УДК 517.956

І. Д. Пукальський, Б. О. Яшан[✉]

БАГАТОТОЧКОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Досліджується задача оптимального керування процесом, який описується багатоточковою задачею зі скісною похідною для параболічного рівняння другого порядку. Розглянуто випадки внутрішнього, стартового і межового керування. Критерій якості задається сумою об'ємних і поверхневих інтегралів. За допомогою принципу максимуму і апріорних оцінок встановлено існування і єдиність розв'язків багатоточкової крайової задачі з виродженням. Коефіцієнти параболічного рівняння і крайової умови мають степеневі особливості довільного порядку за будь-якими змінними на деякій множині точок. Знайдено оцінки розв'язку багатоточкової крайової задачі та його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою. Встановлено необхідні та достатні умови існування оптимального розв'язку задачі.

Ключові слова: *інтерполяційні нерівності, принцип максимуму, апріорні оцінки, виродження, крайові умови.*

Теорія оптимального керування процесами, що описуються крайовими задачами для рівнянь із частинними похідними, багата результатами і активно розвивається в наш час. Необхідність такого роду досліджень пов'язана з їх активним використанням при вирішенні проблем природознавства, зокрема гідро- і газодинаміки, фізики тепла, фільтрації, дифузії, плазми, теорії біологічних популяцій.

Основи теорії оптимального керування детермінованими системами, що описуються рівняннями з частинними похідними, вперше систематично описано в монографії [3]. Важливі результати цієї теорії у випадку еволюційних рівнянь, що задані на обмеженому часовому проміжку, отримано, зокрема, в працях [1, 11−13, 15]. У роботах [14, 16] стан керованої системи описується задачею Діріхле для лінійних параболічних рівнянь. У праці [16] доведено існування та єдиність оптимального керування у випадку фінального спостереження, а також отримано необхідні умови оптимальності у формі узагальненого правила множників Лаґранжа.

Задача вибору оптимального керування процесами, що описується параболічними крайовими задачами з обмеженим внутрішнім керуванням, присвячено праці [5, 8]. Функціонал якості визначається об'ємним інтегралом.

У цій статті розглядається багатоточкова крайова задача зі скісною похідною для параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайової умови за будь-якими змінними на деякій множині точок. За допомогою апріорних оцінок і принципу максимуму доведено існування єдиного розв'язку поставленої задачі та встановлено оцінки його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою. Одержані результати використовуються для встановлення необхідних і достатніх умов існування оптимального розв'язку системи, що описується крайовою задачею з внутрішнім, стартовим і межовим керуванням та інтегральними критеріями якості.

1. Постановка задачі та основні обмеження. Нехай $t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}, \eta$ − довільні числа, $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1}$, $\eta \ne t_k$, $k \in \{0, 1, \ldots, N+1\}$; D − обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω − деяка обмежена область, $\bar{\Omega} \subset D$, $\dim \Omega \le n-1$. Позначимо $Q_{(0)} = \{(t,x) \mid t \in [t_0, t_{N+1}], x \in \Omega\} \cup \{(t,x) \mid t =$

[✉]bohdanjaschan94@gmail.com

$= \eta,\ x \in D\}$, $\eta \in (t_0, t_{N+1})$, $\Gamma = [0,T) \times \partial D$.

Розглянемо в області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ задачу знаходження функції (u, q), $q = (q_1, q_2, q_3)$, на яких функціонал

$$I(q) = \int_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int_D F_1(t,x; u(t,x;q), q_1(t,x))\, dx +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int_{\partial D} F_2(t,x; u(t,x;q), q_2(t,x))\, d_x S +$$
$$+ \int_D F_3(x; u(t_1,x;q), u(t_2,x;q), \ldots, u(t_N,x;q) q_3(x))\, dx \qquad (1)$$

досягає мінімуму в класі функцій

$$q \in V = \{q \mid q_1 \in C^{\alpha}(Q), q_2 \in C^{1+\alpha}(D), q_3 \in C^{2+\alpha}(Q), \nu_{11}(t,x) \le q_1 \le$$
$$\le \nu_{12}(t,x), \nu_{21}(t,x) \le q_2 \le \nu_{22}(t,x), \nu_{31}(x) \le q_3 \le \nu_{32}(x)\},$$

