УДК 539.3

Г. С. Кіт[1], Н. М. Іваська[1,2✉]

ДВОВИМІРНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З ВІЛЬНОЮ, ЖОРСТКОЮ, ГЛАДКО АБО ГНУЧКО ЗАКРІПЛЕНОЮ МЕЖЕЮ ЗА ДІЇ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА

За дії стаціонарного джерела тепла побудовано функції Буссінеска задачі термопружності за плоскої деформації півбезмежного тіла з вільною, жорсткою, гладко або гнучко закріпленою межею, на якій підтримується нульова температура або теплоізоляція. Побудову функцій Буссінеска зведено до розв'язування крайових задач для гармонічних функцій у півпросторі. Отримано співвідношення для переміщень і напружень, які є відповідними функціями Ґріна і можуть бути використані при визначенні термопружного стану півпростору за тепловиділення у стрічковій області.

Ключові слова: *півпростір, плоска деформація, термопружність, стаціонарне джерело тепла, функції Буссінеска, функції Ґріна.*

У працях [1–4] визначено двовимірне стаціонарне температурне поле і термопружний стан півбезмежних тіл за тепловиділення у стрічкових областях, розміщених у паралельних [1, 3] або перпендикулярних [2, 4] до межі тіл площинах, за нульової температури на межі. Для визначення температурного поля використано потенціали простого шару, густинами яких є джерела тепла на місці тепловиділення. Для визначення густини джерел тепла в обмежених областях побудовано інтегральні рівняння із сингулярними та регулярними ядрами, що враховують взаємодію включень з межею тіла.

При розв'язуванні задачі термопружності використано термопружні потенціали переміщень у безмежному тілі з дзеркально розташованими відносно межі півпростору джерелами тепла. Для виконання крайових умов на вільній від навантажень межі тіла побудовано функції напружень Ері та функції Буссінеска [2, 3], а на жорстко, гнучко або гладко закріпленій – тільки функції Буссінеска [1, 3–4], виражені через суму двох гармонічних функцій, побудова яких зводиться до розв'язування крайових задач для гармонічних функцій у півпросторі. Обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень в околі теплоактивної тріщини [2].

У цій роботі в замкнутому вигляді побудовано функції Буссінеска задач термопружності для плоскої деформації півбезмежного тіла з вільною, жорсткою, гладко або гнучко закріпленою межею, на якій задано нульову температуру або теплоізоляцію.

1. Формулювання задачі. Розглянемо півбезмежне ізотропне тіло з вільною, жорсткою, гладко або гнучко закріпленою межею, на якій підтримується нульова (стала) температура або теплоізоляція. Введемо декартову систему координат xOy з початком на межі півпростору $y = 0$. Тоді граничні умови для температури $t(x, y)$ мають вигляд

$$t(x,y)\big|_{y=0} = 0 \qquad \text{або} \qquad \left.\frac{\partial t(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 . \tag{1}$$

Нехай у точці тіла $x = \xi$, $y = h$ діє джерело тепла сталої потужності w. Визначимо розподіл температури у півплощині $y \ge 0$. Для цього доповнимо півплощину до повної площини і в точці $x = \xi$, $y = -h$ помістимо стік тепла (для забезпечення нульової температури на межі) або джерело тепла (для теплоізольованої межі) такої ж інтенсивності.

✉ natalya_ivasko@ukr.net

Температуру тіла $t(x,y)$ шукаємо у вигляді логарифмічного потенціалу простого шару:

$$t(x,y) = -\frac{w}{2\pi\lambda}\left(\ln r_1 + (-1)^k \ln r_2\right), \tag{2}$$

де

$$r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-h)^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+h)^2},$$

λ – коефіцієнт теплопровідності; тут і далі $k=1$ відповідає нульовій температурі межі тіла, $k=2$ – її теплоізоляції.

Для розв'язання задачі термопружності компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді суми:

$$u(x,y) = \bar{u}(x,y) + \bar{\bar{u}}(x,y),$$

$$\sigma(x,y) = \bar{\sigma}(x,y) + \bar{\bar{\sigma}}(x,y), \tag{3}$$

де доданки $\bar{u}(x,y)$, $\bar{\sigma}(x,y)$ характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, зумовлений дзеркально розташованими відносно осі Ox джерелами тепла, а доданки $\bar{\bar{u}}(x,y)$, $\bar{\bar{\sigma}}(x,y)$ – переміщення і напруження у півплощині $y \ge 0$, які забезпечують виконання крайових умов на межі тіла

