УДК 519.6

Ю. П. Тополюк✉

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ ЗНАХОДЖЕННЯ НОРМАЛЬНОГО КВАЗІРОЗВ'ЯЗКУ В ЗАДАЧАХ З ВІЛЬНОЮ ФАЗОЮ ІЗ ЦІЛКОМ НЕПЕРЕРВНИМ ОПЕРАТОРОМ

Розглядаються задачі коректного знаходження нормального квазірозв'язку операторних рівнянь, оператор яких є суперпозицією лінійного та нелінійного, який є операцією модуля. Для випадку, коли лінійний оператор є цілком неперервним, стосовно параметра регуляризації встановлено достатні умови, які гарантують збіжність розв'язку регуляризованої задачі до квазірозв'язку точного операторного рівняння залежно від похибки лінійного оператора задачі.

Ключові слова: *задачі з вільною фазою, нелінійний оператор, квазірозв'язки, нормальний квазірозв'язок, метод регуляризації, збіжність методу.*

Вступ. Дослідження проблем, пов'язаних з властивостями розв'язків нелінійних задач теорії синтезу антен, які тісно пов'язані з так званою фазовою проблемою, започатковано у монографіях Б. З. Каценеленбаума, М. М. Войтовича, П. О. Савенка та М. І. Андрійчука [1, 2, 7, 8, 14].

В [1] розглядалися методи синтезу випромінюючих систем за заданою амплітудною діаграмою напрямленості, а вільність вибору фазової діаграми використовувалася для поліпшення апроксимації заданої амплітудної діаграми та виконання низки додаткових вимог. Задачі ставились у варіаційній постановці і зводились до розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна або алгебраїчних систем. Використовувалися ітераційні чисельні методи, строгого обґрунтування яких не було. Згодом в монографіях [2, 7, 8] із застосуванням методів нелінійного функціонального аналізу було наведено часткове теоретичне обґрунтування застосованих чисельних методів.

З математичної точки зору, задачі з вільною фазою можна розглядати як нелінійні операторні рівняння першого роду на парі функціональних нормованих просторів. Ці простори вважаються гільбертовими. Оператор, що діє на невідому функцію, і права частина рівняння вважаються заданими. На множину прообразів можуть накладатися додаткові обмеження, пов'язані з обмеженнями як на розв'язки, так і на методи чисельного розв'язування задачі. Область значень оператора задачі є, як правило, невідомою.

Задача з вільною фазою зводиться до розв'язання операторного рівняння

$$Bu = F\,, \tag{1}$$

де u − шуканий невідомий елемент з функціонального гільбертового простору H_1; $B = |A(\cdot)|$ − заданий нелінійний оператор з гільбертового комплекснозначного функціонального простору H_1 в гільбертовий функціональний простір H_2. Оператор B є суперпозицією двох операторів: A − заданий лінійний обмежений оператор з H_1 в H_2, а $|\cdot|$ − нелінійний оператор задачі, який кожну комплексну функцію з H_2 відображає в її модуль; $F \in H_2$ − задана невід'ємна функція.

Класичний розв'язок рівняння (1) існує, якщо функція F належить до області значень $R(B)$ нелінійного оператора B. Розглянемо множину

✉top@iapmm.lviv.ua

$D = \{|Au| = F : u \in H_1\}$. Відомо [19], що коли A є ізометричним оператором перетворення Фур'є, то множина D не буде слабко замкнутою та опуклою.

Розглянемо випадок, коли F не належить до множини $R(B)$, так що в класичному сенсі це рівняння не має розв'язку. Такі задачі потрібно розглядати як некоректно поставлені [6, 9, 10, 16], тобто їхні розв'язки можуть не існувати та не бути неперервно залежним, зокрема, від похибок оператора задачі.

В одновимірному випадку для широкого класу операторних рівнянь зі спеціальною структурою оператора B відомий аналітико-числовий метод [2, 14, 21] розв'язування задач з вільною фазою. З використанням цього методу вдається звести знаходження розв'язку до систем трансцендентних рівнянь невеликої розмірності або до інтегро-трансцендентних рівнянь.

Проте для більш широкого класу задач з вільною фазою для знаходження розв'язків слід використовувати ітераційні чисельні методи [1, 2, 8, 14]. Для коректного використання цих наближених методів (типу послідовних наближень, ґрадієнтних чи нютонівського типу) вихідну задачу потрібно регуляризувати.

