}, \quad A_{1,n}^- = -\hat{\beta}_n^{+-}, \\ \hat{\beta}_n^{\pm\pm} &= \sum_{m=1}^2 \hat{\beta}_{m,n}^{\pm\pm}, \quad \tilde{\beta}_n^{\pm\mp} = \sum_{m=1}^2 \tilde{\beta}_{m,n}^{\pm\mp}, \quad \beta_{p,k,n}^{\pm\pm} = \sum_{m=1}^2 \beta_{k,m,n}^{p,\pm\pm}, \\ \beta_{p,k,n}^{\pm\mp} &= \sum_{m=1}^2 \beta_{k,m,n}^{p,\pm\mp}, \quad A_{k,n}^+ = -R_{k,1,n}^- + \beta_{1,k,n}^{++}, \quad A_{k,n}^- = -\beta_{1,k,n}^{+-}, \quad k = 2, 3, 4, \\ B_{k,n}^+ &= -R_{k,2,n}^+ + \beta_{2,k,n}^{++}, \quad B_{k,n}^- = -\beta_{2,k,n}^{+-}, \quad k = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

4. Результати обчислень. На рис. 1, 3, 5, 7, 9, зображено графіки розподілу відношення $\sigma_z(x, y)/P^+$ у площині $z = 0$ для комбінацій трансверсально-ізотропних матеріалів [1] **m1–m2**, а на рис. 2, 4, 6, 8, 10 – для комбінації матеріалів **m3–m4**. Тут матеріал **m1** – кераміка А (BaTiO_3), матеріал **m2** – кераміка В ($\text{BaTiO}_3 + 5\% \text{CaTiO}_3$), матеріал **m3** – кадмій (Cd), матеріал **m4** – магній (Mg). При цьому значення коефіцієнтів теплопровідності (в $[\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})]$) є такими:

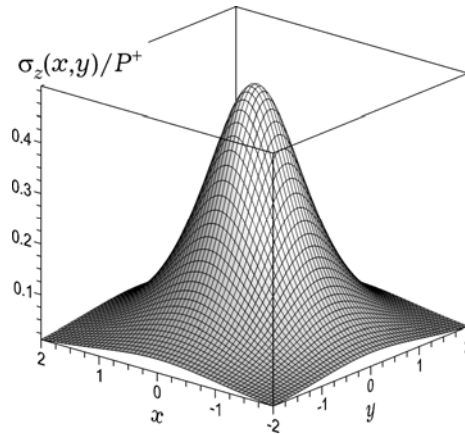
$$\begin{aligned} \text{для матеріалу } \mathbf{m1}: & \quad \lambda_1 = 2.61 \quad \text{і} \quad \lambda_3 = 3.67; \\ \text{для матеріалу } \mathbf{m2}: & \quad \lambda_1 = 2.85 \quad \text{і} \quad \lambda_3 = 4.6; \\ \text{для матеріалу } \mathbf{m3}: & \quad \lambda_1 = 93 \quad \text{і} \quad \lambda_3 = 94; \\ \text{для матеріалу } \mathbf{m4}: & \quad \lambda_1 = 156 \quad \text{і} \quad \lambda_3 = 157. \end{aligned}$$

На рис. 1, 2 наведено графіки за наявності у верхньому півпросторі в точці $M(0, 0, 1.2)$ зосередженої сили $\mathbf{P} = (0, 0, P^+)$, а на рис. 3, 4 – за наявності двох однакових зосереджених сил $\mathbf{P} = (0, 0, P^+)$ у точках $M_1(0, 0, 1.2)$ і $M_2(0.5, 0.5, -1.2)$. На рис. 5, 6 подано графіки за наявності у верхньому півпросторі в точці $M_0(0, 0, 1)$ зосередженого джерела тепла потужності Q^+ , а на рис. 7, 8 – за наявності двох зосереджених джерел тепла потужностей $2Q^+$ і Q^+ відповідно в точках $M_3(1, -1, 1)$ і $M_4(-1, 1, -1)$. На рис. 9, 10 зображено графіки за наявності у верхньому півпросторі в точці $M(1, 1, 1.2)$ зосередженої сили $\mathbf{P} = (0, 0, P^+)$, а в нижньому в точці $M_0(0.5, 0.5, -1)$ – зосередженого джерела тепла потужності $Q = P^+$.