де $\alpha \in (0,1)$, C^{α} − простір функцій, які мають неперервну похідну порядку α, q_1, q_2, q_3 − керування (внутрішнє, межове, граничне), $\nu_{mn}(t,x)$ − обмеження на керування. При цьому функція $u(t,x; q_1(t,x), q_2(t,x), q_3(x))$ при $(t,x) \in Q^{(0)} = Q \setminus Q_{(0)}$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x) \partial_{x_i} + A_0(t,x)\right] u =$$
$$= f(t,x; q_1(t,x)), \qquad (2)$$

нелокальну умову за часовою змінною

$$(Bu)(x) \equiv u(t_0, x; q) + \sum_{k=1}^{N} \zeta_k(x) u(t_k, x; q) = \varphi(x; q_3(x)), \qquad (3)$$

а на бічній поверхні Γ − крайову умову

$$\lim_{x \to z \in \partial D} (B_1 u - \psi)(t,x) = \lim_{x \to z \in \partial D} \left[\sum_{k=1}^{n} b_k(t,x) \partial_{x_k} u(t,x;q) - \right.$$
$$\left. - b_0(t,x) u(t,x;q) - \psi(t,x; q_3(x))\right] = 0. \qquad (4)$$

Степеневі особливості коефіцієнтів диференціальних виразів L і B_1 у точці $P(t,x) \in Q^{(0)}$ характеризуватимуть функції $s_1(\beta_i^{(1)}, t)$, $s_2(\beta_i^{(2)}, x)$:

$$s_1(\beta_i^{(1)}, t) = \begin{cases} |t - \eta|^{\beta_i^{(1)}}, & |t - \eta| \le 1, \\ 1, & |t - \eta| > 1, \end{cases} \qquad s_2(\beta_i^{(2)}, x) = \begin{cases} \rho^{\beta_i^{(2)}}(x), & \rho(x) \le 1, \\ 1, & \rho(x) > 1, \end{cases}$$

$\rho(x) = \inf_{z \in \Omega} |x - z|$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\nu \in \{1,2\}$, $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)}, \ldots, \beta_n^{(\nu)})$, $\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)})$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)−(4). Позначимо через ℓ, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$, $\mu_j^{(1)}$, $\mu_j^{(2)}$ дійсні числа, $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, $\ell \ge 0$, $[\ell]$ − ціла частина числа ℓ, $\{\ell\} = \ell - [\ell]$, $q^{(\nu)} \ge 0$, $\gamma^{(\nu)} \ge 0$, $\delta^{(\nu)} \ge 0$, $\mu_j^{(\nu)} \ge 0$, $\nu \in \{1,2\}$; $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)}, x^{(1)})$, $R_i(t^{(1)}, x^{(2)})$ − довільні точки з $Q^{(0)}$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_i^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(2)}, x_{i+1}^{(1)} \ldots, x_n^{(1)})$.

Позначимо через $H^{\ell}(\gamma;\beta;q;Q)$ множину функцій u, які мають неперервні похідні в $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_t^s\partial_x^r u$, $2s+|r|\le[\ell]$, для яких є скінченною норма

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_0=\{\sup_{\bar Q}|u|\}\equiv\|u;Q\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_{\ell}=\sum_{2s+|r|\le[\ell]}\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_{2s+|r|}+\langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_{\ell},$$

де, наприклад,

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_{2s+|r|}\equiv\sup_{P\in\bar Q}\Big[s_1(q^{(1)}+2s\gamma^{(1)},t)s_2(q^{(2)}+2s\gamma^{(2)},x)\left|\partial_t^s\partial_x^r u(P)\right|\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{n}s_1(r_i(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t)s_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x)\Big],$$

$$\langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_{\ell}\equiv\sum_{2s+|r|=[\ell]}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\Big[\sup_{(P_2,R_\nu)\subset Q}\Big[s_1(q^{(1)}+2s\gamma^{(1)},t^{(2)})\times$$
$$\times s_2(q^{(2)}+2s\gamma^{(2)},\tilde x)\prod_{i=1}^{n}s_1(r_i(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t^{(2)})\times$$
$$\times s_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\tilde x)\left|\partial_t^s\partial_x^r u(P_2)-\partial_t^s\partial_x^r u(R_\nu)\right|\times$$
$$\times\left|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}\right|^{-\{\ell\}}s_1(\{\ell\}(\gamma^{(1)}-\beta_\nu^{(1)}),t^{(2)})\times$$
$$\times s_2(\{\ell\}(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)}),\tilde x)\Big]+\sup_{(P_1,P_2)\subset\bar Q}\Big[s_1(q^{(1)}+\ell\gamma^{(1)},\tilde t)\times$$
$$\times s_2(q^{(2)}+(2s+\{\ell\})\gamma^{(2)},x^{(1)})\prod_{i=1}^{n}s_1(-r_i\beta_i^{(1)},\tilde t)\times$$
$$\times s_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x^{(1)})\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\{\ell/2\}}\times$$
$$\times\left|\partial_t^s\partial_x^r u(P_1)-\partial_t^s\partial_x^r u(P_2)\right|\Big]\Big]\Big\},\qquad |r|=r_1+\ldots+r_n,$$

