УДК 517.946+511.37

В. С. Ільків, Н. І. Страп[✉], І. І. Волянська

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ $z\,\partial/\partial z$ В УТОЧНЕНІЙ ШКАЛІ ПРОСТОРІВ СОБОЛЄВА

Досліджено нелокальну крайову задачу для диференціального рівняння з оператором узагальненого диференціювання $B = z\,\partial/\partial z$, який діє на функції комплексної змінної z. Встановлено умови розв'язності цієї задачі у шкалі просторів Хермандера, що утворюють уточнену соболєвську шкалу функцій однієї комплексної змінної. Розглядувана задача у випадку багатьох операторів узагальненого диференціювання є некоректною за Адамаром, а її розв'язність залежить від малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку. Показано, що у випадку однієї змінної відповідні знаменники не є малими і оцінюються знизу деякими сталими.

***Ключові слова**: рівняння з частинним похідними, нелокальна задача, комплексна змінна, простори Хермандера.*

Вступ. Останнім часом значний інтерес викликають нелокальні крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними та для диференціально-операторних рівнянь, дослідження яких посідає важливе місце в сучасній теорії диференціальних рівнянь [1, 9, 13, 16, 19, 22]. В основному такі задачі є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку.

Дослідженню умовно коректних задач з нелокальними крайовими умовами за часом та умовами періодичності (а також деякими іншими умовами) за просторовими змінними для рівнянь із частинними похідними присвячені роботи Б. Й. Пташника та його учнів [2, 8, 11, 12], у яких для аналізу оцінок знизу малих знаменників використано методи та результати метричної теорії чисел.

Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними зі сталими та змінними коефіцієнтами досліджуються також і у необмежених областях. Зокрема, для конструктивної побудови розв'язків нелокальних задач у працях П. І. Каленюка та його учнів [4, 6, 7] застосовано диференціально-символьний метод відокремлення змінних [5].

У статті розглянуто нелокальну двоточкову крайову задачу для рівняння з частинними похідними, у якому замість оператора диференціювання $\partial/\partial z$ використовується оператор узагальненого диференціювання $B = z\,\partial/\partial z$, що діє на функції скалярної комплексної змінної z. Такі оператори виникають у фізичних і математичних задачах (квантова теорія, теорія самоспряжених операторів [17], комбінаторика, асимптотичний аналіз [14, 15]). Випадок двовимірної області (часова змінна і просторова змінна) є принципово відмінним від випадку багатьох просторових змінних і вимагає окремого розгляду. Відмітимо, що функції від одного аргументу мають порівняно кращу асимптотику на безмежності, ніж функції від кількох аргументів. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку задачі. Показано, що проблема оцінювання малих знаменників не виникає, як у випадку багатьох просторових змінних.

Особливістю цієї роботи є дослідження умов коректної розв'язності розглядуваної нелокальної задачі у просторах Хермандера, що утворюють уточнену соболєвську шкалу функцій однієї комплексної змінної. Єдиною шкалою гільбертових просторів, у яких систематично розглянуто нелокаль-

✉ n.strap@i.ua

ні задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними, є шкала просторів Соболєва. Але для ряду задач ця шкала, параметризована числовими параметрами, є недостатньо тонко градуйована. Простори Хермандера займають центральне місце серед просторів узагальненої (функціональної) гладкості [10, 21]. Частковим випадком просторів Хермандера є сім'я гільбертових просторів з числовим параметром, який задає основну гладкість, і функціональним параметром, який визначає допоміжну гладкість.

1. Основні позначення та постановка задачі. Введемо такі позначення: S – область з множини $\mathbb{C}\setminus\{0\}$; D – циліндрична область $[0,T]\times S$, де $T>0$.

Нехай W – лінійний простір скінченних сум (основних функцій) вигляду $P(z)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} P_k z^k$, $z\in S$, P_k – комплексні коефіцієнти. Кожну скінченну суму $P(z)$ можна однозначно подати як суму трьох доданків:

$$P(z)=P_0+P_1(z)+P_2(1/z),$$

де $P_1(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k z^k$ і $P_2(w)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_{-k} w^k$ – многочлени з нульовими вільними членами, $P_1(0)=P_2(0)=0$.

Простір W', спряжений з простором W, є простором узагальнених функцій (лінійних неперервних функціоналів $Q:W\to\mathbb{C}$), які є формальними рядами (рядами Лорана) $Q(z)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} Q_k z^k=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} Q_k z^k$, що діють на основну функцію $P\in W$ за таким правилом: $\langle Q,P\rangle=\sum\limits_{k} Q_k\overline{P}_k$. (Рискою зверху позначено комплексно-спряжену величину).

Позначимо через M множину всіх повільно змінних на нескінченності вимірних за Борелем на півосі $[1,\infty)$ функцій $\psi:[1,\infty)\to(0,\infty)$ таких, що ψ і $\dfrac{1}{\psi}$ обмежені на кожному відрізку $[1,b]$, де $1<b<\infty$. В основі повільно змінних функцій лежать правильно змінні функції, введені Karamata J. (1930 р.) у роботі [18]. Ці функції добре вивчені і мають широке застосування [3, 20, 23].