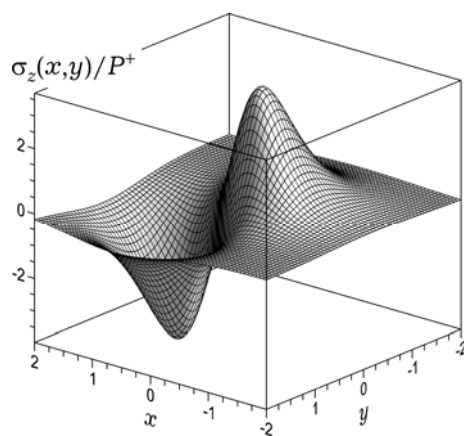
m1-m2

Рис. 1



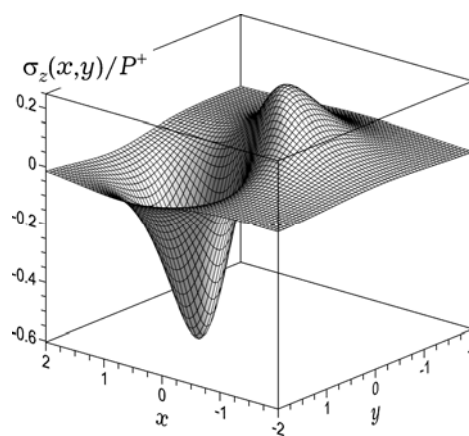
m3-m4

Рис. 2



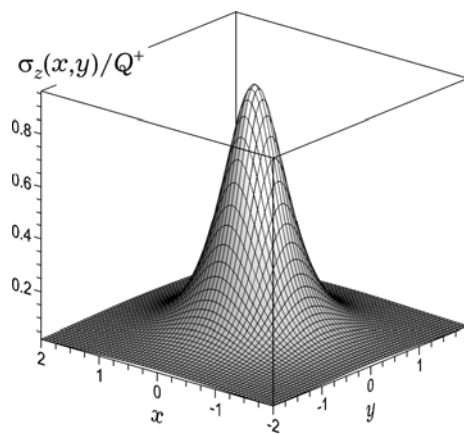
m1-m2

Рис. 3



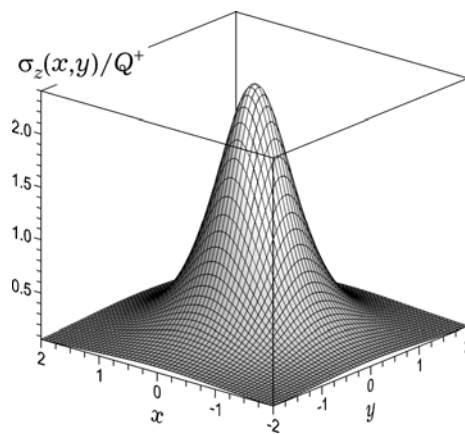
m3-m4

Рис. 4



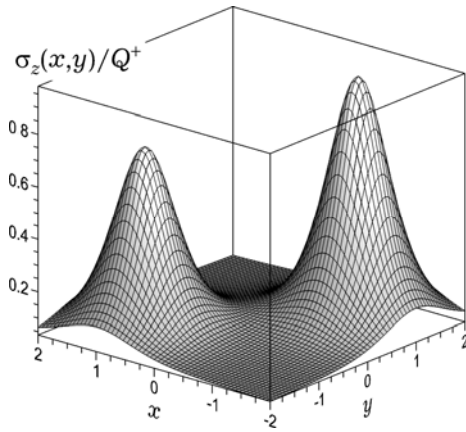
m1-m2

Рис. 5



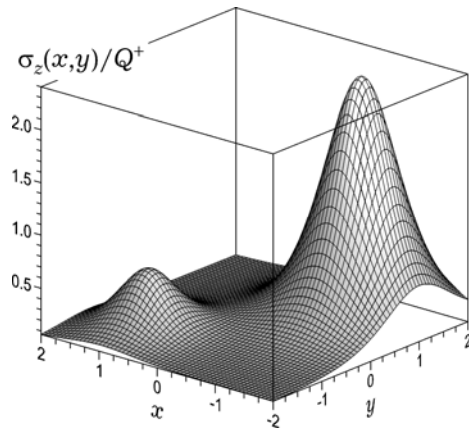
m3-m4

Рис. 6



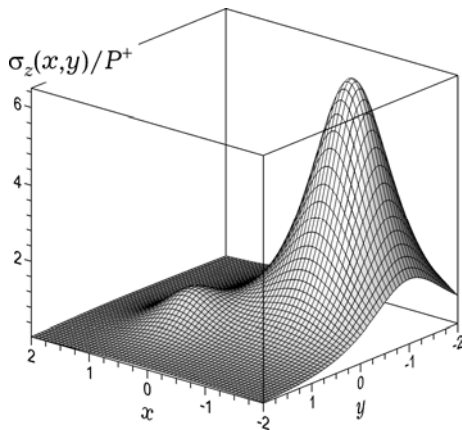
m1-m2

Рис. 7



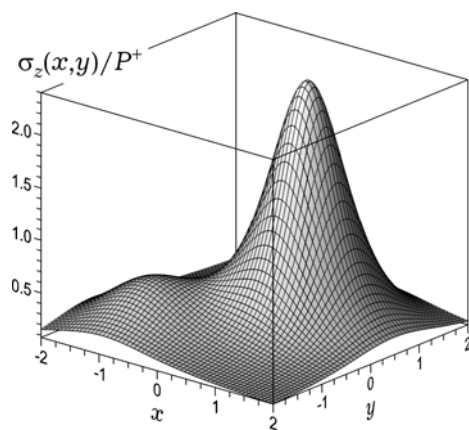
m3-m4

Рис. 8



m1-m2

Рис. 9



m3-m4

Рис. 10

Висновки. Отримані фундаментальні розв'язки дозволили дослідити поля нормальних напружень у площині з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів за наявності однієї або декількох зосереджених сил або джерел тепла. Встановлено, що на розподіл нормальних напружень суттєво впливають кількість зосереджених сил і джерел тепла і їх розміщення, а також значення термопружних сталей матеріалів і їхніх співвідношень. Зокрема, нормальні напруження за наявності однієї зосередженої сили у верхньому півпросторі більші у випадку комбінації матеріалів, для якої коефіцієнт $\zeta_3 = s_{33}^+/s_{33}^-$ є меншим. Це видно із рис. 1 і 2 (відповідно для $\zeta_3 = 0.97$ і $\zeta_3 = 1.92$). Така ж тенденція зберігається і за наявності двох однакових зосереджених сил, розташованих на однаковій відстані від площини з'єднання в різних півпросторах, але друга сила зміщена відносно центра (рис. 3, 4). Але в першому випадку (рис. 3), оскільки коефіцієнт $\zeta_3 = 0.97$ близький до одиниці, спостерігаємо два приблизно однакових піки нормальних напружень. У