$s_1(q,\tilde t)=\min\{s_1(q,t^{(1)}),s_2(q,t^{(2)})\}$, $s_2(q,\tilde x)=\min\{s_2(q,x^{(1)}),s_2(q,x^{(2)})\}$.

Нехай для задачі (1)−(4) виконуються такі умови:

1°) для довільного вектора $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ і $\forall(t,x)\in Q\setminus Q_{(0)}$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(t,x)s_1(\beta_i^{(1)},t)s_1(\beta_j^{(1)},t)s_2(\beta_i^{(2)},x)s_2(\beta_j^{(2)},x)\xi_i\xi_j\le\pi_2|\xi|^2,\quad(5)$$

де π_1, π_2 − фіксовані додатні сталі,

$$s_1(\beta_i^{(1)},t)s_1(\beta_j^{(1)},t)s_2(\beta_i^{(2)},x)s_2(\beta_j^{(2)},x)A_{ij}\in H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q),$$

$$s_1(\mu_i^{(1)},t)s_2(\mu_i^{(2)},x)A_i\in H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q),$$

$$s_1(\mu_0^{(1)},t)s_2(\mu_0^{(2)},x)A_0\in H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q),\qquad A_0\ge0,$$

$$s_1(\delta^{(1)},t)s_2(\delta^{(2)},x)b_0\in H^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q),$$

$$s_1(\beta_i^{(1)},t)s_2(\beta_i^{(2)},x)b_i\in H^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q),$$

вектори $\mathbf{b}^{(s)} = \{b_1^{(s)}, \dots, b_n^{(s)}\}$, де $b_i^{(s)} = s_1(\beta_i^{(1)}, t) s_2(\beta_i^{(2)}, x) b_i$, і $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $e_i = b_i \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{-1/2}$, утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\mathbf{n}$ до ∂D у точці $P(t,x) \in \Gamma$ кут, менший ніж $\pi/2$, $b_0(t,x)|_\Gamma > 0$, $\partial D \in C^{2+\alpha}$,

$$\lim_{x \to z \in \partial D} \left[\psi(t_0, x; q_2(t_0, x)) + \sum_{k=1}^{N} \zeta_k(x) \psi(t_k, x; q_2(t_k, x)) - B_1 \varphi(x; q_3(x)) \right] = 0,$$

$$\lim_{x \to z \in \partial D} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) \frac{\partial \zeta_k(x)}{\partial x_i} \right) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{N} |\zeta_k(x)| \le \lambda_0 < 1,$$

$$\zeta_k(x) \in C^{2+\alpha}(D);$$

2°) $\nu_{11} \in C^\alpha(Q)$, $\nu_{12} \in C^\alpha(Q)$, $f(t,x;q_1(t,x)) \equiv F(t,x) \in H^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$,
$\nu_{31} \in C^{2+\alpha}(D)$, $\nu_{32} \in C^{2+\alpha}(D)$, $\varphi(x;q_3(x)) \equiv \Phi(x) \in H^{2+\alpha}(\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D)$,
$\nu_{21} \in C^{1+\alpha}(Q)$, $\nu_{22} \in C^{1+\alpha}(Q)$, $\psi(t,x;q_2(t,x)) \equiv G(t,x) \in H^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$,
$\tilde\beta = (0, \beta^{(2)})$, $\tilde\gamma = (0, \gamma^{(2)})$,

$$\gamma^{(\nu)} = \max\left\{ \max_i (1 + \beta_i^{(\nu)}), \max_i (\mu_i^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}, \delta^{(\nu)} \right\}, \quad \nu \in \{1,2\}.$$

Правильною є така

Теорема 1. *Нехай для задачі* (2)–(4) *виконуються умови* ***1°***, ***2°***. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (2)–(4) *з простору* $H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c\left(\|f;\gamma;;0;Q\|_\alpha + \left\|\varphi;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\right\|_{2+\alpha} + \|\psi;\gamma;\beta;0;Q\|_{1+\alpha} \right). \quad (6)$$

Для д о в е д е н н я теореми 1 встановимо спочатку коректну розв'язність крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну послідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (2)–(4).

2. Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_m = Q \cup \{(t,x) \in Q \mid s_1(1,t) \ge m_1^{-1}, s_2(1,x) \ge m_2^{-1}\}$, $m = (m_1, m_2)$, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$, – послідовності областей, які при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ збігаються до Q.

Розглянемо в області Q задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x) \partial_{x_i} + a_0(t,x) \right] u_m(t,x) = f_m(t,x;q_1), \quad (7)$$

які задовольняють умови за змінною t:

$$(Bu_m)(x) = \varphi_m(x;q_3), \quad (8)$$

і крайову умову

$$\lim_{x \to z \in \partial D} (B_2 u_m - \psi_m)(t,x) \equiv \lim_{x \to z \in \partial D} \left[\sum_{i=1}^{n} h_i(t,x) \partial_{x_i} u_m + h_0(t,x) u_m - \psi_m(t,x;q_3) \right] = 0. \quad (9)$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0 і функції f_m, φ_m, ψ_m визначаються таким чином. Якщо $(t,x)\in Q_m$, то коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0 і функції f_m, φ_m, ψ_m співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0, f, φ, ψ, відповідно, а в областях $Q\setminus Q_m$ є неперервними продовженнями коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0, функцій f, φ, ψ із областей Q_m в області $Q\setminus Q_m$ зі збереженням гладкості і норми [10, с. 82].

Теорема 2. *Нехай* $u_m(t,x)$ *– класичний розв'язок задачі* (7)–(9) *в області* Q *і виконуються умови* ***1°, 2°***. *Тоді для* $u_m(t,x)$ *справджується оцінка*

$$\|u_m;Q\|_0 \le c(\|\varphi_m;D\|_0+\|f_m;Q\|_0+\|\psi_m;Q\|_0). \tag{10}$$

Д о в е д е н н я оцінки (10) встановлюється за методикою доведення теореми 2.2 [2, с. 25], тобто аналізуються усі можливі розміщення додатного максимуму і від'ємного мінімуму функції $u_m(t,x)$. ♦

Позначимо через $(G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi),G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi))$ функцію Ґріна [4, с. 141] крайової задачі

$$\begin{aligned}&(L_1u_m)(t,x)=f_m(t,x;q_1),\\&u_m(0,x)=\varphi_m(x;q_3),\\&\lim_{x\to z\in\partial D}(B_2u_m-\psi_m)(t,x)=0.\end{aligned} \tag{11}$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* ***1°, 2°***. *Тоді існує функція Ґріна задачі* (7)–(9) *з компонентами* $\{G_m^{(1)},G_m^{(2)},Z_1^{(1)},\dots,Z_N^{(1)},Z_1^{(2)},\dots,Z_N^{(2)}\}$ *і справджується формула*

$$\begin{aligned}u_m(t,x)=&\int_0^t d\tau\int_D G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi)f_m(\tau,\xi;q_1)\,d\xi+\int_D G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)\varphi_m(\xi;q_3)\,d\xi+\\&+\int_0^t d\tau\int_{\partial D}G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi;q_2)\,d_\xi S+\\&+\sum_{k=1}^N\Bigg[\int_0^{t_k}d\tau\int_D Z_k^{(1)}(t_k,t,x,\tau,\xi)f_m(\tau,\xi;q_1)\,d\xi+\\&+\int_D Z_k^{(1)}(t_k,t,x,0,\xi)\varphi_m(\xi;q_3)\,d\xi+\\&+\int_0^{t_k}d\tau\int_{\partial D}Z_k^{(2)}(t_k,t,x,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi;q_2)\,d_\xi S\Bigg].\end{aligned} \tag{12}$$

Д о в е д е н н я. Роз'язок задачі (7)–(9) шукаємо у вигляді

$$u_m(t,x)=v_m(t,x)+\int_D G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)u_m(0,\xi)\,d\xi, \tag{13}$$