– *для вільної межі*:

$$\sigma_{yy}(x,0) = 0, \qquad \sigma_{xy}(x,0) = 0, \tag{4}$$

– *для жорстко закріпленої межі*:

$$u_x(x,0) = 0, \qquad u_y(x,0) = 0, \tag{5}$$

– *для гладко закріпленої межі*:

$$u_y(x,0) = 0, \qquad \sigma_{xy}(x,0) = 0, \tag{6}$$

– *для гнучко закріпленої межі*:

$$u_x(x,0) = 0, \qquad \sigma_{yy}(x,0) = 0. \tag{7}$$

2. Напружено-деформований стан безмежного тіла. Напружено-деформований стан безмежного тіла, зумовлений джерелом тепла, визначає термопружний потенціал переміщень $\Psi(x,y)$, який задовольняє рівняння Пуассона [5]

$$\Delta\Psi(x,y) = mt(x,y). \tag{8}$$

Тут $m = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha$, ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт лінійного теплового розширення. Тоді переміщення і напруження визначаємо за формулами

$$\bar{u}_x = \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \qquad \bar{u}_y = \frac{\partial\Psi}{\partial y},$$

$$\bar{\sigma}_{xx} = 2G\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - mt(x,y)\right), \qquad \bar{\sigma}_{yy} = 2G\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - mt(x,y)\right),$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = 2G\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}, \tag{9}$$

де G – модуль зсуву.

Розв'язок рівняння (8) з урахуванням виразу для температури (2) має вигляд

$$\Psi(x,y) = -m\frac{w}{8\pi\lambda}\left(r_1^2(\ln r_1 - 1) + (-1)^k r_2^2(\ln r_2 - 1)\right). \tag{10}$$

За формулами (9), врахувавши (10), знайдемо

$$\bar{u}_x(x,y) = \frac{m}{2}(x-\xi)t(x,y),$$

$$\bar{u}_y(x,y) = -\frac{mW}{4}\left[(y-h)(2\ln r_1 - 1) + (-1)^k(y+h)(2\ln r_2 - 1)\right],$$

$$\bar{\sigma}_{xx}(x,y) = -Gm\left[t(x,y) + W(x-\xi)^2\left(\frac{1}{r_1^2} + (-1)^k\frac{1}{r_2^2}\right)\right],$$

$$\bar{\sigma}_{yy}(x,y) = -Gm\left[t(x,y) - W(x-\xi)^2\left(\frac{1}{r_1^2} + (-1)^k\frac{1}{r_2^2}\right)\right],$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(x,y) = -GmW(x-\xi)\left(\frac{y-h}{r_1^2} + (-1)^k\frac{y+h}{r_2^2}\right). \; W = \frac{w}{2\pi\lambda} \text{-?} \tag{11}$$

У випадку, коли на межі $y = 0$ підтримується нульова температура, з виразів (2) і (11) маємо

$$t(x,0) = 0,$$

$$\bar{u}_x(x,0) = 0, \qquad \bar{u}_y(x,0) = \frac{mhW}{2}\left[\ln\left((x-\xi)^2 + h^2\right) - 1\right],$$

$$\bar{\sigma}_{xx}(x,0) = 0, \quad \bar{\sigma}_{yy}(x,0) = 0, \quad \bar{\sigma}_{xy}(x,0) = 2GmhW\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + h^2}. \tag{12}$$

З аналізу формул (11) і (12) випливає, що крайові умови (7) повністю задовольняються. Отже, одержано розв'язок задачі термопружності для півбезмежного тіла, межа якого закріплена гнучкою нерозтяжною плівкою ($u_x = 0$, $\sigma_{yy} = 0$) за нульової температури на ній.

Зі співвідношень (2) і (11), коли межа тіла (при $y = 0$) теплоізольована, отримаємо

$$t(x,0) = -W\ln\left((x-\xi)^2 + h^2\right),$$

$$\bar{u}_x(x,0) = -\frac{mW}{2}(x-\xi)\left[\ln\left((x-\xi)^2 + h^2\right) - 1\right], \qquad \bar{u}_y(x,0) = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{xx}(x,0) = GmW\left[\ln\left((x-\xi)^2 + h^2\right) + \frac{2h^2}{(x-\xi)^2 + h^2} - 1\right],$$

$$\bar{\sigma}_{yy}(x,0) = GmW\left[\ln\left((x-\xi)^2 + h^2\right) - \frac{2h^2}{(x-\xi)^2 + h^2} + 1\right],$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(x,0) = 0. \tag{13}$$

З аналізу формул (11) і (13) випливає, що крайові умови (6) повністю виконуються. Отже, одержано розв'язок задачі термопружності для півбезмежного тіла, межа $y = 0$ якого теплоізольована ($u_y = 0$, $\sigma_{xy} = 0$) і гладко закріплена.