другому випадку (рис. 4) також бачимо два піки напружень, але оскільки коефіцієнт $\zeta_3 = 1.92$ близький до двох, пік навантаження у нижньому просторі в два рази більший. Аналогічну картину спостерігаємо за наявності тільки зосереджених джерел тепла (рис. 5,

рис. 6), але при цьому більших значень напруження досягають для комбінації матеріалів **m3-m4** (рис. 6). Це пояснюється тим, що коефіцієнти теплопровідності для матеріалів **m3** і **m4** більші, ніж для матеріалів **m1**, **m2**, а коефіцієнт $\xi_3 = \lambda_3^+/\lambda_3^-$ менший для комбінації **m3-m4** ($\xi_3 = 0.599$), ніж для комбінації **m1-m2** ($\xi_3 = 0.797$). Ця закономірність зберігається і за наявності двох джерел тепла, які розташовані в різних півпросторах на однаковій відстані від міжфазної площини симетрично відносно осі Z (рис. 7, рис. 8). Тут бачимо два максимуми нормальних напружень, але для другої комбінації **m3-m4**, оскільки коефіцієнт $\xi_3 = 0.599$ значно менший від одиниці, другий максимум значно менший від першого. За наявності одночасно зосередженої сили і джерела тепла, потужність якого співпадає зі значенням зосередженої сили, для першої комбінації матеріалів (рис. 9) максимальне значення напруження від дії сили значно перевищує максимум напружень від джерела тепла. Для другої комбінації ці максимуми співставні (рис. 10). Це пояснюється тим, що обидва коефіцієнти $\zeta_3 = 1.92$ і $\xi_3 = 0.599$ значно відрізняються від одиниці. Отже, врахування неоднорідності матеріалів значно змінює термопружні поля у міжфазній площині.