де $v_m(t,x)$ – розв'язок задачі (11). Для $v_m(t,x)$ справджується зображення [2, с. 141]

$$\begin{aligned}v_m(t,x)=&\int_0^t d\tau\int_D G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi)f_m(\tau,\xi;q_1)\,d\xi+\int_D G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)\varphi_m(\xi;q_3)\,d\xi+\\&+\int_0^t d\tau\int_{\partial D}G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi;q_2)\,d_\xi S.\end{aligned} \tag{14}$$

Задовольняючи нелокальну умову (8), отримаємо

$$u_m(0,x)+\sum_{k=1}^{N}\zeta_k(x)\int_D G_m^{(1)}(t_k,x,0,\xi)u_m(0,\xi)\,d\xi=$$

$$=-\sum_{k=1}^{N}\zeta_k(x)v_m(t_k,x)\equiv F_1(x). \qquad (15)$$

Оскільки $G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi)\ge 0$ і $\int_D G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi)\,d\xi\le 1$, то

$$\left|\sum_{j=1}^{N}\zeta_j(x)\int_D G_m^{(1)}(t_j,x,0,\xi)\,d\xi\right|\le\sum_{j=1}^{N}|\zeta_j(x)|\int_D G_m^{(1)}(t_j,x,0,\xi)\,d\xi\le\lambda_0,$$

і тоді для розв'язку рівняння (15) справджується оцінка

$$|u_m(0,x)|\le\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\|F_1;Q\|_0. \qquad (16)$$

Інтегральне рівняння (15) роз'язуємо методом послідовних наближень. Запишемо розв'язок інтегрального рівняння (15) у вигляді

$$u_m(0,x)=F_1(x)+\int_D Z_m(x,y)F_1(y)\,dy, \qquad (17)$$

де $Z_m(x,y)$ − резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$Z_m(x,\xi)+\sum_{k=1}^{N}\zeta_k(x)G_m^{(1)}(t_k,x,0,\xi)=$$

$$=-\int_D\sum_{k=1}^{N}\zeta_k(x)G_m^{(1)}(t_k,x,0,y)Z_m(y,\xi)\,dy,$$

звідки випливає оцінка

$$\left|\int_D Z_m(x,\xi)\,d\xi\right|\le\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}.$$

Підставляючи в рівність (17) замість $F_1(y)$ значення

$$F_1(y)=-\sum_{k=1}^{N}\zeta_k(x)\left[\int_0^{t_k}d\tau\int_D G_m^{(1)}(t,y,\tau,\xi)f_m(\tau,\xi;q_1)\,d\xi+\right.$$

$$+\int_D G_m^{(1)}(t_k,y,0,\xi)\varphi_m(\xi;q_3)\,d\xi+$$

$$\left.+\int_0^{t_k}d\tau\int_{\partial D}G_m^{(2)}(t_k,y,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi;q_2)\,d_\xi S\right]$$

і, змінивши порядок інтегрування, отримаємо

$$u_m(0,x)=\sum_{k=1}^{N}\left[\int_0^{t_k}d\tau\int_D\Gamma_m^{(1)}(t_k,x,\tau,\xi)f_m(\tau,\xi;q_1)\,d\xi+\right.$$

$$+\int_D\Gamma_m^{(1)}(t_k,x,0,\xi)\varphi_m(\xi;q_3)\,d\xi+$$

$$\left.+\int_0^{t_k}d\tau\int_D\Gamma_m^{(2)}(t_k,x,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi;q_2)\,d_\xi S\right], \qquad (18)$$

де

$$\Gamma_m^{(\nu)}(t_k, x, \tau, \xi) =$$
$$= -\zeta_k(x) G_m^{(\nu)}(t_k, x, \tau, \xi) - \int_D \zeta_k(y) Z_m(x, y) G_m^{(\nu)}(t_k, y, \tau, \xi)\, dy ,$$
$$\nu \in \{1, 2\} .$$