Введемо шкали просторів $\{H_q^{\psi}(S)\}_{q\in\mathbb{R},\,\psi\in M}$ і $\{H_q^{n,\psi}(D)\}_{q\in\mathbb{R},\,\psi\in M}$, де $H_q^{\psi}(S)$ – гільбертів простір функцій $v=v(z)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} v_k z^k$, отриманий поповненням W за нормою $\|v\|_q=\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^q\psi^2(k)|v_k|^2\right)^{1/2}$, а $H_q^{n,\psi}(D)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, – банахів простір функцій $u=u(t,z)$ таких, що похідні $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r}=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k^{(r)}(t)z^k$ для кожного $t\in[0,T]$ належать до просторів $H_{q-r}^{\psi}(S)$ і неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми функції u у просторі $H_q^{n,\psi}(D)$ обчислюється за формулою

$$\|u\|^2_{H_q^{n,\psi}(D)}=\sum_{r=0}^{n}\max_{[0,T]}\left\|\frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}\right\|^2_{H_{q-r}^{\psi}(S)}.$$

Зауважимо, що $B^s v\in H_{q-s}^{\psi}(S)$ для всіх $s\in\mathbb{N}$, якщо $v\in H_q(S)$, де B –

оператор узагальненого диференціювання, тобто $Bv = z\,\partial v/\partial z$. Степені оператора B визначаються формулами $B^0 v = v$, $B^s v = B(B^{s-1}v)$ при $s \in \mathbb{N}$, тому, зокрема, маємо спектральну рівність $B^s(z^k) = k^s z^k$.

В області D розглянемо задачу з нелокальними умовами

$$Lu = \sum_{s_0+s_1\le n} a_{s_0,s_1} B^{s_1} \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

$$M_m u = \mu \left.\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{t=T} = \varphi_m, \qquad m = 0,1,\ldots,n-1, \tag{2}$$

де $s_0, s_1 \in \mathbb{Z}_+$, $a_{s_0,s_1} \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_{n,0} = 1$; $u = u(t,z)$ − шукана функція, а $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ − задані функції змінної z.

Якщо виконується умова $u \in H_q^{n,\psi}(D)$ для ряду Лорана $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t) z^k$, то правильною є формула $Bu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k u_k(t) z^k \in H_{q-1}^{n,\psi}(D)$, а також формули $Lu \in H_{q-n}^{0,\psi}(D)$ і $M_m u \in H_{q-m}^{\psi}(S)$, $m = 0,1,\ldots,n-1$.

Для функції $u \in H_q^{n,\psi}(D)$ рівняння (1) є рівнянням у просторі $H_{q-n}^{0,\psi}(D)$, а умови (2) − це умови у просторах $H_q^{\psi}(S)$, $H_{q-1}^{\psi}(S)$, ... , $H_{q-n-1}^{\psi}(S)$ відповідно.

Означення 1. Під *розв'язком* задачі (1), (2) будемо розуміти функцію $u = u(t,z)$, яка задовольняє рівняння (1) і умови (2) та належить до простору $H_q^{n,\psi}(D)$.

Для існування розв'язку задачі (1), (2) необхідно, щоб функції φ_m належали до просторів $H_{q-m}^{\psi}(S)$ при $m = 0,1,\ldots,n-1$ відповідно. Це твердження є наслідком з означення розв'язку задачі та властивостей просторів $H_q^{\psi}(S)$ і $H_q^{n,\psi}(D)$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t) z^k, \tag{3}$$

де коефіцієнти $u_k(t)$ − невідомі функції, які треба визначити.

Оператор L рівняння (1) запишемо у вигляді суми

$$L = \sum_{j=0}^{n} b_j(B) \frac{\partial^{n-j}}{\partial t^{n-j}},$$

де $b_0(B)$ − одиничний оператор, а оператори $b_j(B) = \sum_{s_1=0}^{j} a_{n-j,s_1} B^{s_1}$, $j = 1,\ldots,n$, є многочленами від оператора B не вище j-го степеня.

Функція $u_k = u_k(t)$ з формули (3) для кожного $k \in \mathbb{Z}$ є класичним розв'язком відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$\sum_{j=0}^{n} b_j(k) u_k^{(n-j)} = 0, \tag{4}$$

$$\mu u_k^{(m)}\Big|_{t=0} - u_k^{(m)}\Big|_{t=T} = \varphi_{mk}, \qquad m = 0,1,\ldots,n-1, \tag{5}$$

де коефіцієнти $b_j(k) = \sum_{s_1=0}^{j} a_{n-j,s_1} k^{s_1}$ – многочлени від k, степеня не вище j, φ_{mk} – коефіцієнти Фур'є функції φ_m, тобто коефіцієнти ряду

$$\varphi_m(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{mk} z^k .$$

Єдиність розв'язку $u_k(t)$ задачі (4), (5) у просторі $C^n[0,T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ є необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $H_q^{n,\psi}(D)$. Тому, якщо хоча б для одного k існує нетривіальний розв'язок $u_k(t)$ однорідної задачі (4), (5), то однорідна задача (1), (2) також має нетривіальний розв'язок $u = u(t,z)$, який визначається формулою $u(t,z) = u_k(t) z^k$, і отже, розв'язок задачі (1), (2) не може бути єдиним.