Отримані результати мають як самостійне значення, так і дозволяють більш точно формулювати задачі про міжфазні дефекти в кусково-однорідних трансверсально-ізотропних середовищах.

1. Александров К. С., Рыжова Т. В. Упругие свойства кристаллов. Обзор // Кристаллография. – 1961. – **6**, вып. 2. – С. 289–314.
2. Ефимов В. В., Кривой А. Ф., Попов Г. Я. Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 2. – С. 42–58.
Te same: Efimov V. V., Krivoi A. F., Popov G. Ya. Problems on the stress concentration near a circular imperfection in a composite elastic medium // Mech. Solids. – 1998. – **33**, No. 2. – P. 35–49.
3. Кит Г. С., Андрийчук Р. М. Задача стационарной теплопроводности для кусково-однородного простора за тепловиделения у круговой области // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 115–122.
4. Кит Г. С., Сушко О. П. Задачи стационарной теплопроводности і термопружності для тіла з теплопроникним дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 4. – С. 150–159.
Te same: Kit H. S., Sushko O. P. Problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with a heat permeable disk-shaped inclusion (crack) // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 3. – P. 309–321.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0300-3>.
5. Кит Г. С., Сушко О. П. Осесимметричні задачі стационарной теплопроводности та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 58–70.
Te same: Kit H. S., Sushko O. P. Axially symmetric problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with thermally active or thermally insulated disk inclusion (crack) // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 4. – P. 561–577. – <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0422-7>.
6. Кит Г. С., Сушко О. П. Розподіл стационарной температури та напружень у тілі з теплопроникним дисковим включенням // Методи розв'язування прикл. задач механіки деформівного твердого тіла. – 2009. – Вип. 10. – С. 145–153.
7. Кит Г., Сушко О. Стационарне температурне поле у півбезмежному тілі з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2011. – Вип. 13. – С. 67–80.
8. Кривий О. Ф. Взаємний вплив міжфазних тунельних тріщини і включення в кусково-однорідному анізотропному просторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 4. – С. 118–124.
Te same: Kryvyyi O. F. Mutual influence of an interface tunnel crack and an interface tunnel inclusion in a piecewise homogeneous anisotropic space // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 4. – P. 409–416.