3. Визначення переміщень і напружень через функцію Буссінеска. Для знаходження переміщень $\bar{\bar{u}}(x,y)$ і напружень $\bar{\bar{\bar{\sigma}}}(x,y)$ використаємо функцію Буссінеска $\Phi(x,y)$, яку подамо у вигляді суми двох гармонічних функцій $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$:

$$\Phi(x,y) = \varphi(x,y) + y\psi(x,y).$$

Тоді [6] маємо

$$\bar{\bar{u}}_x(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x},$$

$$\bar{\bar{u}}_y(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - 4(1-\nu)\psi,$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x,y) = 2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - 2\nu\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x,y) = 2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - 2(2-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x,y) = 2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - 2(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right). \quad (14)$$

Згідно з (9) і (14) формули (3) запишемо у вигляді

$$u_x(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

$$u_y(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + y\frac{\partial\psi}{\partial y} - (3-4\nu)\psi + \frac{\partial\Psi}{\partial y},$$

$$\sigma_{xx}(x,y) = 2G\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - 2\nu\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - mt(x,y)\right),$$

$$\sigma_{yy}(x,y) = 2G\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + y\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - 2(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - mt(x,y)\right),$$

$$\sigma_{xy}(x,y) = 2G\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - (1-2\nu)\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right). \quad (15)$$

З використанням (15), врахувавши крайові умови (4)–(7), побудову функцій Буссінеска за відомим термопружним потенціалом $\Psi(x,y)$ зводимо до розв'язування відповідних крайових задач для гармонічних функцій $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ у півпросторі. В результаті знайдемо переміщення $\bar{\bar{u}}(x,y)$ і напруження $\bar{\bar{\sigma}}(x,y)$ для вільної, жорсткої, гладко та гнучко закріпленої межі тіла.

Запишемо функції $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ та відповідні співвідношення для переміщень і напружень за різних крайових умов.

Вільна межа.

– *Нульова температура на межі*:

$$\varphi(x,y) = -2mhW(1-\nu)\left((y+h)(\ln r_2 - 1) - (x-\xi)\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h}\right),$$

$$\psi(x,y) = -mhW\ln r_2. \quad (16)$$

– *Теплоізольована межа*:

$$\varphi(x,y) = mW(1-2\nu)\left(\left(y(y+h) - \frac{1}{2}r_2^2\right)\ln r_2 - \right.$$

$$\left. - y(x-\xi)\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h} - \frac{y^2-h^2}{2}\right),$$

$$\psi(x,y) = mW\left(y\ln r_2 - (x-\xi)\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h} - \frac{1}{2}(y+h)\right). \tag{17}$$

Підставивши (16) і (17) у вирази (14) для переміщень і напружень, знайдемо:

$$\bar{\bar{u}}_x(x,y) = mW\Bigg[h\left(2(1-\nu)\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h} - \frac{y(x-\xi)}{r_2^2}\right) -$$

$$-(k-1)\Bigg(2(1-\nu)(y+h)\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h} +$$

$$+(1-2\nu)(x-\xi)\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\Bigg)\Bigg],$$

$$\bar{\bar{u}}_y(x,y) = mW\Bigg[h\left((1-2\nu)\ln r_2 - \frac{y(y+h)}{r_2^2}\right) +$$

$$+(k-1)\Bigg(2(1-\nu)(x-\xi)\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h} -$$

$$-(1-2\nu)(y+h)\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{2y+h}{2}\Bigg)\Bigg],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x,y) = 2GmW\Bigg[h\,\frac{(3y+2h)(x-\xi)^2 + (y+2h)(y+h)^2}{r_2^4} -$$

$$-(k-1)\left(\ln r_2 + \frac{1}{2} + \frac{(y+h)^2}{r_2^2}\right)\Bigg],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x,y) = 2GmW\Bigg[hy\,\frac{(y+h)^2 - (x-\xi)^2}{r_2^4} -$$

$$-(k-1)\left(\ln r_2 + \frac{1}{2} - \frac{(y+h)^2}{r_2^2}\right)\Bigg],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x,y) = 2GmW(x-\xi)\left[h\,\frac{y^2 - h^2 - (x-\xi)^2}{r_2^4} + (k-1)\frac{y+h}{r_2^2}\right]. \tag{18}$$

Вирази (16) для функцій $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ збігаються з наведеними у працях [3, 7], а співвідношення (18) для переміщень і напружень при $k=1$ – з наведеними у праці [3].