2. Побудова розв'язку задачі. Для побудови розв'язку задачі (4), (5) у рівнянні (4) пронормуємо коефіцієнти $b_j(k)$: подамо їх у вигляді добутку $b_j(k) = \tilde{k}^j \tilde{b}_j(k)$, де $\tilde{k} = \sqrt{1+k^2}$, $j = 1, \ldots, n$. Функції $\tilde{b}_j(k)$ рівномірно обмежені за k і разом з коефіцієнтами $b_j(k)$ лінійно залежать від параметрів $a_{n-j,0}, a_{n-j,1}, \ldots, a_{n-j,j}$.

Очевидно, справджується нерівність

$$\left|\tilde{b}_j(k)\right| \le \sum_{s_1=0}^{j} \left|a_{n-j,s_1}\right| \frac{|k|^{s_1}}{\tilde{k}^j} \le \max_{s_1=0,1,\ldots,j} \left|a_{n-j,s_1}\right| \sum_{s_1=0}^{j} \frac{|k|^{s_1}}{\tilde{k}^j} .$$

Якщо коефіцієнти $a_{s_0,s_1} \in \mathbb{C}$ рівняння (1) розглядати у крузі деякого радіуса A з центром у початку координат комплексної площини, то отримаємо оцінки

$$\left|\tilde{b}_j(0)\right| = \left|a_{n-j,0}\right| \le A ,$$

$$\left|\tilde{b}_j(\pm 1)\right| \le \frac{(j+1)A}{2^{j/2}} \le \frac{3}{2} A ,$$

$$\left|\tilde{b}_j(k)\right| < \frac{A}{\tilde{k}^j} \frac{|k|^{j+1}}{|k|-1} < \frac{A|k|}{|k|-1} \qquad \text{для} \qquad k \notin \{-1, 0, 1\} ,$$

тобто $\left|\tilde{b}_j(k)\right| < 2A$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$.

Звідси випливає, що для всіх (з урахуванням кратності) коренів $\lambda_1(k)$, $\ldots$, $\lambda_n(k)$ многочлена

$$P_k(\lambda) \equiv \prod_{j=1}^{n} \left(\lambda - \lambda_j(k)\right) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(k) \lambda^{n-j}$$

виконуються такі нерівності:

$$\left|\lambda_j(k)\right| \le 1 + \max\left\{ \left|\tilde{b}_1(k)\right|, \ldots, \left|\tilde{b}_n(k)\right| \right\} < 1 + 2A . \qquad (6)$$

Очевидно, що числа $\gamma_j = \tilde{k}\lambda_j(k)$ є коренями характеристичного рівняння $\gamma^n + b_1(k)\gamma^{n-1} + \ldots + b_n(k) = 0$ для рівняння (4).

Позначимо через K множину тих чисел $k \in \mathbb{Z}$, для яких многочлен $P_k(\lambda)$ має кратні корені.

У випадку різних коренів $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$, тобто коли $k \in \mathbb{Z} \setminus K$, загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{\ell=1}^{n} C_{k\ell} e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)t}, \tag{7}$$

де $C_{k\ell}$ – довільні комплексні сталі, що належить до простору $\mathbb{C}^n[0,T]$.

Якщо $u_k(t)$ є розв'язком задачі (4), (5), то числа $\tilde{C}_{k\ell} = C_{k\ell}\left(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}\right)$, $\ell = 1,\ldots,n$, є розв'язками системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell^{m-1}(k)\tilde{C}_{k\ell} = \frac{\varphi_{m-1,k}}{\tilde{k}^{m-1}}, \qquad m = 1,\ldots,n, \tag{8}$$

з матрицею Вандермонда $(\lambda_\ell^{m-1})_{m,\ell=1}^{n}$ і, навпаки, якщо числа $\tilde{C}_{k1},\ldots,\tilde{C}_{kn}$ є розв'язками системи лінійних алгебраїчних рівнянь (8), то функція $u_k(t)$, визначена формулою (7), у якій $C_{k\ell} = \tilde{C}_{k\ell}\left(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}\right)^{-1}$, є розв'язком задачі (4), (5).

Розв'язуючи систему (8) за правилом Крамера, одержуємо рівності

$$\tilde{C}_{k\ell} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{j\ell}}{\Delta} \tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}, \qquad \ell = 1,\ldots,n,$$

де $\Delta = \prod_{1\le r<q\le n} \left(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\right)$ – визначник Вандермонда, а $\Delta_{j\ell}$ – його відповідні алгебричні доповнення.

Для того щоб задача (4), (5) мала єдиний класичний розв'язок (у просторі $\mathbb{C}^n[0,T]$), необхідно і достатньо, щоб для кожного $k \in \mathbb{Z} \setminus K$ виконувалась умова $\mu \ne e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}$, $\ell = 1,\ldots,n$. З цієї умови випливає, що

$$\ln\mu \ne \tilde{k}\lambda_\ell(k)T + i2\pi m \qquad \text{або} \qquad \lambda_\ell(k) \ne \frac{\ln\mu - i2\pi m}{\tilde{k}T}$$

для довільних $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}$ та $\ell = 1,\ldots,n$, $i^2 = -1$.