Важливе місце в дослідженні таких задач відіграє теорема про існування псевдорозв'язків (елементів, на яких досягається мінімум функціонала нев'язки вихідного операторного рівняння). Такі дослідження проводились для одновимірного випадку в [11] і для більш загального випадку в [8]. Зокрема, в [11] доведено, що всяка мінімізуюча послідовність для функціонала нев'язки буде розбіжною, якщо не існує псевдорозв'язку задачі.

Похибки при чисельному розв'язуванні задач з вільною фазою можливі і через похибки у правій частині операторного рівняння, і через похибки апроксимації оператора задачі. Доведено [12], що нижня грань нев'язки операторного рівняння лише напівнеперервна зверху як функція оператора задачі. Якщо нев'язка більша від нуля, то задача пошуку навіть нижньої грані нев'язки є некоректною. Способи регуляризації таких задач розглянуто автором в роботі [12]. Там показано, що для коректного знаходження нижньої грані функціонала нев'язки достатньо оцінити її наближеним функціоналом зверху. Цю оцінку було незручно використовувати для практичних застосувань, оскільки в ній одночасно використовується норма невідомої функції і квадрат норми. Диференціюванням норми отримуємо нелінійний оператор, що ускладнює використання чисельних алгоритмів для розв'язування задачі. Крім того, апроксимуючі функціонали містять норми точного і наближеного лінійних операторів.

У цій статті оцінка зверху для вихідного функціонала проведена лише через квадрат норми від невідомої функції і при побудові регуляризуючого функціонала Тихонова не використовуються норми операторів задачі.

Питання пошуку псевдорозв'язків коректно поставлених задач з вільною фазою, залежних від похибок правої частини, досліджено автором у [13]. У цій роботі задача формулюється у варіаційній постановці − задача знаходження мінімуму певного нелінійного функціонала. І під коректною постановкою задачі мінімізації цього функціонала розуміється одночасне виконання двох умов: існування елемента, на якому досягається мінімум функціонала, і стійкість варіаційної задачі [9, с. 232].

Близькою до задач з вільною фазою є так звана фазова проблема [16, 19]: відновлення фази поля за його амплітудою. У цих задачах передбачається існування точного розв'язку. У пропонованій роботі існування точного розв'язку не передбачається. Задача може бути несумісною, тобто нев'язка операторного рівняння (1) може бути більшою від нуля.

У роботі [18] розглянуто методи коректного знаходження квазірозв'язку нелінійного операторного рівняння при відомій похибці правої частини рівняння. Оператор задачі був заданий точно.

Серед робіт з нелінійної неопуклої оптимізації слід згадати працю [15]. Тут використано так звану неквадратичну регуряризацію, а не класичний гладкий функціонал-стабілізатор, який при відносно великому значенні параметра регуляризації занадто «згладжує» наближений розв'язок.

Врахуванню похибки оператора задачі присвячена пропонована стаття.

Використовуватимемо методи регуляризації запропоновані в [6, 9, 10, 20], які подальшого свого розвитку знайшли в публікаціях [5, 17].

У роботах [8, с. 233] і [7, с. 99] досліджувався емпіричний вибір параметра регуляризації і наводилися числові результати ефективності такого вибору. У цій статті дається строге обґрунтування залежності вибору параметра регуляризації від похибки оператора задачі.

Вихідну задачу (1) переформулюємо у варіаційній постановці. Будемо шукати нормальний квазірозв'язок вихідної задачі і встановимо достатні умови його існування. Лінійний оператор A задається з певною похибкою і належить до певного класу апроксимуючих операторів. За вихідним функціоналом нев'язки будуємо стабілізуючий функціонал з регуляризуючим параметром. Значення цього параметра підбираємо перед етапом чисельного розв'язування задачі і отримуємо достатні умови для збіжності регуляризованої задачі до розв'язку задачі про знаходження нормального квазірозв'язку. Це означає, що для знаходження наближеного розв'язку використовуємо стабілізуючу процедуру за відомою апріорною інформацією відносно наближеного оператора задачі, яким апроксимується вихідний цілком неперервний оператор. Доведено збіжність запропонованої регуляризуючої процедури з апріорним вибором параметра регуляризації.

