УДК 517.925

Н. П. Колун✉

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ДЕЯКИХ ТИПІВ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ РІЗНОГО ТИПУ

Розглядається диференціальне рівняння n-го порядку, яке містить у правій частині суму доданків із правильно і швидко змінними нелінійностями, та встановлюється асимптотична поведінка деяких типів розв'язків цього рівняння.

Ключові слова: *нелінійності різного типу, диференціальні рівняння n-го порядку, правильно змінні нелінійності, швидко змінні нелінійності, асимптотична поведінка.*

Вступ. Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y), \tag{1}$$

де $\alpha_i \in \{-1,1\}$, $i = 1,\ldots,m$; $p_i : [a,\omega[\, \to \,]0,+\infty[$, $i = 1,\ldots,m$, − неперервні функції, $-\infty < a < \omega \le +\infty$; $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \to \,]0,+\infty[$, де Δ_{Y_0} − однобічний окіл Y_0 (Y_0 дорівнює або нулеві, або $\pm\infty$), − неперервні функції при $i = 1,\ldots,\ell$ і двічі неперервно диференційовні при $i = \ell+1,\ldots,m$ такі, що

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i(\lambda y)}{\varphi_i(y)} = \lambda^{\sigma_i}, \quad i = 1,\ldots,\ell, \quad \text{для будь-якого} \quad \lambda > 0, \tag{2}$$

$$\varphi_i'(y) \ne 0, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi_i(y) \in \{0,+\infty\}, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)}{\varphi_i'^2(y)} = 1, \quad i = \ell+1,\ldots,m. \tag{3}$$

Із умов (2) випливає, що кожна з функцій φ_i, $i = 1,\ldots,\ell$, є правильно змінною при $y \to Y_0$ функцією порядку σ_i (див. монографію Є. Сенети [15, Гл. 1, §1, с. 9]), а з умов (3), зокрема, випливає, що функції φ_i, $i = \ell+1,\ldots,m$, є швидко змінними при $y \to Y_0$ (див. монографію V. Marić [21, Розд. 3, §3.4, Леми 3.2, 3.3, с. 91–92]). Таким чином, права частина диференціального рівняння (1) містить як доданки з правильно змінними нелінійностями, так і доданки зі швидко змінними нелінійностями.

Означення 1. Розв'язок y рівняння (1) називають $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-розв'язком*, де $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0,\omega[\, \subset [a,\omega[$ і задовольняє такі умови:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \pm\infty, \quad k = 1,\ldots,n-1, \tag{4}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2}{y^{(n)}(t)y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0. \tag{5}$$

У випадку, коли $n = 2$, у роботах [5–7, 12–14, 18] досліджувалися асимптотичні властивості $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння

✉ nataliiakolun@ukr.net

(1) при умові, що на кожному такому розв'язку y права частина рівняння (1) еквівалентна при $t \uparrow \omega$ одному s-му доданку, де $s \in \{1,\dots,m\}$, тобто, коли

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = 0 \quad \text{для всіх} \quad i \in \{1,\dots,m\}\backslash\{s\}. \tag{6}$$

У роботі [8] було запропоновано підхід, який дозволив поширити відомі результати для $n = 2$ для двочленних диференціальних рівнянь із правильно змінною нелінійністю у правій частині (див. роботи [2, 16, 19–25]) на випадок $n \ge 2$. У роботах [3, 4, 10, 11, 17] досліджувалося диференціальне рівняння n-го порядку, яке містить у правій частині суму доданків із правильно змінними нелінійностями. Актуальним постає питання про асимптотичну поведінку розв'язків диференціальних рівнянь n-го порядку, що містять у правій частині суму доданків із нелінійностями різного типу. Такому типу рівнянь присвячена пропонована робота.

Метою цієї роботи є поширення результатів роботи [6] на випадок $n \ge 2$: встановлення умов існування $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (1) при $n \ge 2$, а також асимптотичних при $t \uparrow \omega$ зображень для таких розв'язків і їхніх похідних $(n-1)$-го порядку включно при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ у випадку, коли виконуються умови (6) і $s \in \{1,\dots,m\}$, тобто s-й доданок містить правильно змінну нелінійність. При виконанні умов (6) будемо називати s-й доданок *головним доданком* у правій частині диференціального рівняння (1).

Зазначимо, що при проведенні досліджень будемо використовувати властивість функцій φ_i (яка випливає з умов (2)), що справджуються подання вигляду

$$\varphi_i(y) = |y|^{\sigma_i} L_i(y), \qquad i = 1,\dots,\ell, \tag{7}$$

де L_i, $i = 1,\dots,\ell$, – повільно змінні функції, тобто правильно змінні функції нульового порядку.

При вивченні $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (1) будемо використовувати деякі апріорні асимптотичні властивості. Введемо функцію $\pi_\omega : [a,\omega[\, \to \mathbb{R}$:

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \omega < +\infty. \end{cases}$$

Наступне твердження випливає безпосередньо з роботи [1, див. наслідок 10.1].