У протилежному випадку, коли $\mu = e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}$ для деяких цілих k та ℓ, існує таке число $m \in \mathbb{Z}$, що корінь $\lambda_\ell(k)$ визначається за формулою $\lambda_\ell(k) = \dfrac{\ln\mu - i2\pi m}{\tilde{k}T}$. Тому виконується рівність

$$\frac{(\ln\mu - i2\pi m)^n}{T^n\tilde{k}^n} + \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(k)\frac{(\ln\mu - i2\pi m)^{n-j}}{T^{n-j}\tilde{k}^{n-j}} = 0$$

або еквівалентна їй рівність

$$(\ln\mu - i2\pi m)^n + \sum_{j=1}^{n} b_j(k)T^j(\ln\mu - i2\pi m)^{n-j} = 0. \tag{9}$$

У випадку кратних коренів загальний розв'язок рівняння (4) також буде мати вигляд (7), але залежно від кратності кореня $\lambda_j(k)$ замість коефіцієнтів $C_{k\ell}$ будуть многочлени $\tilde{C}_{k\ell}(t)$ різних степенів. Тому умова (9) є необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (4), (5) і у випадку кратних коренів [11].

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $H_q^{n,\psi}(D)$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння* (9) *не мало розв'язків у цілих числах* m *і* k.

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай однорідна задача (1), (2) у просторі $H_q^{n,\psi}(D)$ має не більше одного розв'язку. Якщо існує розв'язок задачі (1), (2), тоді всі функції $u_k(t)$ визначаються однозначно, тобто однорідна задача (4), (5) у просторі $\mathbb{C}^n[0,T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ має єдиний розв'язок. Отже, $\Delta \cdot \prod_{\ell=1}^{n}\left(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}\right) \neq 0$ при $k \in \mathbb{Z} \setminus K$, тобто $\mu \neq e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}$, $\ell = 1,\dots,n$. Отже, рівняння (9) не має розв'язків у цілих числах m і k. Аналогічні нерівності отримуємо при $k \in K$.

Достатність. Доведемо від супротивного. Нехай рівняння (9) має розв'язок k^*, m^*. Тоді можна вважати, що $\lambda_1(k^*) = \dfrac{\ln\mu - i2\pi m^*}{\tilde{k}^* T}$, і встановити, що однорідна задача (4), (5) має розв'язок $e^{\tilde{k}^*\lambda_\ell(k^*)T} = e^{(\ln\mu - i2\pi m^*)t/T}$. Звідси випливає, що задача (1), (2) у просторі $H_q^{n,\psi}(D)$ має неєдиний розв'язок, оскільки $u^*(t,z) = Cz^{k^*}e^{(\ln\mu - i2\pi m^*)t/T}$ для довільної комплексної сталої C є розв'язком відповідної однорідної задачі.

Теорему доведено. ♦

В умовах теореми 1 для довільного $k \in \mathbb{Z}$ розв'язок $u_k(t)$ задачі (4), (5) існує, а при $k \in \mathbb{Z} \setminus K$ має такий вигляд:

$$u_k(t) = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{j\ell}}{\prod\limits_{1\le r<q\le n}\left(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\right)} \frac{e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)t}}{\left(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}\right)} \tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}. \tag{10}$$

Оцінимо абсолютну величину розв'язку:

$$\left|u_k(t)\right| \le \frac{1}{|\Delta|}\max_{j,\ell}\left|\Delta_{j\ell}\right| \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\left|e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)t}\right|}{\left|\mu - e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}\right|} \sum_{j=0}^{n-1}\left|\tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}\right|.$$

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату і перетворимо отриману нерівність до вигляду

$$\left|u_k(t)\right|^2 \le n^3 \frac{1}{|\Delta|^2}\max_{j,\ell}\left|\Delta_{j\ell}\right|^2 \max_{\ell}\left|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}}\right|^2 \sum_{j=0}^{n-1}\left|\tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}\right|^2. \tag{11}$$

Оскільки $\Delta_{j\ell}(k)$ – визначники порядку $n-1$, що мають обмежені елементи, які є степенями чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, то з (6) маємо

$$\left|\Delta_{j\ell}(k)\right| < (n-1)!(1+2A)^{n(n-1)/2}. \tag{12}$$

Для подальшої оцінки $|u_k(t)|$ розглянемо вираз Δ^2, який є дискримінантом $D(k)$ полінома $P_k(\lambda)$ і для якого справджуються такі два зображення [11]:

$$\Delta^2 = D(k) = \prod_{1\le r<q\le n}\left(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\right)^2 = \tilde{k}^{-n(n-1)}\prod_{1\le r<q\le n}\left(\tilde{k}\lambda_q(k) - \tilde{k}\lambda_r(k)\right)^2,$$

$$D(k)=\omega_n\begin{vmatrix}1 & \tilde b_1(k) & \dots & \tilde b_{n-1}(k) & \tilde b_n(k) & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & \tilde b_{n-2}(k) & \tilde b_{n-1}(k) & \tilde b_n(k) & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \tilde b_1(k) & \tilde b_2(k) & \tilde b_3(k) & \dots & \tilde b_n(k)\\ n & (n-1)\tilde b_1(k) & \dots & \tilde b_{n-1}(k) & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & n & \dots & 2\tilde b_{n-2}(k) & \tilde b_{n-1}(k) & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & n & (n-1)\tilde b_1(k) & (n-2)\tilde b_2(k) & \dots & \tilde b_{n-1}(k)\end{vmatrix},$$