- <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2455-9>.
9. *Кривий О. Ф.* Кругова міжфазна тріщина в неоднорідному трансверсально-ізотропному просторі // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2011. – **47**, № 6. – С. 15–22.
Te same: *Kryvyi O. F.* Interface crack in the inhomogeneous transversely isotropic space // *Mater. Sci.* – 2012. – **47**, No. 6. – P. 726–736.
– <https://doi.org/10.1007/s11003-012-9450-9>.
 10. *Кривий О. Ф.* Міжфазне кругове включення при змішаних умовах взаємодії з кусково-однорідним трансверсально-ізотропним простором // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2011. – **54**, № 2. – С. 89–102.
Te same: *Kryvyi O. F.* Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space // *J. Math. Sci.* – 2012. – **184**, No. 1. – P. 101–119.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0856-6>.
 11. *Кривий О. Ф.* Міжфазне відшароване включення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2014. – **50**, № 2. – С. 77–84.
Te same: *Kryvyi O. F.* Delaminated interface inclusion in a piecewise homogeneous transversely isotropic space // *Mater. Sci.* – 2014. – **50**, No. 2. – P. 245–253.
– <https://doi.org/10.1007/s11003-014-9714-7>.
 12. *Кривий О. Ф.* Сингулярні інтегральні співвідношення і рівняння для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору з міжфазними дефектами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2010. – **53**, № 1. – С. 23–35.
Te same: *Kryvyi O. F.* Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects // *J. Math. Sci.* – 2011. – **176**, No. 4. – P. 515–531.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0419-2>.
 13. *Кривий О. Ф.* Тунельна внутрішня тріщина в кусково-однорідному анізотропному просторі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2012. – **55**, № 4. – С. 54–63.
Te same: *Kryvyi O. F.* Tunnel internal crack in a piecewise homogeneous anisotropic space // *J. Math. Sci.* – 2014. – **198**, No. 1. – P. 62–74.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-014-1773-7>.
 14. *Кривий О. Ф.* Тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2007. – **50**, № 2. – С. 55–65.
 15. *Кривий О. Ф., Морозов Ю. А.* Розв'язок задачі теплопровідності для трансверсально-ізотропного кусково-однорідного простору з двома круговими включеннями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2017. – **60**, № 2. – С. 130–141.
Te same: *Kryvyi O. F., Morozov Yu. A.* Solution of the problem of heat conduction for the transversely isotropic piecewise-homogeneous space with two circular inclusions // *J. Math. Sci.* – 2019. – **243**, No. 1. – P. 162–182.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04533-1>.
 16. *Кривий О. Ф., Морозов Ю. А.* Фундаментальні розв'язки для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного пружного простору // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2020. – **63**, № 1. – С. 122–132.
 17. *Кривой А. Ф.* Произвольно ориентированные дефекты в составной анизотропной плоскости // *Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки*. – 2001. – **6**, вип. 3. – С. 108–115.
 18. *Кривой А. Ф.* Фундаментальное решение для четырехсоставной анизотропной плоскости // *Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки*. – 2003. – **8**, вип. 2. – С. 140–149.
 19. *Кривой А. Ф., Морозов Ю. А.* Решение задачи теплопроводности для двух компланарных трещин в составном трансверсально-изотропном пространстве // *Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки*. – 2014. – № 1. – С. 76–83.
 20. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Межфазные туннельные трещины в составном анизотропном пространстве // *Прикл. математика и механика*. – 2008. – **72**, № 4. – С. 689–700.
Te same: *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space // *J. Appl. Math. Mech.* – 2008. – **72**, No. 4. – P. 499–507.
– <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.08.001>.
 21. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве // *Прикл. механика*. – 2008. – **44**, № 6. – С. 36–45.