Лема 1. *Якщо* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, *то для кожного* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-*розв'язку рівняння* (1) *справджуються асимптотичні співвідношення*

$$y^{(k-1)}(t) \sim \left[(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)\right]^{n-k} \prod_{i=k}^{n-1} a_{0i}^{-1} y^{(n-1)}(t), \qquad k = 1,\dots,n-1, \quad t \uparrow \omega, \tag{8}$$

де $a_{0i} = (n-i)\lambda_0 - (n-i-1)$, $i = 1,\dots,n-1$.

1. Основні результати. Будемо вважати, що

$$\Delta_{Y_0} = \Delta_{Y_0}(b),$$

де $\Delta_{Y_0}(b) = [\,b, Y_0[$, якщо Δ_{Y_0} – лівий окіл Y_0, і $\Delta_{Y_0}(b) =]\,Y_0, b]$, якщо Δ_{Y_0} –

правий окіл Y_0, а число b задовольняє нерівності

$$|b| < 1 \qquad \text{при} \qquad Y_0 = 0,$$

$$b > 1 \qquad \text{при} \qquad Y_0 = +\infty,$$

$$b < -1 \qquad \text{при} \qquad Y_0 = -\infty.$$

Із означення $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків рівняння (1) випливає, що кожен такий розв'язок і його похідні до порядку n включно є відмінними від нуля на деякому проміжку $[t_1, \omega[\subset [t_0, \omega[$, причому на цьому проміжку перша похідна розв'язку є додатною, якщо Δ_{Y_0} – лівий окіл Y_0, і від'ємною, якщо Δ_{Y_0} – правий окіл Y_0. Введемо два числа ν_0 і ν_1, які визначають відповідно знаки $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язку та його першої похідної на проміжку $[t_1, \omega[$:

$$\nu_0 = \operatorname{sgn} b, \qquad \nu_1 = \pm 1,$$

причому $\nu_1 = 1$, якщо Δ_{Y_0} – лівий окіл Y_0, і $\nu_1 = -1$, якщо Δ_{Y_0} – правий окіл Y_0.

Для формулювання отриманих результатів введемо такі допоміжні позначення:

$$q(t) = \alpha_s(\lambda_0 - 1)^{n-1} \prod_{i=2}^{n-1} a_{0i}^{-1} J_s(t),$$

$$J_s(t) = \int_{A_s}^{t} [\pi_\omega(\tau)]^{n-1} p_s(\tau)\, d\tau, \qquad H_s(y) = \int_{B_s}^{y} \frac{dx}{\varphi_s(x)}, \qquad s \in \{1, \dots, m\},$$

$$A_s = \begin{cases} a, & \int_a^\omega [\pi_\omega(\tau)]^{n-1} p_s(\tau)\, d\tau = \pm\infty, \\ \omega, & \int_a^\omega [\pi_\omega(\tau)]^{n-1} p_s(\tau)\, d\tau = \text{const}, \end{cases} \qquad B_s = \begin{cases} b, & \int_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_s(y)} = \pm\infty, \\ Y_0, & \int_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_s(y)} = \text{const}. \end{cases}$$

Відмітимо деякі властивості функції H_s.

Оскільки $H_s'(y) = \dfrac{1}{\varphi_s(y)} > 0$ при $y \in \Delta_{Y_0}(b)$, то функція H_s зростає на $\Delta_{Y_0}(b)$ і існує зростаюча обернена функція $H_s^{-1} : \Delta_{Z_s}(c_s) \to \Delta_{Y_0}(b)$ така, що

$$\lim_{\substack{z \to Z_s \\ z \in \Delta_{Z_s}(c_s)}} H_s^{-1}(z) = Y_0, \tag{9}$$

де

$$c_s = \int_{B_s}^{b} \frac{dx}{\varphi_s(x)}, \qquad Z_s = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} H_s(y) = \begin{cases} 0, & B_s = Y_0, \\ +\infty, & B_s = b < Y_0, \\ -\infty, & B_s = b > Y_0, \end{cases}$$

$$\Delta_{Z_s}(c_s) = \begin{cases} [c_s, Z_s[, & \Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[, \\ ]Z_s, c_s], & \Delta_{Y_0}(b) =]Y_0, b]. \end{cases}$$

Враховуючи зображення (7) і твердження 1, 2 із [21, див. додаток, с. 115)], маємо

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \frac{y}{H_s(y)\varphi_s(y)} = 1 - \sigma_s. \tag{10}$$

Теорема 1. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$ *і* $\sigma_s \neq 1$ *при деякому* $s \in \{1,\ldots,\ell\}$. *Тоді для існування* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-розв'язків диференціального рівняння* (1)*, які задовольняють умови* (6)*, необхідно, щоб виконувались нерівності*

$$\alpha_s \nu_0 \left[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)\right]^n \prod_{i=1}^{n-1} a_{0i} > 0, \qquad \nu_0\nu_1 a_{01}(\lambda_0-1)\pi_\omega(t) > 0\,,$$

$$t \in]a,\omega[\,, \tag{11}$$

а також умови

$$\alpha_s(\lambda_0-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1} a_{0i}^{-1} \lim_{t\uparrow\omega} J_s(t) = \mathrm{Z}_s, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_s'(t)}{J_s(t)} = \frac{(1-\sigma_s)a_{01}}{\lambda_0-1}, \tag{12}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i\left(H_s^{-1}(q(t))\right)}{p_s(t)\varphi_s\left(H_s^{-1}(q(t))\right)} = 0 \qquad \text{для всіх} \quad i \in \{1,\ldots,\ell\}\setminus\{s\}, \tag{13}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i\left(H_s^{-1}\left(q(t)(1+\delta_i)\right)\right)}{p_s(t)\varphi_s\left(H_s^{-1}\left(q(t)\right)\right)} = 0 \quad \text{для всіх} \quad i\in\{\ell+1,\ldots,m\}, \tag{14}$$