де $\omega_n=(-1)^{n(n-1)/2}$. Визначник $D(k)$ подамо у такому вигляді:

$$D(k)=D_0\left(\frac{k}{\tilde k}\right)^{n(n-1)}+\frac{D_1}{\tilde k}\left(\frac{k}{\tilde k}\right)^{n(n-1)-1}+\frac{D_2}{\tilde k^2}\left(\frac{k}{\tilde k}\right)^{n(n-1)-2}+\dots+\frac{D_{n(n-1)}}{\tilde k^{n(n-1)}}=$$

$$=\left(\frac{k}{\tilde k}\right)^{n(n-1)}\left(D_0+\frac{D_1}{k}+\frac{D_2}{k^2}+\dots+\frac{D_{n(n-1)}}{k^{n(n-1)}}\right),$$

де D_0, D_1, D_2, ..., $D_{n(n-1)}$ – комплексні числа, які є многочленами від коефіцієнтів a_{s_0,s_1}, причому D_0 – дискримінант многочлена $\lambda^n+\sum_{j=1}^{n}a_{n-j,j}\lambda^{n-j}$ (будується за головною частиною рівняння (1)) визначається як

$$D_0=\omega_n\begin{vmatrix}1 & a_{n-1,1} & \dots & a_{1,n-1} & a_{0,n} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{0,n} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & a_{n-3,3} & \dots & a_{0,n}\\ n & (n-1)a_{n-1,1} & \dots & a_{1,n-1} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & n & \dots & 2a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & n & (n-1)a_{n-1,1} & (n-2)a_{n-2,2} & \dots & a_{1,n-1}\end{vmatrix},$$

а $D_{n(n-1)}$ – дискримінант многочлена $\lambda^n+\sum_{j=1}^{n}a_{n-j,0}\lambda^{n-j}$ (будується за коефіцієнтами біля похідних $\partial^{n-j}/\partial t^{n-j}$):

$$D_{n(n-1)}=\omega_n\begin{vmatrix}1 & a_{n-1,0} & \dots & a_{1,0} & a_{0,0} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & a_{2,0} & a_{1,0} & a_{0,0} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,0} & a_{n-2,0} & a_{n-3,0} & \dots & a_{0,0}\\ n & (n-1)a_{n-1,0} & \dots & a_{1,0} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & n & \dots & 2a_{2,0} & a_{1,0} & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & n & (n-1)a_{n-1,0} & (n-2)a_{n-2,0} & \dots & a_{1,0}\end{vmatrix}.$$

Нехай $D_0\neq 0$, тоді визначник $D(k)$ запишемо так:

$$D(k)=\left(\frac{k}{\tilde k}\right)^{n(n-1)}\frac{D_0}{2}\left(2+\frac{2D_1}{D_0k}+\frac{2D_2}{D_0k^2}+\dots+\frac{2D_{n(n-1)}}{D_0k^{n(n-1)}}\right)=$$

$$=\left(\frac{k}{\tilde k}\right)^{n(n-1)}\frac{D_0}{2}\left(2+\frac{2}{kD_0}\left(D_1+\frac{D_2}{k}+\dots+\frac{D_{n(n-1)}}{k^{n(n-1)-1}}\right)\right).$$

З цієї формули випливає нерівність $|D(k)| \geq \frac{|D_0|}{2}\left(\frac{|k|}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)}$ при $|k| \geq \tilde{D}$, де число $\tilde{D}$ має вигляд $\tilde{D} = \frac{2}{|D_0|}\left(|D_1| + |D_2| + \ldots + |D_{n(n-1)}|\right)$.

Врахувавши нерівність $|k|\tilde{k} \geq 1/\sqrt{2}$, оцінимо модуль визначника $D(k)$ знизу:

$$|D(k)| \geq \frac{|D_0|}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n(n-1)} = \frac{1}{2^{n(n-1)/2+1}}|D_0|. \tag{13}$$

Отримана оцінка є точною за змінною k, оскільки оцінка зверху, яка випливає із зображення визначника $D(k)$, має такий вигляд: $|D(k)| \leq \frac{3}{2}|D_0|$.

Для оцінки зверху дробу $\dfrac{e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}}$ використовуємо такі дві формули:

$$\left|e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)t}\right| = e^{\tilde{k}\operatorname{Re}\lambda_\ell(k)t} \leq \max\left\{1, e^{\tilde{k}\operatorname{Re}\lambda_\ell(k)T}\right\}$$

і

$$\tilde{k}\left|\operatorname{Re}\lambda_j(k)\right| \to \infty \qquad \text{при} \qquad |k| \to \infty.$$

Перша формула очевидна. Знайдемо, за яких умов виконується друга.