1. Формулювання задачі. Дію оператора в лівій частині (1) будемо розглядати на деякій множині функцій $G \subset H_1$. Це може бути пов'язано як з фізичною особливістю сформульованої задачі і обмеженнями на клас розв'язків, так і з методом її чисельного розв'язування.

Як правило, точне значення оператора A невідоме, а задається наближений оператор A_h, заданий з певною похибкою $h > 0$, або ж він обчислюється наближено за допомогою певної чисельної апроксимуючої процедури.

Будемо вважати, що наближений *лінійний обмежений* оператор A_h належить до класу операторів, для яких виконується умова

$$\lim_{h\to 0}\|A_h u - Au\| = 0$$

для довільної функції $u \in G$. Зокрема, цю умову задовольняє оператор A_h в сенсі наближення

$$\|A_h u - Au\| \le h\,\|u\|, \qquad (2)$$

де $u \in G$. У цьому випадку розглядаємо рівняння

$$|A_h u| = F. \qquad (3)$$

Функція $F \in H_2$ може не належати до області значень суперпозиції операторів $|\cdot|$ та A, тому ставитимемо задачу про пошук квазірозв'язку.

Означення 1 (див. [9, с. 43]). Функцію $u_* \in G$ називають *квазірозв'язком* рівняння (1) на множині $G \subset H_1$, якщо на цій функції досягається мінімум функціонала

$$\sigma(u) = \|F - |Au|\|^2. \qquad (4)$$

Квазірозв'язок рівнянь (1) і (3) може бути неєдиний і не мати властивості стійкості відносно похибки оператора $h > 0$ у класі операторів, що задовольняють (2).

Разом з функціоналом (4) розглянемо наближений функціонал

$$\sigma_z(u) = \|F - |A_h u|\|^2.$$

Для спрощення викладок у подальших оцінках використаємо також функціонали для вихідного операторного рівняння (1):

$$\sigma_N(u) = \| F - |Au| \| \tag{5}$$

і для наближеного рівняння (3):

$$\sigma_{Nh}(u) = \| F - |A_h u| \| . \tag{6}$$

Тут індекс « N » вказує на те, що у відповідній нормі оцінюється *різниця* лівої і правої частин операторних рівнянь.

Мірою несумісності операторного рівняння (1) на множині G назвемо величину

$$\mu = \inf \{ \| F - |Au| \| : u \in G \} .$$

Значення μ може бути більшим від нуля, тому μ може служити оцінкою міри несумісності операторного рівняння (1) на множині G. Очевидно,

$$\mu^2 = \inf \{ \| F - |Au| \|^2 : u \in G \} .$$

Скориставшись (5), (6) і (2), легко отримати

$$|\sigma_{Nh}(u) - \sigma_N(u)| \le \| |Au| - |A_h u| \| \le \| Au - A_h u \| \le h \|u\| . \tag{7}$$

Введення функціоналів (5) і (6) дозволить будувати регуляризуючий функціонал Тихонова без використання норм лінійних операторів A та A_h, на відміну від [12].

Означення 2 (див. [10, с. 298]). Послідовність $\{u_n\} \in G$ називають *мінімізуючою* для функціонала (4) на множині G, якщо виконується умова

$$\lim_{n \to \infty} \sigma(u_n) = \mu^2 .$$

Означення 3 (див. [9, с. 232]). Задачу мінімізації функціонала $\varphi(u)$ називають *стійкою* на деякій множині $G \subset H_1$, якщо довільна мінімізуюча послідовність $\{u_n\} \in G$ збігається до деякої функції $u_* \in G$, де $\varphi(u_*) = \inf\{\varphi(u) : u \in G\}$.

Будемо вважати, що множина квазірозв'язків $U_* \in G$ рівняння (1) непорожня і, як відомо [2, 8], складається не з одного елемента.

Поряд з означеними вище функціоналами розглянемо на G функціонал $\|u\|^2$. Очевидно, що для довільного $u \in G$ справджується нерівність

$$\|u\|^2 \ge S_* \equiv \inf \{ \|u\|^2 : u \in G \} .$$

Означення 4 (див. [6, с. 184]). *Нормальним квазірозв'язком* задачі (1) називають функцію $u_0 \in U_*$, на якій досягається нижня грань функціонала

$$\|u_0\|^2 = S_0 \equiv \inf\{ \|u\|^2 : u \in U_* \} . \tag{8}$$

Множину таких розв'язків будемо позначати через U_0.