де δ_i *– будь-які числа з деякого однобічного околу нуля. Більш того, для кожного такого* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-розв'язку справджуються асимптотичні зображення*

$$y(t) = H_s^{-1}\left(q(t)\right)[1+o(1)], \qquad t\uparrow\omega, \tag{15}$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)], \quad k=1,\ldots,n-1, \quad t\uparrow\omega. \tag{16}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $y:[t_0,\omega[\,\to\mathbb{R}$ – довільний $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язок диференціального рівняння (1), який задовольняє умови (6). Тоді з (1) та (6) маємо, що

$$y^{(n)}(t) = \alpha_s p_s(t)\varphi_s(y(t))[1+o(1)], \qquad t\uparrow\omega, \tag{17}$$

і існує $t_1 \in [t_0,\omega[$ таке, що

$$\operatorname{sgn} y(t) = \nu_0, \qquad \operatorname{sgn} y'(t) = \nu_1, \qquad \operatorname{sgn} y^{(n)}(t) = \alpha_s, \qquad t\in[t_1,\omega[\,.$$

Звідси, враховуючи умови (8) леми 1, отримаємо другу нерівність (11). Крім того, згідно з лемою 1, виконуються асимптотичні співвідношення (8), у яких $a_{0i}\neq 0$, $i=1,\ldots,n-1$. Із них випливають асимптотичні співвідношення

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)], \quad k=1,\ldots,n-1, \quad t\uparrow\omega. \tag{18}$$

З огляду на (5), запишемо

$$y^{(n)}(t) \sim \frac{1}{\lambda_0}\left[\frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)}\right]^2 y^{(n-2)}(t) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_0}\left[\frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)}\right]^2 \frac{y^{(n-2)}(t)}{y^{(n-3)}(t)}\cdots\frac{y''(t)}{y'(t)}\,y'(t) \sim$$

$$\sim \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)^2\pi_\omega^2(t)}\frac{a_{0n-2}}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}\cdots\frac{a_{02}}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}y'(t)=$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=2}^{n-1}a_{0i}}{\left[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)\right]^{n-1}}y'(t), \qquad t\uparrow\omega .$$

Внаслідок (17)

$$\frac{y'(t)}{\varphi_s(y(t))}=\alpha_s\left[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)\right]^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}a_{0i}^{-1}p_s(t)[1+o(1)], \qquad t\uparrow\omega , \tag{19}$$

звідки, зокрема, випливає нерівність

$$\alpha_s\nu_1\left[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)\right]^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}a_{0i}>0, \qquad t\in\,]a,\omega[\,,$$

з якої, з огляду на другу знакову умову (11), випливає перша нерівність (11). Інтегруючи співвідношення (19) на проміжку від t_1 до t, де $t\in\,]t_1,\omega[$, отримаємо

$$\int\limits_{y(t_1)}^{y(t)}\frac{ds}{\varphi_s(s)}=\alpha_s(\lambda_0-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}\frac{1}{a_{0i}}\int\limits_{t_1}^{t}\left[\pi_\omega(\tau)\right]^{n-1}p_s(\tau)[1+o(1)]\,d\tau, \quad t\uparrow\omega . \tag{20}$$

Оскільки, згідно з першою умовою (4), $\lim\limits_{t\uparrow\omega}y(t)=Y_0$, то з (20) зрозуміло, що невласні інтеграли

$$\int\limits_{y(t_1)}^{Y_0}\frac{ds}{\varphi_s(s)} \qquad \text{і} \qquad \int\limits_{t_1}^{t}\left[\pi_\omega(\tau)\right]^{n-1}p_s(\tau)[1+o(1)]\,d\tau$$

збігаються або розбігаються одночасно. Зважаючи на цей факт і на вибір границь інтегрування A_s і B_s у функціях J_s і H_s, співвідношення (20) можемо записати у вигляді

$$H_s(y(t))=q(t)[1+o(1)], \qquad t\uparrow\omega . \tag{21}$$

Звідси випливає перша з умов (12). Крім того, враховуючи (10), із (21) отримуємо

$$\frac{y(t)}{\varphi_s(y(t))}=\alpha_s(1-\sigma_s)(\lambda_0-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}a_{0i}^{-1}J_s(t)[1+o(1)], \qquad t\uparrow\omega . \tag{22}$$

Із (19), (22) і умови (8) леми 1 випливає друге граничне співвідношення (12).