Підставляючи значення $u_m(0, x)$ у рівність (13) з урахуванням зображення (14) для $v_m(t, x)$ і змінивши порядок інтегрування, маємо

$$\begin{aligned} u_m(t, x) = {} & \int_0^t d\tau \int_D G_m^{(1)}(t, x, \tau, \xi) f_m(\tau, \xi; q_1)\, d\xi + \int_D G_m^{(1)}(t, x, 0, \xi) \varphi_m(\xi; q_3)\, d\xi + \\ & + \int_0^t d\tau \int_{\partial D} G_m^{(2)}(t, x, \tau, \xi) \psi_m(\tau, \xi; q_2)\, d_\xi S + \\ & + \sum_{k=1}^N \left[\int_0^{t_k} d\tau \int_D Z_k^{(1)}(t_k, t, x, \tau, \xi) f_m(\tau, \xi; q_1)\, d\xi + \right. \\ & + \int_D Z_k^{(1)}(t_k, t, x, 0, \xi) \varphi_m(\xi; q_3)\, d\xi + \\ & \left. + \int_0^{t_k} d\tau \int_{\partial D} Z_k^{(2)}(t_k, t, x, \tau, \xi) \psi_m(\tau, \xi; q_2)\, d_\xi S \right], \end{aligned} \tag{19}$$

де

$$Z_k^{(\nu)}(t_k, t, x, \tau, \xi) = \int_D G_m^{(1)}(t, x, 0, y) \Gamma_m^{(\nu)}(t_k, y, \tau, \xi)\, dy ,$$
$$k \in \{1, \ldots, N\}, \quad \nu \in \{1, 2\} .$$

В області Q розглянемо задачу

$$\begin{aligned} & (L_1 u_m)(t, x) = f_m(t, x; q_1) , \\ & u_m(0, x) = G_m(x) , \\ & \lim_{x \to z \in \partial D} (B_2 u_m - \psi_m)(t, x) = 0 , \end{aligned} \tag{20}$$

де

$$G_m(x) = \varphi_m(x, q_3) - \sum_{k=1}^N \zeta_k u_m(t_k, x) .$$

Розв'язок крайової задачі (20) в області Q існує і є єдиним у просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ (див. [4, с. 90]). ♦

Знайдемо оцінки похідних від розв'язків $u_m(t, x)$. Введемо у просторі $C^{\ell}(Q)$ норму $\|u_m; \gamma; \beta; q; Q\|_{\ell}$, еквівалентну при фіксованих m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка виражається так само, як і $\|u; \gamma; \beta; q; Q\|_{\ell}$, тільки замість функцій $s_1(q^{(1)}, t)$, $s_2(q^{(2)}, x)$ беремо відповідно $d_1(q^{(1)}, t)$, $d_2(q^{(2)}, x)$:

$$d_1(q^{(1)}, t) = \begin{cases} \max\left(s_1(q^{(1)}, t), m_1^{-q^{(1)}} \right), & q^{(1)} \geq 0, \\ \min\left(s_1(q^{(1)}, t), m_1^{-q^{(1)}} \right), & q^{(1)} < 0, \end{cases}$$

$$d_2(q^{(2)}, x) = \begin{cases} \max\left(s_2(q^{(2)}, x), m_2^{-q^{(2)}} \right), & q^{(2)} \geq 0, \\ \min\left(s_1(q^{(2)}, x), m_2^{-q^{(2)}} \right), & q^{(2)} < 0. \end{cases}$$

Теорема 4. *Якщо виконуються умови* **1°**, **2°**, *то для розв'язку задачі* (7)–(9) *є правильною оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c\big(\|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} + \|f;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} + \|\psi;\gamma;\beta;0;Q\|_{1+\alpha}\big). \tag{21}$$

Стала c *не залежить від* m.

Д о в е д е н н я. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності з [6, 10], маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le (1+\varepsilon^{\alpha})\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|u_m;Q\|_0,$$

де ε – довільне дійсне число з $(0,1)$. Тому достатньо оцінити півнорму $\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2+\alpha}$.

З означення півнорми випливає існування в області Q точок P_1, P_2, H_i, для яких є правильною одна з нерівностей

$$\frac{\lambda_0+1}{2}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le E_\mu, \qquad \mu \in \{1,2\}, \tag{22}$$