Жорстко закріплена межа.

– *Нульова температура на межі*:

$$\varphi(x,y) = 0,$$

$$\psi(x,y) = \frac{mWh}{3-4\nu}\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right). \tag{19}$$

– *Теплоізольована межа*:

$$\varphi(x,y) = mW\left(\left(\frac{1}{2}r_2^2 - y(y+h)\right)(\ln r_2 - 1) + y(x-\xi)\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h}\right),$$

$$\psi(x,y) = \frac{mW}{3-4\nu}\left(-y\ln r_2 + (x-\xi)\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h} + \frac{1}{2}(y+h)\right). \tag{20}$$

Підставивши (19) і (20) у (14), знайдемо переміщення і напруження:

$$\bar{\bar{u}}_x(x,y) = \frac{mW}{3-4\nu}\left[h\,\frac{y(x-\xi)}{r_2^2} + (k-1)\left(4(1-\nu)y\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (3-4\nu)(x-\xi)\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\right)\right],$$

$$\bar{\bar{u}}_y(x,y) = \frac{mW}{3-4\nu}\left[h\left(\frac{y(y+h)}{r_2^2} - (3-4\nu)\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + (k-1)\left((3-4\nu)h\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right) - y\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\right)\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x,y) = \frac{2GmW}{3-4\nu}\left[h\,\frac{2y(y+h)^2 - (y+2\nu(y+h))r_2^2}{r_2^4} + \right.$$

$$\left. + (k-1)\frac{(y+h)(y+3h)}{r_2^2}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x,y) = \frac{2GmW}{3-4\nu}\left[h\,\frac{(y-2(1-\nu)(y+h))r_2^2 - 2y(y+h)^2}{r_2^4} - \right.$$

$$\left. - (k-1)\left((1-2\nu)\left(\ln r_2 + \frac{1}{2} - \frac{2h(y+h)}{r_2^2}\right) + \frac{y^2-h^2}{r_2^2}\right)\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x,y) = -\frac{2GmW}{3-4\nu}\left[(x-\xi)\,h\,\frac{2y(y+h) + (1-2\nu)r_2^2}{r_2^4} - \right.$$

$$- (k-1)\left(2(1-\nu)\left(\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h} + 2h\frac{x-\xi}{r_2^2}\right) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{(x-\xi)(y+h)}{r_2^2}\right)\right]. \tag{21}$$

Вирази (19) для функцій $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ збігаються з наведеними у працях [1, 7], а співвідношення (21) для переміщень і напружень при $k=1$ – з наведеними у праці [1].

Гладко закріплена межа.

– *Нульова температура на межі*:

$$\varphi(x,y) = -mWh\left[(y+h)\left(\ln r_2 - \frac{3-2\nu}{4(1-\nu)}\right) - (x-\xi)\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h}\right],$$

$$\psi(x,y) = -\frac{mWh}{4(1-\nu)}. \tag{22}$$

Зі співвідношень (14) з урахуванням (22) знайдемо переміщення і напруження:

$$\bar{\bar{u}}_x(x,y) = mWh\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h},$$

$$\bar{\bar{u}}_y(x,y) = -mWh\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right),$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x,y) = -\bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x,y) = 2GmWh\,\frac{y+h}{r_2^2},$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x,y) = -2GmWh\,\frac{x-\xi}{r_2^2}. \qquad (23)$$

Вирази (22) і (23) збігаються з наведеними у праці [1].

Гнучко закріплена межа.

– *Теплоізольована межа*:

$$\varphi(x,y) = mW\left(\left(\frac{1}{2}r_2^2 - y(y+h)(\ln r_2 - 1) + y(x-\xi)\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-\xi}{y+h}\right),\right.$$

$$\psi(x,y) = 0. \qquad (24)$$

Підставивши (24) у (14), знайдемо переміщення і напруження:

$$\bar{\bar{u}}_x(x,y) = mW\left[(x-\xi)\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right) + y\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x-\xi}{y+h}\right],$$

$$\bar{\bar{u}}_y(x,y) = mW\left[-y\ln r_2 + (x-\xi)\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x-\xi}{y+h} + \frac{y+h}{2}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x,y) = -\bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x,y) = 2GmW\left(\ln r_2 + \frac{1}{2} - h\,\frac{y+h}{r_2^2}\right),$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x,y) = 2GmW\left[h\,\frac{x-\xi}{r_2^2} + \mathrm{arctg}\,\frac{x-\xi}{y+h}\right]. \qquad (25)$$