Далі, з (21) маємо

$$y(t)=H_s^{-1}\left(q(t)[1+o(1)]\right), \qquad t\uparrow\omega . \tag{23}$$

Функція H_s^{-1} є правильно змінною порядку $\frac{1}{1-\sigma_s}$ при $z\to Z_s$ як обернена до правильно змінної при $y\to Y_0$ функції H_s порядку $1-\sigma_s\neq 0$. Більш того, згідно з умовами (12), існує $t_2\in[t_1,\omega[$ таке, що функція

$$z(t)=q(t)[1+o(1)]$$

така, що $\lim\limits_{t\uparrow\omega}z(t)=Z_s$ і $z(t)\in\Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t\in[t_2,\omega[$. Тому, враховуючи властивості правильно змінних функцій, співвідношення (23) можемо записати у вигляді (15). Крім того, з умов (8) леми 1 і асимптотики (15) випливає виконання асимптотичних співвідношень (16).

Оскільки $s \in \{1, \dots, \ell\}$, функції φ_i, $i = 1, \dots, \ell$, є правильно змінними при $y \to \mathrm{Y}_0$, а функція $z(t)$ задовольняє вказані вище умови, то

$$\varphi_i\big(H_s^{-1}(q(t)[1+o(1)])\big) = \varphi_i\big(H_s^{-1}(q(t))\big)[1+o(1)], \qquad t \uparrow \omega.$$

Тоді з асимптотичних подань (15) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i\big(H_s^{-1}(q(t))\big)[1+o(1)]}{p_s(t)\varphi_s\big(H_s^{-1}(q(t))\big)[1+o(1)]} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i\big(H_s^{-1}(q(t))\big)}{p_s(t)\varphi_s\big(H_s^{-1}(q(t))\big)}, \qquad i = 1, \dots, \ell,$$

звідки, враховуючи (6), отримуємо умови (14).

При $i \in \{\ell+1, \dots, m\}$ із (23), враховуючи властивості функції $z(t)$, отримаємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i\big(H_s^{-1}(q(t)[1+o(1)])\big)}{p_s(t)\varphi_s\big(H_s^{-1}(q(t))\big)}. \tag{24}$$

Оскільки функції $\varphi_i\big(H_s^{-1}(z)\big)$, $i = \ell+1, \dots, m$, є монотонними на проміжку $\Delta_{Z_s}(c_s)$ для будь-яких δ_i із деякого однобічного околу нуля, то існує $t_3 \in [t_2, \omega[$ таке, що при $t \in [t_3, \omega[$ виконуються нерівності

$$\frac{p_i(t)\varphi_i\big(H_s^{-1}(q(t)[1+o(1)])\big)}{p_s(t)\varphi_s\big(H_s^{-1}(q(t))\big)} \ge \frac{p_i(t)\varphi_i\big(H_s^{-1}(q(t)[1+\delta_i])\big)}{p_s(t)\varphi_s\big(H_s^{-1}(q(t))\big)} \ge 0. \tag{25}$$

Тоді із (6), (24) і (25) випливають умови (14).

Теорему доведено. ♦

Теорема 2. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ *і* $\sigma_s \ne 1$ *при деякому* $s \in \{1, \dots, \ell\}$, *а також виконуються умови* (11)–(13) *і при будь-якому* $i \in \{\ell+1, \dots, m\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i\big(H_s^{-1}(q(t)(1+u))\big)}{p_s(t)\varphi_s\big(H_s^{-1}(q(t))\big)} = 0 \tag{26}$$

рівномірно за $u \in [-\delta, \delta]$ *для деякого* $0 < \delta < 1$. *Нехай, крім того, алгебраїчне відносно* ρ *рівняння*

$$(1+\rho)\prod_{i=1}^{n-1}\big(a_{0i}+\rho\big) = \sigma_s \prod_{i=1}^{n-1} a_{0i}, \tag{27}$$

де $a_{0i} = (n-i)\lambda_0 - (n-i-1)$, $i = 1, \dots, n-1$, *не має коренів з нульовою дійсною частиною. Тоді існують* $P_\omega(\mathrm{Y}_0, \lambda_0)$*-розв'язки диференціального рівняння* (1) *з асимптотичними зображеннями* (15) *і* (16), *причому таких розв'язків існує* m*-параметрична сім'я, якщо серед коренів рівняння* (27) *є* m *коренів (з урахуванням кратних), знак дійсної частини яких співпадає зі знаком функції* $(1-\lambda_0)\pi_\omega(t)$.