Розглянемо задачу про пошук нормальних квазірозв'язків задачі (1).

2. Теоретичні результати. Введемо додаткові означення, які використовуватимемо надалі.

Означення 5 (див. [3, с. 20]). Послідовність функцій $\{u_n\} \in G$ називають *слабко збіжною* до функції $u_0 \in G$, якщо виконується умова $\lim\limits_{n \to \infty} \ell(u_n) = \ell(u_0)$ для всякого лінійного неперервного функціонала $\ell(u)$.

Означення 6 (див. [4, с. 100]). Дійснозначний функціонал $\varphi(u)$ називають *слабко напівнеперервним* знизу на G, якщо для довільної послідовності функцій $\{u_n\} \in G$, слабко збіжної до деякої функції u_0, виконується нерівність

$$\varphi(u_0) \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \varphi(u_n) \equiv \lim_{n\to\infty} \inf \varphi(u_n)$$.

Означення 7 (див. [3, с. 140]). Функціонал $\varphi(u)$ з H_1 в $\mathbb{R}_+ \equiv [0,\infty)$ називають *зростаючим*, якщо для довільної $u \in H_1$ знайдуться такі $r > 0$ та $v \in H_1$, що з умови $\|v\| > r$ випливатиме умова $\varphi(v) > \varphi(u)$.

Теорема 1. *Для існування принаймні одного нормального квазірозв'язку* $u_0 \in U_0$ *задачі* (8) *достатньо, щоб оператор* A *був цілком неперервним і множина квазірозв'язків* U_* *рівняння* (1) *на* G *була непорожня.*

Д о в е д е н н я. Нехай послідовність $\{u_n\}$ – довільна мінімізуюча послідовність з U_* для задачі (8), тобто $\|u_n\|^2 \to S_0$ при $n \to \infty$. Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер послідовності n_0, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $\|u_n\|^2 \le S_0 + \varepsilon = C = \text{const}$. Всі члени послідовності, можливо, крім скінченного числа, належать до деякої обмеженої множини S_c. З огляду на слабку напівнеперервність знизу функціонала $\|u\|^2$, можна скористатися критерієм слабкої напівнеперервності знизу функціоналів (див. [3, с. 97]), з якого випливає слабка замкнутість множини S_c. Отже, з послідовності $\{u_n\}$ можна виділити підпослідовність $\{u_{n_k}\}$, яка слабко збігається до $u_0 \in S_c \subset G$.

Враховуючи, що $\{u_{n_k}\} \in U_*$, запишемо

$$\lim_{k\to\infty} \left\| F - |Au_{n_k}| \right\|^2 = \lim_{k\to\infty} \mu^2 = \mu^2. \tag{9}$$

З іншої сторони, зважаючи на цілком неперервність оператора A, неперервність оператора модуля і неперервність оператора норми, отримаємо

$$\lim_{k\to\infty} \left\| F - |Au_{n_k}| \right\|^2 = \left\| F - |Au_0| \right\|^2. \tag{10}$$

Порівнюючи праві частини в (9) і (10), отримуємо, що $\left\| F - |Au_0| \right\|^2 = \mu^2$, тобто $u_0 \in U^*$. Враховуючи мінімізовність і слабку збіжність підпослідовності $\{u_{n_k}\}$, а також слабку напівнеперервність знизу функціонала задачі (8), маємо

$$\lim_{k\to\infty} \left\| u_{n_k} \right\|^2 = S_0 \ge \|u_0\|^2.$$

Отже, $\|u_0\|^2 = S_0$, тобто $u_0 \in U_0$. Теорему доведено. ♦

Апроксимуємо вихідну задачу пошуку нормального квазірозв'язку наближеною, яка має властивість стійкості.

Розглянемо апроксимуючий функціонал

$$\sigma_h(u) = \left\| F - |A_h u| \right\|^2 + h\|u\|^2, \qquad u \in G.$$

Можна вибрати достатньо малі значення $h > 0$, при яких виконується нерівність

$$\sigma_h(u) \ge \inf\{\sigma_h(u) : u \in G\} = {\mu_h}^2 \ge \mu^2. \tag{11}$$

Для стійкого наближеного знаходження нормального квазірозв'язку рівняння (1) стабілізуючий функціонал Тихонова подамо таким чином:

$$\sigma_t(u) = t\,\|u\|^2 + \||A_h u| - F\|^2 + h\,\|u\|^2, \qquad (12)$$

де $t > 0$ – параметр регуляризації.