З рівності $2\operatorname{Re}\lambda_j(k) = \lambda_j(k) + \bar{\lambda}_j(k) = \lambda_j(k) - \left(-\bar{\lambda}_j(k)\right)$ і того факту, що числа $-\bar{\lambda}_1(k), \ldots, -\bar{\lambda}_n(k)$ є коренями многочлена

$$P_{1k}(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}\left(\lambda + \bar{\lambda}_j(k)\right) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j \bar{\tilde{b}}_j(k)\lambda^{n-j},$$

отримаємо множники $2\operatorname{Re}\lambda_j(k)$ результанта

$$R(k) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{n}\left(\lambda_j(k) - \left(-\bar{\lambda}_\ell(k)\right)\right)$$

многочленів P_k та P_{1k}, який дорівнює такому визначнику з коефіцієнтів:

$$R(k) = \begin{vmatrix} 1 & \tilde{b}_1(k) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \tilde{b}_{n-2}(k) & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{b}_1(k) & \tilde{b}_2(k) & \tilde{b}_3(k) & \ldots & \tilde{b}_n(k) \\ 1 & -\bar{\tilde{b}}_1(k) & \ldots & (-1)^{n-1}\bar{\tilde{b}}_{n-1}(k) & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & (-1)^{n-2}\bar{\tilde{b}}_{n-2}(k) & (-1)^{n-1}\bar{\tilde{b}}_{n-1}(k) & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -\bar{\tilde{b}}_1(k) & \bar{\tilde{b}}_2(k) & -\bar{\tilde{b}}_3(k) & \ldots & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k) \end{vmatrix}.$$

Для довільного $j = 1, \ldots, n$ оцінимо модуль цього результанта:

$$|R(k)| \leq 2^{n^2}(1 + 2A)^{n^2-1}\left|\operatorname{Re}\lambda_j\right|.$$

Оскільки

$$\tilde{k}^{n^2}R(k) = R_0 k^{n^2} + R_1 k^{n^2-1} + \ldots + R_{n^2},$$

де

$$R_0 = \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1,1} & \dots & a_{1,n-1} & a_{0,n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{0,n} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & a_{n-3,3} & \dots & a_{0,n} \\ 1 & -\bar{a}_{n-1,1} & \dots & (-1)^{n-1}\bar{a}_{1,n-1} & (-1)^n\bar{a}_{0,n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & (-1)^{n-2}\bar{a}_{2,n-2} & (-1)^{n-1}\bar{a}_{1,n-1} & (-1)^n\bar{a}_{0,n} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\bar{a}_{n-1,1} & \bar{a}_{n-2,2} & -\bar{a}_{n-3,3} & \dots & (-1)^n\bar{a}_{0,n} \end{vmatrix},$$

то у випадку $R_0 \neq 0$ маємо

$$|R(k)| = \left(\frac{|k|}{\tilde{k}}\right)^{n^2} \frac{|R_0|}{2} \left| 2 - \frac{2}{kR_0}\left(R_1 + \frac{R_2}{k} + \dots + \frac{R_{n^2}}{k^{n^2-1}}\right)\right|.$$

Якщо $k \in \mathbb{Z}$ задовольняє умову $|k| \geq \tilde{R}$, де

$$\tilde{R} = \frac{2}{|R_0|}\left(|R_1| + |R_2| + \dots + |R_{n^2}|\right),$$

то справджується нерівність

$$|R(k)| \geq \frac{|R_0|}{2}\left(\frac{|k|}{\tilde{k}}\right)^{n^2} \geq \frac{1}{2^{n^2/2+1}}|R_0|.$$

Отже, при $|k| \to \infty$ доведено другу формулу для оцінки зверху дробу $\dfrac{e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}}$, зокрема встановлено таку нерівність:

$$\tilde{k}\left|\operatorname{Re}\lambda_j(k)\right| \geq \tilde{k} \cdot 2^{-n^2}(1+2A)^{1-n^2}|R(k)| \geq$$

$$\geq \tilde{k} \cdot 2^{-3n^2/2-1}(1+2A)^{1-n^2}|R_0| \to \infty.$$

Якщо $\operatorname{Re}\lambda_j(k) > 0$, то справджується рівномірна на $[0, T]$ оцінка

$$\left|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}}\right| \leq \frac{e^{\tilde{k}\operatorname{Re}\lambda_\ell(k)T}}{\left|\mu - e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}\right|} =$$

$$= \frac{e^{\tilde{k}\operatorname{Re}\lambda_\ell(k)T}}{e^{\tilde{k}\operatorname{Re}\lambda_\ell(k)T}\left|\dfrac{\mu}{e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}} - 1\right|} = \frac{1}{\left|\mu e^{-\tilde{k}\lambda_\ell(k)T} - 1\right|} \leq 2$$

при $\tilde{k} \geq M_1$ і $|k| > \tilde{R}$, де

$$M_1 = \frac{\ln(2|\mu|)}{T|R_0|}2^{3n^2/2+1}(1+2A)^{n^2-1}.$$

Якщо ж $\operatorname{Re}\lambda_j(k) < 0$, то

$$\left|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}}\right| = \frac{1}{\left|\mu - e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}\right|} \leq \frac{2}{|\mu|}$$

при $\tilde{k} \geq M_2$ і $|k| > \tilde{R}$, де

$$M_2 = \frac{\ln(2/|\mu|)}{T|R_0|}2^{3n^2/2+1}(1+2A)^{n^2-1}.$$

Отже, при $|k| > \tilde{R}$ і

$$\tilde{k} \geq \max\{M_1, M_2\} = \frac{2^{3n^2/2+1}(1+2A)^{n^2-1}}{T|R_0|}(\ln 2 + |\ln|\mu||)$$