Д о в е д е н н я. Застосовуючи до рівняння (1) заміну

$$H_s\big(y(t)\big) = q(t)[1+u_1(t)],$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}\big[1+u_{k+1}(t)\big], \qquad k = 1, \dots, n-1, \tag{28}$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$u_1' = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[-\frac{\pi_\omega(t)J'_s(t)}{J_s(t)}(1+u_1) + \frac{a_{01}}{\lambda_0 - 1}\frac{G(t,u_1)}{q(t)}(1+u_2)\right],$$

$$u_k' = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[1 + u_k + \frac{a_{0k}}{\lambda_0 - 1}(1+u_k)(1+u_{k+1}) - \frac{a_{0k-1}}{\lambda_0 - 1}(1+u_k)^2\right],$$

$$k = 2,\dots,n-1,$$

$$u_n' = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[1 + u_n - \frac{a_{0n-1}}{\lambda_0 - 1}(1+u_n)^2 + \frac{p_s(t)\pi_\omega^2(t)q(t)}{a_{01}J_s(t)G(Y(t,u_1))}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\prod_{k=2}^{n-1}(1+u_k)\right)^{-1}(1+R(t,u_1))\right], \tag{29}$$

у якій

$$G(t,u_1) = \frac{Y(t,u_1)}{\varphi_s(Y(t,u_1))}, \qquad Y(t,u_1) = H_s^{-1}\big(q(t)(1+u_1)\big), \tag{30}$$

$$R(t,u_1) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m} \frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,u_1))}. \tag{31}$$

Враховуючи умови (12), підберемо число $t_0 \in [a,\omega[$ так, щоб при $|u_1| \le \delta$

$$q(t)(1+u_1) \in \Delta_{Z_s}(c_s), \qquad Y(t,u_1) \in \Delta_{Y_0}(b).$$

Розглянемо систему (29) на множині

$$\Omega = [t_0,\omega[\times \mathbb{R}^n_\delta, \quad \mathbb{R}^n_\delta = \{(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n : |u_k| \le \delta,\ k = 1,\dots,n\}.$$

Тоді із (9) і (12) маємо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y(t,u_1) = Y_0 \qquad \text{рівномірно за} \quad u_1 \in [-\delta,\delta]. \tag{32}$$

Звідси, враховуючи (11) і вигляд функції G, маємо що

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{G(t,u_1)}{H_s(Y(t,u_1))} = 1 - \sigma_s \qquad \text{рівномірно за} \quad u_1 \in [-\delta,\delta],$$

тобто

$$G(t,u_1) = \left[1 - \sigma_s + R_1(t,u_1)\right]H_s\big(Y(t,u_1)\big)$$

і

$$\frac{1}{G(t,u_1)} = \frac{1/(1-\sigma_s) + R_2(t,u_1)}{H_s(Y(t,u_1))},$$

де функції R_i, $i = 1,2$, задовольняють умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} R_i(t,u_1) = 0 \qquad \text{рівномірно за} \quad u_1 \in [-\delta,\delta]. \tag{33}$$

Отже, враховуючи вигляд функції $Y(t,u_1)$, отримаємо зображення

$$G(t,u_1) = \left[1 - \sigma_s + R_1(t,u_1)\right]q(t)(1+u_1), \tag{34}$$

$$\frac{1}{G(t,u_1)} = \frac{1/(1-\sigma_s) + R_2(t,u_1)}{q(t)(1+u_1)}. \tag{35}$$

Крім того, покажемо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} R(t,u_1) = 0 \qquad \text{рівномірно за} \quad u_1 \in [-\delta,\delta]. \tag{36}$$

Оскільки функції φ_i, $i = 1, \ldots, \ell$, є правильно змінними функціями порядків σ_i при $y \to Y_0$, $y \in \Delta_{Y_0}(b)$, то, з огляду на зображення (7), з урахуванням властивості повільно змінних функцій [15] маємо

$$\varphi_i(Y(t,u_1)) = \varphi_i(H_s^{-1}(q(t)(1+u_1))) =$$

$$= \left|H_s^{-1}(q(t))(1+u_1)\right|^{\sigma_i} L_i(H_s^{-1}(q(t)(1+u_1))) =$$

$$= \left|H_s^{-1}(q(t))(1+u_1)\right|^{\sigma_i} L_i(H_s^{-1}(q(t)))(1+r_i(t,u_1)) =$$

$$= \varphi_i(H_s^{-1}(q(t)))(1+u_1)^{\sigma_i}(1+r_i(t,u_1)), \qquad i = 1, \ldots, \ell,$$

де функції $r_i(t,u_1)$ такі, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_i(t,u_1) = 0 \qquad \text{рівномірно за} \qquad u_1 \in [-\delta, \delta].$$

Враховуючи ці умови,

$$\lim_{t \uparrow \omega} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{\ell} \frac{\alpha_i p_i(t) \varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t) \varphi_s(Y(t,u_1))} = 0 \qquad \text{рівномірно за} \qquad u_1 \in [-\delta, \delta], \qquad (37)$$

оскільки із умов (14) маємо

$$\lim_{t \uparrow \omega} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{\ell} \frac{\alpha_i p_i(t) \varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t) \varphi_s(Y(t,u_1))} =$$

$$= \lim_{t \uparrow \omega} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{\ell} \frac{\alpha_i p_i(t)\, \varphi_i(H_s^{-1}(q(t)))(1+u_1)^{\sigma_i}[1+r_i(t,u_1)]}{\alpha_s p_s(t)\, \varphi_s(H_s^{-1}(q(t)))(1+u_1)^{\sigma_s}[1+r_s(t,u_1)]} =$$

$$= \lim_{t \uparrow \omega} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{\ell} \frac{\alpha_i p_i(t) \varphi_i(H_s^{-1}(q(t)))}{\alpha_s p_s(t) \varphi_s(H_s^{-1}(q(t)))} = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad u_1 \in [-\delta, \delta].$$