Зауваження 1. Стабілізуючий функціонал Тихонова можна вибрати також у вигляді

$$\sigma_{t0}(u) = t\,\|u - u_0\|^2 + \||A_h u| - F\|^2 + h\,\|u\|^2,$$

де u_0 – задана функція, що може описувати деякі унікальні властивості апроксимуючої функції, яка наближає нормальний квазірозв'язок рівняння (1).

Теорема 2 (див. [8, с. 29]). *Нехай* A_h *– лінійний цілком неперервний оператор з* $G \subset H_1$ *в* H_2. *Тоді при кожному фіксованому* $t > 0$ *та* $h > 0$ *у* (12) *множина функцій, на якій досягається мінімум функціонала* (12), *не є порожньою.*

Д о в е д е н н я. Нехай $\{u_n^{t(h)}\} \in G$ – мінімізуюча послідовність для функціонала (12), тобто

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_t(u_n^{t(h)}) = \mu_{t(h)},$$

де $\mu_{t(h)} = \inf\{\sigma_t(u) : u \in G\}$.

Відомо (див. [8, с. 31]), що функціонал (12) є зростаючим. Ця умова гарантує належність мінімізуючої послідовності $\{u_n^{t(h)}\}$ до обмеженої множини, яка міститься в G (див. [3, с. 140]). З цієї послідовності виділимо слабко збіжну підпослідовність, яку також будемо позначати $\{u_n^{t(h)}\}$, що слабко збігається до $\{u_*^{t(h)}\}$.

Використовуючи цілком неперервність лінійного оператора A_h і неперервність нелінійного оператора $|\cdot|$, отримаємо, що $|Au_n^{t(h)}| - F$ збігається до $|Au_*^{t(h)}| - F$.

Із неперервності оператора норми маємо

$$\lim_{n\to\infty} \||Au_n^{t(h)}| - F\|^2 = \||Au_*^{t(h)}| - F\|^2, \qquad (13)$$

а зі слабкої напівнеперервності знизу оператора норми отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} (t+h)\|u_n^{t(h)}\|^2 \ge (t+h)\|u_*^{t(h)}\|^2. \qquad (14)$$

З (13) і (14) випливає, що функція $u_*^{t(h)}$ належить до множини мінімумів функціонала (12). Теорему доведено. ♦

Доведемо збіжність руґуляризованого розв'язку до нормального квазірозв'язку вихідної задачі.

Теорема 3. *Нехай:* ***1°***) *послідовність* $\{h_n\}$ *збігається до* 0 *при* $n \to \infty$ *і оператор* $A_n \equiv A_{h_n}$ *належить до класу операторів, для яких виконується умова* $\|A - A_{h_n}\| \le h_n$; ***2°***) *параметр регуляризації* $t(h)$ *задовольняє умови*

$$t(h) \underset{h\to0}{\to} 0, \qquad \frac{h}{t(h)} \underset{h\to0}{\to} 0, \qquad \frac{h^2}{t(h)} \underset{h\to0}{\to} 0,$$

і $t(\cdot)$ *є монотонною функцією*; ***3°***) *оператори* A *і* A_n *є цілком неперервними на* $G \in H_1$.

Тоді послідовність функцій $\{u_n\} \equiv \{u_{t(h_n)}\}$, *що розв'язує задачу* (12), *збігається до* $\bar{u}$ *– нормального квазірозв'язку задачі* (1):

$$\inf\{\|u\|^2 : u \in U_*\} \equiv \|\bar{u}\|^2 .$$

Д о в е д е н н я. Зважаючи на мінімізовність функції $u^{t(h)}$ та умови (7) і (11), запишемо

$$\begin{aligned} t\left\|u^{t(h)}\right\|^2 + \mu_h{}^2 \le t\left\|u^{t(h)}\right\|^2 + \sigma_h\left(u^{t(h)}\right) = \\ = \sigma_t\left(u^{t(h)}\right) \le \sigma_t(\bar{u}) = t\|\bar{u}\|^2 + \sigma_h(\bar{u}) \le \\ \le t\|\bar{u}\|^2 + \sigma(\bar{u}) + h\|\bar{u}\|^2 + h\|\bar{u}\|K = \\ = t\|\bar{u}\|^2 + \mu^2 + h\|\bar{u}\|^2 + h\|\bar{u}\|K \le \\ \le t\|\bar{u}\|^2 + \mu^2 + \left(h + h^2\right)\|\bar{u}\|^2 + 2\mu h\|\bar{u}\|, \end{aligned} \tag{15}$$