справджується нерівність

$$\left|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}}\right| \leq 2\max\left\{1, \frac{1}{|\mu|}\right\}. \tag{14}$$

Отже, враховуючи нерівності (11)–(14) для всіх $t \in [0, T]$ отримаємо, що

$$|u_k(t)|^2 \leq C\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}|^{-2j}|\varphi_{jk}|^2, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus K_1, \tag{15}$$

де

$$C = C(A, n, \mu) = \frac{1}{|D_0|}n^3((n-1)!)^2 2^{n(n-1)+4}(1+2A)^{n(n-1)}\max\left\{1, \frac{1}{|\mu|^2}\right\} > 0,$$

K_1 – множина цілих чисел (скінченна), для яких $|k| \leq \max\{\tilde{D}, \tilde{R}\}$ або $\tilde{k} \leq \max\{M_1, M_2\}$.

На основі формул (3) і (10) отримаємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t,z) = \sum_{k\in K_1}u_k(t)z^k + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus K_1}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_{j\ell}}{\Delta}\frac{e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_\ell(k)T}}\tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}z^k. \tag{16}$$

Враховуючи формулу (16) і нерівність (15), оцінимо зверху квадрат норми розв'язку задачі (1), (2):

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H_q^{n,\psi}(D)} &\leq \sum_{r=0}^{n}\max_{[0,T]}\sum_{k\in K_1}|u_k(t)|^2\,\psi^2(k)(1+\tilde{k}^2)^{(q-r)} + \\ &+ C\sum_{r=0}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus K_1}\psi^2(k)(1+\tilde{k}^2)^{(q-r)}\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}|^{-2j}|\varphi_{jk}|^2 \leq \\ &\leq C_1\sum_{j=0}^{n-1}\|\varphi_j\|^2_{H^{\psi}_{q-j}(S)}.\end{aligned} \tag{17}$$

де додатна стала C_1 залежить від коефіцієнтів рівняння a_{s_0,s_1}, параметра μ, а також від чисел A та n.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $\varphi_j(z) \in H^{\psi}_{q-j}(S)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $\psi \in M$, $R_0 D_0 \neq 0$ *і для всіх* $k \in K_1$ *рівняння* (9) *не має розв'язків у цілих числах. Тоді існує лише один розв'язок задачі* (1), (2), *який належить до простору* $H_q^{n,\psi}(D)$. *Цей розв'язок зображується рядом* (16) *і неперервно залежить від правих частин* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$.

Д о в е д е н н я. За умови $R_0 D_0 \neq 0$ справджується оцінка (15) розв'язку $u_k(t)$ задачі (4), (5) для $k \in \mathbb{Z} \setminus K_1$. З умови несумісності рівняння (9) випливає існування $u_k(t)$ для всіх $k \in K_1$. Оскільки K_1 – скінченна множина, то з нерівності (17) випливає твердження теореми.

Теорему доведено. ♦

Із теореми 2 про існування розв'язку випливає наслідок, який характеризує властивості оператора задачі (1), (2).

Наслідок. *За умов теореми* 2 *оператор задачі* (1), (2) *є гомеоморфізмом* $u \mapsto (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ *з простору функцій* $H_q^{n,\psi}(D)$ *на простір вектор-функцій* $H_q^{\psi}(S) \times H_{q-1}^{\psi}(S) \times \ldots \times H_{q+1-n}^{\psi}(S)$.

Зауважимо, що умова $D_0 R_0 \neq 0$ теореми 2 виконується для майже всіх у сенсі міри Лебеґа коефіцієнтів a_{s_0,s_1} диференціального рівняння (1), тобто для множини повної міри. Рівність $D_0 R_0 = 0$ справджується лише на об'єднанні двох алгебричних гіперповерхонь $R_0 = 0$ і $D_0 = 0$.

У випадку багатьох просторових змінних $z_1, z_2, \ldots, z_p$ властивість гомеоморфізму виконується для множини коефіцієнтів неповної міри, а обернений оператор задачі (1), (2) діє у ширший, ніж $H_q^{n,\psi}(D)$, простір, гладкість якого залежить від оцінок знизу малих знаменників.

Висновки. У роботі досліджено нелокальну крайову задачу для диференціального рівняння з узагальненим оператором диференціювання $B = z\,\partial/\partial z$, який діє на функцію однієї комплексної змінної. Встановлено умови розв'язності цієї задачі у просторах Хермандера, що утворюють уточнену соболєвську шкалу функцій однієї комплексної змінної. Показано, що у випадку однієї просторової змінної z задача (1), (2) є коректною за Адамаром, на відміну від задачі з багатьма просторовими змінними. Доведено, що проблема малих знаменників не виникає, оскільки відповідні вирази оцінюються знизу сталими. Встановлено, що оператор задачі є гомеоморфізмом.