З огляду на вигляд функції $R(t,u_1)$, із (37) і (26) отримаємо (36). Враховуючи позначення (31), (34) і (35) та використовуючи функції

$$h(t) = \frac{1}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}, \qquad g(t) = \frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) J_s'(t)}{a_{01}(1-\sigma_s) J_s(t)},$$

систему диференціальних рівнянь (31) запишемо у вигляді

$$u_1' = h(t)[f_1(t,u_1,u_2) + a_{01}(1-\sigma_s)u_2 + V_1(u_1,u_2)],$$

$$u_k' = h(t)[-a_{0k-1}u_k + a_{0k}u_{k+1} + V_k(u_k,u_{k+1})], \qquad k = 2, \ldots, n-1,$$

$$u_n' = h(t)\Big[f_2(t,u_1,\ldots,u_{n-1}) - \sum_{i=1}^{n-1} u_i - (\lambda_0 + 1)u_n + V_n(t,u_1,\ldots,u_n)\Big], \quad (38)$$

де

$$f_1(t,u_1,u_2) = a_{01}\big[R_1(t,u_1)(1+u_2) + (1-\sigma_s) - (1-\sigma_s)g(t)\big](1+u_1),$$

$$V_1(u_1,u_2) = a_{01}(1-\sigma_s)u_1 u_2,$$

$$V_k(u_k,u_{k+1}) = a_{0k}u_k u_{k+1} - a_{0k-1}u_k^2, \qquad k = 2, \ldots, n-1,$$

$$f_2(t,u_1,\dots,u_{n-1}) = (1-\sigma_s)g(t)R_2(t,u_1)\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1+u_k}(1+R(t,u_1)) +$$

$$+\Big(g(t)-1\Big)\Big(1-\sum_{k=1}^{n-1}u_k\Big),$$

$$V_n(t,u_1,\dots,u_n) = -a_{0n-1}u_n^2 + g(t)\left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1+u_k} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1}u_k\right).$$

Отриману систему диференціальних рівнянь розглянемо на раніше введеній множині Ω. На цій множині праві частини системи неперервні і, згідно з другою з умов (12), а також з урахуванням (33) і (36) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_1(t,u_1,u_2) = 0 \qquad \text{рівномірно за} \quad (u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2_\delta,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_2(t,u_1,\dots,u_{n-1}) = 0 \qquad \text{рівномірно за} \quad (u_1,\dots,u_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}_\delta,$$

$$\lim_{|u_k|+|u_{k+1}|\to 0}\frac{V_k(u_k,u_{k+1})}{|u_k|+|u_{k+1}|} = 0, \qquad k=1,\dots,n-1,$$

$$\lim_{|u_1|+\dots+|u_n|\to 0}\frac{V_n(t,u_1,\dots,u_n)}{|u_1|+\dots+|u_n|} = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad t\in[t_0,\omega[\,.$$

Крім того,

$$\int_{t_0}^{\omega} h(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\lambda_0-1}\int_{t_0}^{\omega}\frac{d\tau}{\pi_\omega(\tau)} = \frac{1}{\lambda_0-1}\ln|\pi_\omega(\tau)|\Big|_{t_0}^{\omega} = \pm\infty\,.$$

Запишемо характеристичне рівняння матриці, складеної із коефіцієнтів при $u_1,\dots,u_n$ у квадратних дужках системи (38), тобто матриці

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_{01}(1-\sigma_s) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_{01} & a_{02} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{0n-2} & a_{0n-1} \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -(\lambda_0+1) \end{pmatrix}.$$

Отримаємо алгебраїчне рівняння (27), яке з огляду на умови теореми не має коренів з нульовою дійсною частиною.

Таким чином, для системи (38) виконуються всі умови теореми 2.2 із роботи [9]. Згідно з цією теоремою, система (38) має щонайменше один розв'язок $(u_k)_{k=1}^n : [t_1,\omega[\to\mathbb{R}^n$, $t_1\ge t_0$, який прямує до нуля при $t\uparrow\omega$, причому таких розв'язків є ціла m-параметрична сім'я, якщо серед коренів алгебраїчного рівняння (27) є m коренів, знаки яких співпадають зі знаком $\pi_\omega(t)(1-\lambda_0)$ у лівому околі ω. З огляду на заміну (28), а також умови (10) і (12), кожному такому розв'язку системи (38) відповідає розв'язок диференціального рівняння (1), який має асимптотичні зображення (15) і (16), причому цей розв'язок є $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язком рівняння (1).

Теорему доведено. ♦

2. *Приклад.* Для ілюстрації отриманих результатів розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$y^{(n)} = \alpha_1 p_1(t)|y|^\sigma + \alpha_2 p_2(t)e^{\mu y}, \tag{39}$$

де $\alpha_i\in\{-1,1\}$, $i=1,2$, $p_i:[a,\omega[\,\to\,]0,+\infty[$, $i=1,2$, − неперервні функції, $-\infty<a<\omega\le+\infty$, $\sigma\ne1$, $\mu\ne0$.