де $K = \sigma_N(\bar{u}) + \sigma_{Nh}(\bar{u})$. З огляду на (15) та (11) отримуємо нерівність

$$t\left[\left\|u^{t(h)}\right\|^2 - \|\bar{u}\|^2\right] \le (h + h^2)\|\bar{u}\|^2 + 2\mu h\|\bar{u}\|,$$

звідки маємо

$$\left\|u^{t(h)}\right\|^2 \le \|\bar{u}\|^2 + \frac{h + h^2}{t}\|\bar{u}\|^2 + \frac{2\mu h}{t}\|\bar{u}\|. \tag{16}$$

Використовуючи отриману нерівність і умови теореми $\frac{h^2}{t} \underset{h\to 0}{\to} 0$ та $\frac{h}{t} \underset{h\to 0}{\to} 0$, отримаємо

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left\|u^{t(h)}\right\|^2 \le \|\bar{u}\|^2 + \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{h + h^2}{t}\|\bar{u}\|^2 + \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{2\mu h}{t}\|\bar{u}\| = \|\bar{u}\|^2. \tag{17}$$

З формул (15) і (17) випливає обмеженість значення $\left\|u^{t(h)}\right\|$.

Із (15) також можемо отримати

$$\sigma_{Nh}\left(u^{t(h)}\right) \le \left((t + h)\left[\|\bar{u}\|^2 - \left\|u^{t(h)}\right\|^2\right] + \mu^2 + h^2\|\bar{u}\|^2 + 2\mu h\|\bar{u}\|\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Враховуючи умову апроксимації (7) та обмеженість $\left\|u^{t(h)}\right\|$, маємо

$$\sigma_{Nh}\left(u^{t(h)}\right) \ge \sigma_N\left(u^{t(h)}\right) - h\left\|u^{t(h)}\right\| \ge \mu - h\left\|u^{\max}\right\|, \tag{19}$$

де $\left\|u^{\max}\right\| \ge \left\|u^{t(h)}\right\|$.

Із (18) , (19) при $h \to 0$, $t \to 0$ отримаємо

$$\lim_{h\to 0}\sigma_{Nh}\left(u^{t(h)}\right) = \mu . \tag{20}$$

Дальше доведемо збіжність послідовності $\{u^{t(h)}\}$ до множини нормальних квазірозв'язків рівняння (1). Покажемо, що для довільної послідовності $\{h_n\}$ такої, що $h_n \to 0$ при $n \to \infty$, відповідна підпослідовність $\{u_n\} \equiv \equiv \{u_{h_n}\}$ слабко збігається до деякої функції $\bar{u}$ з множини U_0: $S_0 \equiv \equiv \inf\{\|u\|^2, u \in U_*\}$.

Із (17) при $h_n \le h_0 = \text{const}$ отримуємо

$$\left\|u^{t(h_n)}\right\|^2 \le \|\bar{u}\|^2 + \varepsilon = M = \text{const}. \tag{21}$$

Нерівність (21) виділяє обмежену множину, і для довільної послідовності $\{h_n\}$ такої, що $h_n \to 0$ при $n \to \infty$, існує слабко збіжна підпослідовність $\{u_{h_{n_k}}\} \equiv \{u_{n_k}\}$ із цієї множини, яка слабко збігається до $u_* \in G$. Із (7) можемо отримати

$$\sigma(u_{n_k}) \le \sigma_z(u_{n_k}) + 2\sigma_{Nh}(u_{n_k})h_n \left\|u_{n_k}\right\| + h_n^2 \left\|u_{n_k}\right\|^2 \le$$

$$\le \sigma_{t(n_k)}(u_{n_k}) + 2M^{1/2}\sigma_{Nh}(u_{n_k})h_n + Mh_n^2 .$$

Звідси випливає, що

$$\mu^2 = \inf\{\sigma(u) : u \in G\} = \sigma(u_*) \le \varliminf_{k\to\infty} \sigma(u_{n_k}) \le$$

$$\le \lim_{k\to\infty}\left[\sigma_{t(n_k)}(u_{n_k}) + 2M^{1/2}\sigma_{Nh}(u_{n_k})h_n + Mh_n^2\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\sigma_{t(n_k)}(u_{n_k}) + \lim_{k\to\infty}\left[2M^{1/2}\sigma_{Nh}(u_{n_k})h_n + Mh_n^2\right] = \mu^2 .$$

Тут враховано слабку напівнеперервність знизу функціонала (4) (див. [8, с. 30]) і (20). Отже, $u_* \in G$ належить до множини квазірозв'язків задачі (1).