- Te same: *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, No. 6. – P. 626–634. – <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0084-4>.
22. *Кривої А. Ф., Попов Г. Я., Радиолло М. В.* Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости // *Прикл. математика и механика.* – 1986. – **50**, № 4. – С. 622–632.
Te same: *Krivoi A. F., Popov G. Ya., Radiollo M. V.* Certain problems of an arbitrarily oriented stringer in a composite an isotropic plane // *J. Appl. Math. Mech.* – 1986. – **50**, No. 4. – P. 475–483.
– [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(86\)90012-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(86)90012-2).
23. *Кривої А. Ф., Радиолло М. В.* Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1984. – № 3. – С. 84–92.
24. *Кушнір Р. М., Процюк Ю. Б.* Термопружний стан шаруватих термочутливих тіл обертанія за квадратичної залежності коефіцієнтів теплопровідності // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2010. – **46**, № 1. – С. 7–18.
Te same: *Kushnir R. M., Protsyuk Yu. B.* Thermoelastic state of layered thermo-sensitive bodies of revolution for the quadratic dependence of the heat-conduction coefficients // *Mater Sci.* – 2011. – **46**, No. 1. – P. 1–15.
– <https://doi.org/10.1007/s11003-010-9258-4>.
25. *Hou P.-F., Leung A. T. Y., He Y.-J.* Three-dimensional Green's functions for transversely isotropic thermoelastic bimaterials // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – **45**, No. 24. – P. 6100–6113. – doi:10.1016/j.ijsolstr.2008.07.022.
26. *Кривуї О. Ф., Морозов Ю. О.* The fundamental solution of the problem of thermoelasticity for a piecewise homogeneous transversely isotropic elastic space // *Дослідження в математиці і механіці.* – 2020. – **25**, No. 1(35). – С. 16–30.
27. *Кривуї О. Ф., Морозов Ю.* Thermally active interphase inclusion in a smooth contact conditions with transversely isotropic half-spaces // *Frattura ed Integrita Strutturale.* – 2020 – **14**, No. 52. – P. 33–50.
– doi: 10.3221/IGF-ESIS.52.04.
28. *Кривуї О. Ф., Морозов Ю.* The influence of mixed conditions on the stress concentration in the neighborhood of interfacial inclusions in an inhomogeneous transversely isotropic space // *Proc. 3rd Int. conf. Theor. Appl. Exper. Mech., ICTAEM-2020. Structural Integrity / E. Gdoutos, M. Konsta-Gdoutos (eds).* – Vol. 16. – P. 204–209.
– https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_38.
29. *Кривуї О. Ф., Морозов Ю.* The problem of stationary thermoelasticity for a piecewise homogeneous transversely isotropic space under the influence of a heat flux specified at infinity is considered // *J. Phys.: Conf. Ser.*, **1474** 012025. – VI Int. conf. «Topical Problems of Continuum Mechanics», 1-6 Oct. 2019, Dilijan, Armenia.
– doi:10.1088/1742-6596/1474/1/012025.
30. *Кривуї О. Ф., Морозов Ю. О.* Interphase circular inclusion in a piecewise-homogeneous transversely isotropic space under the action of a heat flux // *Proc. 1st Int. conf. Theor. Appl. Exper. Mech., ICTAEM-2018 / E. Gdoutos (ed).* – P. 394–396. – https://doi.org/10.1007/978-3-319-91989-8_94.
31. *Кривуї О.* The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium // *Oper. Theory: Adv. Appl.* – 2009. – **191**. – P. 395–406.
– https://doi.org/10.1007/978-3-7643-9921-4_25.
32. *Kumar R., Gupta V.* Green's function for transversely isotropic thermoelastic diffusion bimaterials // *J. Therm. Stresses.* – 2014. – **37**, No. 10. – P. 1201–1229.
– <https://doi.org/10.1080/01495739.2014.936248>.
33. *Kushnir R., Protsiuk B.* A method of the Green's functions for quasistatic thermoelasticity problems in layered thermosensitive bodies under complex heat exchange // *Oper. Theory: Adv. Appl.* – 2009. – **191**. – P. 143–154.
– doi.org/10.1007/978-3-7643-9921-4_9.
34. *Li X.-F., Fan T.-Y.* The asymptotic stress field for a ring circular inclusion at the interface of two bonded dissimilar elastic half-space materials // *Int. J. Solids Struct.* – 2001. – **38**, No. 44–45. – P. 8019–8035.
– [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00010-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00010-5).
35. *Yue Z. Q.* Elastic fields in two joined transversely isotropic solids due to concentrated forces // *Int. J. Eng. Sci.* – 1995 – **33**, No. 3. – P. 351–369.
– [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)00063-P](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)00063-P).

**THE INFLUENCE OF CONCENTRATED FORCES AND HEAT SOURCES
ON THE DISTRIBUTION OF STRESSES IN THE INTERFACE OF TWO DIFFERENT
TRANSVERSELY ISOTROPIC HALF-SPACES**

The influence of concentrated forces and heat sources on the stress distribution in the interface of two different transversely isotropic half-spaces are studied. For this purpose, fundamental solutions are constructed for a piecewise homogeneous transversely isotropic space, subjected to the concentrated normal and tangential forces, as well as concentrated heat sources. Explicit expressions for them are obtained by reducing the problem to the Riemann matrix problem in the space of generalized slowly increasing functions, for which exact solutions are written. As a result, the distribution of normal stresses in the interfacial plane for different combinations of transversely isotropic materials in the presence of one or two concentrated forces, as well as in the presence of concentrated heat sources and concentrated forces, is obtained. The important influence of thermomechanical characteristics of chosen materials of transversely isotropic half-spaces and their combinations under action of several concentrated forces and concentrated heat sources on the stress field in the interfacial plane is established by numerical calculations.

Keywords: *fundamental solutions, Riemann matrix problem, transversely isotropic inhomogeneous space, stress distribution, interfacial plane.*

¹Нац. ун-т «Одеська морська акад.», Одеса,

²Одес. нац. політехн. ун-т, Одеса

Одержано

24.01.21