З'ясуємо питання про існування $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків рівняння (39) при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$, для яких виконуються умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = \pm\infty, \qquad Y_0 = \pm\infty, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_2(t)e^{\mu y(t)}}{p_1(t)|y(t)|^\sigma} = 0. \tag{40}$$

Із теорем 1 і 2 отримаємо

Наслідок 1. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$ *і* $\sigma \neq 1$. *Тоді для існування* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-розв'язків диференціального рівняння* (39), *які задовольняють умови* (40), *необхідно, а якщо*

$$p_2(t) = $$
$$= o\left(\frac{p_1(t)\left|(1-\sigma)\left(\alpha_1(\lambda_0-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}\frac{1}{a_{0i}}J_1(t)+C\right)\right|^{\sigma/(1-\sigma)}}{\exp\left(\mu\nu_0\left|(1-\sigma)\left(\alpha_1(\lambda_0-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}\frac{1}{a_{0i}}J_1(t)(1+u)+C\right)\right|^{1/(1-\sigma)}\right)}\right), \quad t\uparrow\omega,$$

рівномірно за $u \in [-\delta,\delta]$ *для деякого* $0<\delta<1$, *де*

$$C = \begin{cases} 0, & \sigma > 1, \\ \dfrac{\nu_0|b|^{1-\sigma}}{\sigma-1}, & \sigma < 1, \end{cases}$$

і алгебраїчне відносно ρ *рівняння*

$$(1+\rho)\prod_{i=1}^{n-1}(a_{0i}+\rho) = \sigma\prod_{i=1}^{n-1}a_{0i}, \tag{41}$$

у якому $a_{0i} = (n-i)\lambda_0 - (n-i-1)$, $i=1,\ldots,n-1$, *не має коренів з нульовою дійсною частиною, то і достатньо, щоб виконувалися умови*

$$\alpha_1\nu_0\left[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)\right]^n\prod_{i=1}^{n-1}a_{0i} > 0, \qquad \nu_0\nu_1 a_{01}(\lambda_0-1)\pi_\omega(t) > 0, \qquad t\in\,]a,\omega[\,,$$

$$\alpha_1(\lambda_0-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}\frac{1}{a_{0i}}\lim_{t\uparrow\omega}J_1(t) = Z_1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_1'(t)}{J_1(t)} = \frac{(1-\sigma_1)a_{01}}{\lambda_0-1}.$$

Більше того, для кожного такого розв'язку справджуються асимптотичні зображення

$$y(t) = \left|(1-\sigma)\left(\alpha_1(\lambda_0-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}\frac{1}{a_{0i}}J_1(t)\right)\right|^{1/(1-\sigma)}[1+o(1)], \qquad t\uparrow\omega,$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)], \qquad k=1,\ldots,n-1, \qquad t\uparrow\omega.$$

При цьому таких розв'язків існує m*-параметрична сім'я, якщо серед коренів рівняння* (41) *є* m *коренів* (*враховуючи кратні*) *таких, що знак їх дійсної частини співпадає зі знаком функції* $(1-\lambda_0)\pi_\omega(t)$.

Висновки. Для рівняння (1) при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$ встановлено умови існування $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків у випадку, коли головним доданком рівняння (1) є доданок із правильно змінною нелінійністю. Також знайдено асимптотичні зображення при $t\uparrow\omega$, $\omega\le+\infty$, для таких розв'язків і їхніх похідних $(n-1)$-го порядку включно і розглянуто питання про кількість розв'язків зі знайденими зображеннями.

1. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1998. – 295 с.
2. *Евтухов В. М., Кириллова Л. А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 8. – С. 1053–1061.
   Те саме: *Evtukhov V. M., Kirillova L. A.* On the asymptotics of solutions of nonlinear second-order differential equations // Differ. Equat. – 2005. – **41**, No. 8. – P. 1105–1114. – https://doi.org/10.1007/s10625-005-0256-5.
3. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 354–380.
   Те саме: *Evtukhov V. M., Klopot A. M.* Asymptotic representations for some classes of solutions of ordinary differential equations of order n with regularly varying nonlinearities // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, No. 3. – P. 393–422. – https://doi.org/10.1007/s11253-013-0785-7.
4. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2014. – **50**, № 5. – С. 584–600.
   Те саме: *Evtukhov V. M., Klopot A. M.* Asymptotic behavior of solutions of nth-order ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities // Differ. Equat. – 2014. – **50**, No. 5. – P. 581–597. – https://doi.org/10.1134/S0012266114050024.
5. *Евтухов В. М., Колун Н. П.* Асимптотика решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, № 3. – С. 323–346.
   Те саме: *Evtukhov V. M., Kolun N. P.* Asymptotics of the solutions of second-order differential equations with regularly and rapidly varying nonlinearities // J. Math. Sci. – 2019. – **243**, No. 3. – P. 381–408. – https://doi.org/10.1007/s10958-019-04546-w.
6. *Евтухов В. М., Колун Н. П.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений с правильно и быстро меняющимися нелинейностями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 1. – С. 32–42.
   Те саме: *Evtukhov V. M., Kolun N. P.* Asymptotic representations of the solutions of differential equations with regularly and rapidly varying nonlinearities // J. Math. Sci. – 2019. – **240**, No. 1. – P. 34–47. – https://doi.org/10.1007/s10958-019-04334-6.
7. *Евтухов В. М., Колун Н. П.* Быстро меняющиеся решения дифференциального уравнения второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями // Укр. мат. вісн. – 2018. – **15**, № 1. – С. 18–42.
   Те саме: *Evtukhov V. M., Kolun N. P.* Rapidly varying solutions of a second-order differential equation with regularly and rapidly varying nonlinearities // J. Math. Sci. – 2018. – **235**, No. 1. – P. 15–34. – https://doi.org/10.1007/s10958-018-4055-y.
8. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**, № 5. – С. 628–650.
   Те саме: *Evtukhov V. M., Samoilenko A. M.* Asymptotic representations of solutions of nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities // Differ. Equat. – 2011. – **47**, No. 5. – P. 627–649. – https://doi.org/10.1134/S001226611105003X.
9. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 52–80.
   Те саме: *Evtukhov V. M., Samoilenko A. M.* Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, No. 1. – P. 56–86. – https://doi.org/10.1007/s11253-010-0333-7.
10. *Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Математика і механіка. – 2013. – **18**, Вип. 3 (19). – С. 16–34.