З огляду на слабку напівнеперервність знизу $\|u\|^2$ і зважаючи на (17), отримаємо

$$\|\bar{u}\|^2 = \inf\left\{\|u\|^2 : u \in U_*\right\} \ge \lim_{h_n\to 0}\sup\left\|u_{h_n}\right\|^2 \ge \lim_{k\to 0}\sup\left\|u_{h_{n_k}}\right\|^2 \ge$$

$$\ge \lim_{k\to 0}\inf\left\|u_{h_{n_k}}\right\|^2 \ge \|u_*\|^2 .$$

Звідси випливає слабка збіжність підпослідовності $\{u_{n_k}\}$ до u_* при $k \to \infty$ та $\|u_*\|^2 = \|\bar{u}\|^2$. Отже, u_* є нормальним квазірозв'язком задачі (1).

Покажемо, що вся послідовність $\{u_n\}$ слабко збігається до $\bar{u}$. Доведення проведемо від супротивного. Нехай для деякого околу D множини квазірозв'язків і для деякої послідовності індексів n_ℓ, $\ell = 1, 2, \ldots$, виявиться, що $\{u_{n_\ell}\} \notin D$. При цьому, згідно з доведеним вище, із $\{u_{n_\ell}\}$ можна виділити підпослідовність $\{u_m\} \subset \{u_{n_\ell}\}$, $m = n_{\ell_m}$, $m = 1, 2, \ldots$, таку, що $\{u_m\}$ слабко збігається до $\bar{u}$. За властивості слабкої збіжності всі елементи підпослідовності $\{u_m\}$ належать до D, починаючи з деякого індексу $m = n_{\ell_m} \ge M = \text{const}$. При цьому значення M залежить від D. Отримуємо суперечність. Отже, вся послідовність $\{u_n\}$ слабко збігається до $\bar{u}$.

Скористаємось тим, що слабка збіжність і збіжність норм породжує збіжність за нормою гільбертового простору. Враховуючи, що границею послідовності норм $\{\|u_n\|^2\}$ є $\|\bar{u}\|^2$, отримуємо, що $\{u_n\}$ збігається до $\bar{u}$ за нормою простору H_1 при $n \to \infty$. Отже, доведена слабка збіжність регуляризованої послідовності та збіжність послідовності норм породжує збіжність цієї ж послідовності до нормального квазірозв'язку вихідної задачі за нормою гільбертового простору. Теорему доведено. ♦

Зауваження 2. Для ізометричного оператора A з H_1 в H_2 можливий випадок, коли послідовність $\{u_k\}$ слабко збігається до функції $u_0 \in G$. При цьому послідовність образів $\{|Au_k|\}$ не буде слабко збіжною до функції $|Au_0|$. Цей випадок вимагає окремого дослідження стосовно побудови методів регуляризації пошуку квазірозв'язків.

Висновки. У припущенні існування квазірозв'язку операторного рівняння (1), цілком пеперервності лінійного оператора задачі A та апроксимуючого оператора A_h встановлено існування нормального квазірозв'язку задачі (1) і розв'язку регуляризованої наближеної задачі (12). Якщо відома похибка лінійного оператора задачі з вільною фазою, вихідну задачу апроксимуємо, оцінюючи нижню грань зверху. Наближене знаходження нормального квазірозв'язку зводиться до пошуку розв'язку апроксимуючої регуляризованої варіаційної задачі. При узгодженому прямуванні параметра регуляризації і похибки оператора задачі до нуля доведено, що розв'язок варіаційної задачі буде збігатися до нормального квазірозв'язку вихідної задачі (1).