Співвідношення (2), (11), (18), (21), (23) і (25) є відповідними функціями Ґріна, за допомогою яких температуру тіла, переміщення і напруження, зумовлені розподіленими в деякій області L джерелами тепла інтенсивності $w(\xi)$, визначаємо за формулами [6]:

$$t^*(x) = \int_L w(\xi)\,t(x,h,\xi)\,d\xi,$$

$$u_i^*(x) = \int_L w(\xi)\,u_i(x,h,\xi)\,d\xi,$$

$$\sigma_{ij}^*(x) = \int_L w(\xi)\,\sigma_{ij}(x,h,\xi)\,d\xi.$$

Висновки. Отримано замкнутий розв'язок двовимірної задачі термопружності для півбезмежного тіла, що нагрівається стаціонарним джерелом тепла, із вільною, жорсткою, гладко або гнучко закріпленою межею за нульової температури або теплоізоляції на ній. Для розв'язання задачі термопружності використано термопружний потенціал переміщень та побудовано функції Буссінеска, які дають змогу задовольнити крайові умови на межі.

Із аналізу формул для переміщень і напружень, одержаних із використанням термопружного потенціалу переміщень, випливає, що ними описується також напружено-деформований стан півбезмежного тіла з джерелом тепла, межа якого перебуває за нульової температури і закріплена гнучкою нерозтяжною плівкою ($u_x = 0$, $\sigma_{yy} = 0$), або є теплоізольованою і гладко закріпленою ($u_y = 0$, $\sigma_{xy} = 0$).

З використанням функції Буссінеска знайдено співвідношення для переміщень і напружень, які є відповідними функціями Ґріна, придатними для дослідження термопружного стану, зумовленого нагрівом тіла джерелами тепла, розподіленими у паралельній до межі стрічковій області. Їх також можна використати при дослідженні напружено-деформованого стану тіл за наявності тріщин або жорстких включень у тепловидільних областях.

1. *Івасько Н. М.* Двовимірна задача термопружності для півпростору з жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за тепловиділення у паралельній до неї стрічковій області // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 144–151.
2. *Кит Г. С., Ивасько Н. М.* Плоская деформация полубесконечного тела с перпендикулярной к его границе теплоактивной трещиной // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 30–37.
3. *Кіт Г. С., Івасько Н. М.* Двовимірна задача термопружності для півпростору за тепловиділення у паралельній до його межі стрічковій області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 3. – С. 147–155.
   Те саме: *Kit H. S., Ivas'ko N. M.* Two-dimensional problem of thermoelasticity for a half space in the presence of heat release in a ribbon-shaped domain parallel to its boundary // J. Math. Sci. – 2019. – **236**, No. 2. – P. 172–184. – https://doi.org/10.1007/s10958-018-4104-6.
4. *Кіт Г. С., Івасько Н. М.* Двовимірна задача термопружності для півпростору з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за тепловиділення у перпендикулярній до неї стрічковій області // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2017. – № 3. – С. 83–86.
5. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – Москва: Физматгиз, 1958. – 168 с.
   Те саме: *Melan E., Parkus H.* Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. – Wien: Springer, 1953. – 114 S. – https://doi.org/10.1007/978-3-7091-3968-4.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
   Те саме: *Nowacki W.* Thermoelasticity. – London: Pergamon Press, 1962. – xii+628 p. – https://
7. *Min-zhyng W., Ke-fu H.* Thermoelastic problems in the half space – An application of the general solution in elasticity // Appl. Math. Mech. – 1991. – **12**, No. 9. – P. 849–862. – https://doi.org/10.1007/BF02458250.

TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR A HALF-SPACE WITH A FREE, RIGIDLY, SMOOTHLY OR FLEXIBLY CLAMPED BOUNDARY SUBJECTED TO HEAT SOURCES

Under the action of a stationary heat source, the Boussinesq functions of the thermoelasticity problem are constructed for plane deformation of a semi-infinite body with a free, rigidly, smoothly or flexibly fixed boundary, on which zero temperature or thermal insulation is maintained. The construction of Boussinesq functions is reduced to solving boundary value problems for harmonic functions in a half-space. Relations for displacements and stresses are obtained, which are the corresponding Green's functions and can be used to determine the thermoelastic state of a half-space subjected to heat release in the ribbon area.

Key words: *half-space, plane strain, thermoelasticity, stationary heat source, Boussinesq functions, Green's functions*.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
18.10.20