11. *Клопот А. М.* Об асимптотике решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 4. – С. 447–465.
Те саме: *Klopot A. M.* On the asymptotics of solutions of nonautonomous differential equations of order n // J. Math. Sci. – 2013. – **194**, No. 4. – P. 354–373. – https://doi.org/10.1007/s10958-013-1534-z.
12. *Колун Н. П.* Асимптотика медленно меняющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями // Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – **23**, вип. 2(32). – С. 54–67.
13. *Колун Н. П.* Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь другого з нелінійностями різного типу // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2019. – Вип. 1(34). – С. 26–41.
14. *Колун Н. П.* Асимптотичні зображення повільно змінних розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями різного типу в правій частині // Буков. мат. журн. – 2018. – **6**, № 3-4. – С. 89–102.
15. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.
Те саме: *Seneta E.* Regularly varying functions // Lect. Notes Math. – 1976. – **508**. – viii+116 p.
16. *Cano-Casanova S.* Decay rate at infinity of the positive solutions of a generalized class of Thomas – Fermi equations // Proc. 8 th AIMS Conf. Discrete Cont. Dynam. Systems Differ. Equat. Suppl. 2011. – 2011. – Vol. 1. – P. 240–249. – https://doi.org/10.3934/proc.2011.2011.240.
17. *Evtukhov V. M., Klopot A. M.* Asymptotic behavior of solutions of ordinary differential equations of n-th order with regularly varying nonlinearities // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. – 2014. – **61**. – P. 37–61.
18. *Evtukhov V. M., Kolun N. P.* Asymptotic behaviour of solutions of second-order nonlinear differential equations // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. – 2018. – **75**. – P. 105–114.
19. *Kusano T., Manojlović J. V., Marić V.* Increasing solutions of Thomas – Fermi type differential equations – The sublinear case // Bull. de l'Acad. Serbe des Sci. et des Arts. – Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Sciences mathématiques. – 2011. – **CXLIII**, No. 36. – P. 21–36.
20. *Manojlović J. V., Marić V.* An asymptotic analysis of positive solutions of Thomas – Fermi type sublinear differential equations // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. – 2012. – **57**. – P. 75–94.
21. *Marić V.* Regular variation and differential equations // Lect. Notes Math. – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. – **1726**. – 128 p.
22. *Marić V., Radašin Z.* Asymptotic behavior of solutions of the equation $y'' = f(t)\varphi(\psi(y))$ // Glasnik matematički. – 1988. – **23** (43), No. 1. – P. 27–34.
23. *Marić V., Tomić M.* Asymptotics of solutions of a generalized Thomas – Fermi equations // J. Differ. Equat. – 1980. – **35**, No. 1. – P. 36–44. – https://doi.org/10.1016/0022-0396(80)90047-9.
24. *Taliaferro S. D.* Asymptotic behavior of positive decreasing solutions of $y''=F(t,y,y')$ // Geometric analysis and nonlinear PDE: Lect. Notes in Pure and Appl. Math. / Ed. I. J. Bakelman. – New York: M. Dekker, 1993. – **144**. – P. 105–127.
25. *Taliaferro S. D.* Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \varphi(t)f(y)$ // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – **12**, No. 6. – P. 853–865. – https://doi.org/10.1137/0512071.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOME TYPES OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DIFFERENT TYPES OF NONLINEARITIES

The differential equation of the n-th order containing regularly and rapidly varying nonlinearities in its right-hand side is considered. The asymptotic behavior of some types of solutions of this equation is established.

Key words: *different types of nonlinearities, differential equations of the n-th order, regularly varying nonlinearities, rapidly varying nonlinearities, asymptotic behavior.*

Військова акад. (м. Одеса), Одеса

Отримано
10.12.20