1. *Андрийчук М. И., Войтович Н. Н., Савенко П. А., Ткачук В. П.* Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности. Численные методы и алгоритмы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с.
2. *Булацик О. О., Войтович М. М., Каценеленбаум Б. З., Тополюк Ю. П.* Фазові оптимізаційні задачі. Застосування в теорії хвильових полів. – Київ: Наук. думка, 2012. – 318 с.
3. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. – Москва: Наука, 1972. – 416 с.
4. *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – Москва: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. – 344 с.
5. *Ван Я., Леонов А. С., Лукъяненко Д. В., Шинкарёв В. Д., Ягола А. Г.* О коррекции фазы в томографических исследованиях // Сиб. журн. индустр. математики. – 2020. – **23**, № 4. – С. 18–29. – https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.402.
   Те саме: *Wang Y., Leonov A. S., Lukyanenko D. V., Shinkarev V. D., Yagola A. G.* On phase correction in tomographic research // J. Appl. Ind. Math. – 2020. – **14**, No. 4. – P. 802–810. – https://doi.org/10.1134/S1990478920040171.
6. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – Москва: Наука, 1987. – 240 с.
7. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем з плоским розкривом. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2014. – 314 с.
8. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв'язування). – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2002. – 320 с.
9. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1979. – 286 с.
10. *Тихонов А. Н., Васильев Ф. П.* Методы решения некорректных экстремальных задач // Banach Center Publications. – 1978. – **3**. – С. 297–342.
11. *Тополюк Ю. П.* Існування псевдорозв'язків одного класу нелінійних операторних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 2. – С. 26–30.
12. *Тополюк Ю. П.* Стійкість мінімізуючих послідовностей у варіаційних задачах з вільною фазою // Відбір і обробка інформації. – 2008. – Вип. 28(104). – С. 11–16.
13. *Тополюк Ю. П.* Про коректне формулювання задач з вільною фазою // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2018. – Вип. 16. – С. 43–49.
14. *Andriychuk M. I.* Antenna synthesis through the characteristics of desired amplitude. – Newcastle: Cambridge Scholars Publ., 2019. – xvi+150 p.
15. *Antropov O. S., Borulko V. F., Drobakhin O. O., Vovk S. M.* Nonquadratic regularization procedure for multifrequency amplitude data extrapolation in microwave introscopy of dielectric structures Fourier-holography applications // Telecommunications and Radio Engineering. – 2009. – **68**, No. 10.– P. 905–913.
16. *Blaschke B., Engl H. W., Grever W., Klibanov M.V.* An application of Tikhonov regularization to phase retrieval // Nonlinear World. – 1996. – No. 3. – P. 771–786.

17. *Huynh K. V., Kaltenbacher B.* Some application examples of minimization based formulations of inverse problems and their regularization // Inverse Probl. Imag. – 2021. – **15**, No. 3. – P. 415–443.
18. *Kaltenbacher B., Rendl F., Resmerita E.* Computing quasisolutions of nonlinear inverse problems via efficient minimization of trust region problems // Inverse Ill-Posed Probl. – 2016. – **24**, No. 4. – P. 435–447.
19. *Luke D. R., Burke J. V., Lyon R. G.* Optical wavefront reconstruction: Theory and numerical methods // SIAM Review. – 2002. – **44**, No. 2. – P. 169–224.
20. *Schuster T., Kaltenbacher B., Hofmann B., Kazimierski K.* Regularization methods in Banach spaces. – Berlin: Walter de Gruyter, 2012. – 284 p.
21. *Voitovich N. N., Bulatsyk O. O., Topolyuk Y. P.* Analytical numerical method for solving integral Hammerstein equations arising in free phase problems // Proc. of XXVth Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), 15-18 September 2020, Tbilisi, Georgia. – 2020. – P. 92–97.

CONVERGENCE OF THE REGULARIZATION METHOD FOR FINDING A NORMAL QUASI-SOLUTION IN PROBLEMS WITH FREE PHASE WITH A COMPLETELY CONTINUOUS OPERATOR

The problems for correct finding of a normal quasi-solution of operator equations are considered. Operator of the problems is a superposition of two operators: linear and nonlinear. The nonlinear operator is a modulo operation. For the case when the linear operator is completely continuous, sufficient conditions with respect to the regularization parameter are established, which guarantee the convergence of the regularized solution to the exact quasi-solution of the operator equation, depending on the error of the linear operator of the problem.

Key words**:** *problems with a free phase, nonlinear operator, quasi-solutions, normal quasi-solution, method of the regularization, convergence of the method.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.11.20