1. *Борок В. М., Фардигола Л. В.* Нелокальные корректные краевые задачи в слое // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 1. – С. 20–25.
   Те саме: *Borok V. M., Fardigola L. V.* Nonlocal well-posed boundary-value problems in a layer // Math. Notes. – 1990. – **48**, No. 1. – P. 635–639.
   – https://doi.org/10.1007/BF01164259.
2. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1624–1650.
   Те саме: *Il'kiv V. S., Ptashnyk B. I.* Problems for partial differential equations with nonlocal conditions. Metric approach to the problem of small denominators // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, No. 12. – P. 1847–1875.
   – https://doi.org/10.1007/s11253-006-0172-8.
3. *Ільків В. С., Страп Н. І., Волянська І. І.* Умови розв'язності нелокальної крайової задачі для диференціально-операторного рівняння зі слабкою нелінійністю в уточненій соболєвській шкалі просторів функцій багатьох дійсних змінних // Укр. мат. журн. – 2020. – **72**, № 4. – С. 452–466.
   Те саме: *Ilkiv V. S., Strap N. I., Volyanska I. I.* Solvability conditions for the nonlocal boundary-value problem for a differential-operator equation with weak nonlinearity in the refined Sobolev scale of spaces of functions of many real variables // Ukr. Math. J. – 2020. – **72**, No. 4. – P. 515–535.
   – https://doi.org/10.1007/s11253-020-01798-7.
4. *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М.* Задача з нелокальною двоточковою умовою за часом для однорідного рівняння із частинними похідними нескінченного порядку за просторовими змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 17–26.
   Те саме: *Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M.* Problem with nonlocal two-point condition in time for a homogeneous partial differential equation of infinite order with respect to space variables // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, No. 1. – P. 1–15.
5. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту «Львів. політехніка», 2002. – 292 с.
6. *Каленюк П., Когут І., Нитребич З.* Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для неоднорідного рівняння з частинними похідними // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003.– Вип. 62. – С. 60–66.

7. *Каленюк П., Когут І., Нитребич З.* Про ядро задачі з нелокальною двоточковою умовою для рівняння із частинними похідними // Мат. вісн. НТШ. – 2007. – **4**. – С. 116–128.
8. *Кондратів Л. Й., Симотюк М. М., Тимків І. Р.* Задача з нелокальними умовами для безтипних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами з відхиленням аргументу // Прикарпат. вісн. НТШ. Число. – 2018. – № 1(45). – С. 37–44.
9. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 246 с.
10. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 392–404.
    Те саме: *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Extended Sobolev scale and elliptic operators // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, No. 3. – P. 435–447.
    – https://doi.org/10.1007/s11253-013-0787-5.
11. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кмітъ І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
12. *Савка І. Я.* Нелокальна задача із залежними коефіцієнтами в умовах для рівняння другого порядку за часовою змінною // Карпат. мат. публікації. – 2010. – **2**, № 2. – С. 101–110.
13. *Ashyralyev A., Simsek S. N.* An operator method for a third order partial differential equation // Numer. Funct. Anal. Optim. – 2017. – **38**, No. 10. – P. 1341–1359. – https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1317000.
14. *Flajolet P., Sedgewick R.* Analytic combinatorics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 826 p.– https://doi.org/10.1017/CBO9780511801655.
15. *Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O.* Concrete mathematics: A foundation for computer science. – Reading, MA: Addison-Wesley, 1994. – xiii+657 p.
16. *Il'kiv V. S., Nytrebych Z. M., Pukach P. Ya.* Nonlocal problem with moment conditions for hyperbolic equations // Electron. J. Differ. Equat. – 2017. – **2017**, No. 265. – P. 1–9.
17. *Jorgensen P., Pedersen S., Tian F.* Restrictions and extensions of semibounded operators // Complex Anal. Oper. Theory. – 2014. – **8**. – P. 591–663.
    – https://doi.org/10.1007/s11785-012-0241-y.
18. *Karamata J.* Sur certains «Tauberian theorems» de M. M. Hardy et Littlewood // Mathematica (Cluj). – 1930. – **3**. – P. 33–48.
19. *Malanchuk O., Nytrebych Z.* Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables // Open Mathematics. – 2017. – **15**, No. 1. – P. 101–110.
20. *Marić V.* Regular variation and differential equations // Lect. Notes Math. – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. – **1726**. – 128 p.
21. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hormander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin/Boston: De Gruyter Co., 2014. – xii+297 p.
22. *Modanlı M.* Two numerical methods for fractional partial differential equation with nonlocal boundary value problem // Adv. Differ. Equat. – 2018. – **2018**. – Article No. 333. – https://doi.org/10.1186/s13662-018-1789-2.
23. *Reshnick S. I.* Extreme values, regular variation and point processes. – New York: Springer-Verlag, 1987. – 320 p.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A EQUATION WITH DIFFERENTIATION OPERATOR $z\,\partial/\partial z$ IN A REFINED SOBOLEV SCALE

The nonlocal boundary value problem for the differential equation with the operator of generalized differentiation $B = z\,\partial/\partial z$ *acting on the functions of a complex variable* z *is investigated. The conditions for the solvability of this problem in the scale of Hörmander spaces, that form a refined Sobolev scale of functions of one complex variable, are established. The considered problem in the case of many generalized differentiation operators is incorrect in Hadamard sense, and its solvability depends on the small denominators that arise in the constructing of a solution. In the article shown that in the case of one variable, the corresponding denominators are not small and are estimated from below by some constants.*

Key words: *partial differential equation, nonlocal problem, complex variable, Hörmander spaces.*

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
01.12.20