де

$$E_1 \equiv \sum_{2s+|r|=2}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n} d_1(2s\gamma^{(1)},t^{(2)})d_2(2s\gamma^{(2)},\tilde{x})\prod_{i=1}^{n} d_1(r_i(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t^{(2)})\times$$
$$\times d_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\tilde{x})\left|\partial_t^s\partial_x^r u_m(P_2)-\partial_t^s\partial_x^r u_m(H_\nu)\right|\times$$
$$\times\left|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}\right|^{-\alpha/2} d_1(\alpha(\gamma^{(1)}-\beta_\nu^{(1)}),t^{(1)})d_2(\alpha(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)}),\tilde{x})\Big\},$$

$$E_2 \equiv d_1((2+\alpha)\gamma^{(1)},\tilde{t})d_2((2s+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)})\prod_{i=1}^{n} d_1(-r_i\beta_i^{(1)},\tilde{t})\times$$
$$\times d_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x^{(1)})\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\alpha/2}\left|\partial_t^s\partial_x^r u_m(P_1)-\partial_t^s\partial_x^r u_m(P_2)\right|,$$
$$2s+|r|=2.$$

Якщо $\left|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}\right| \ge \frac{\varepsilon_1}{4n} d_1(\gamma^{(1)},\tilde{t})d_2(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)},\tilde{x}) \equiv T_1$, ε_1 – довільне дійсне число із $(0,1)$, то

$$E_1 \le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_2. \tag{23}$$

Якщо $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right| \ge \frac{\varepsilon_1^2}{16} d_1(2\gamma^{(1)},\tilde{t})d_2(2\gamma^{(2)},\tilde{x}) \equiv T_2$, то

$$E_2 \le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_2. \tag{24}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (23), (24), знаходимо

$$E_\mu \le \varepsilon^{\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|u_m;Q\|_0. \tag{25}$$

Нехай $\left|x_j^{(1)}-x_j^{(2)}\right| \le T_2$ і $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right| \le T_1$. Будемо вважати, що

$$d_1(\gamma^{(1)},\tilde{t})) \equiv d_1(\gamma^{(1)},t^{(1)}), \qquad d_2(\gamma^{(2)},\tilde{x}) \equiv d_2(\gamma^{(2)},x^{(1)}).$$

Нехай $|x_n-\xi_n| \le 2T_2$, $\xi \in \partial D_m$, або $|x-\xi| \le 2T_2 n$.

Розглянемо кулю $\mathcal{K}(r,P)$ радіуса r, $r \ge 4T_2 n$, що містить точки P_1, H_i, P_2, з центром у деякій точці $P \in \Gamma$. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D \cap \mathcal{K}(r,P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi(y)$ [10, с. 155], в результаті якого область $\Pi = Q \bigcap \mathcal{K}(r, P)$ переходить в область Π_1, для точок якої $y_n \geq 0$, $t \geq 0$.

Якщо покласти $u_m(t,x) = \omega_m(t,y)$, $P_1 = R_1$, $H_k = M_k$, $P_2 = R_2$, $d_2(\gamma^{(2)}, x^{(1)}) = p_2(\gamma^{(2)}, y^{(1)})$ і коефіцієнти диференціальних виразів L_1 і B_1 при цьому перетворенні позначити через k_{ij}, k_i, k_0, ℓ_i, ℓ_0, то ω_m буде розв'язком задачі

$$\left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}(R_1)\partial_{y_i}\partial_{y_j}\right]\omega_m = \sum_{i,j=1}^{n} [k_{ij}(t,y) - k_{ij}(R_1)]\partial_{y_i}\partial_{y_j}\omega_m +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} k_i(t,y)\partial_{y_i}\omega_m + k_0(t,y)\omega_m + F_m(t,\psi(y)) \equiv F_m^{(0)}(t,y), \quad (26)$$

$$\omega_m(0,y) = G_m(0,\psi(y)), \quad (27)$$

$$B_2\omega_m\big|_{y_n=0} \equiv \sum_{k=1}^{n} \ell_k(t,R_1)\,\partial_{y_k}\omega_m\Big|_{y_n=0} = \sum_{k=1}^{n}\big([\ell_k(t,R_1) - \ell_k(t,y)]\,\partial_{y_k}\omega_m -$$

$$- \ell_0(t,y)\omega_m + \psi_m(t,\psi(y))\big)\Big|_{y_n=0} \equiv G_m(t,y)\big|_{y_n=0}. \quad (28)$$

У задачі (26)–(28) зробимо заміну $\omega_m(t,y) = V_m(t,z)$, де $z_k = d_1(\beta_k^{(1)}, t^{(1)}) \times \times p_2(\beta_k^{(2)}, y^{(1)})y_k$, $k \in \{1,\ldots,n\}$. Область визначення функцій $V_m(t,z)$ позначимо через Π_2. Тоді функція V_m буде розв'язком задачі

$$L_3V_m \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)})p_2(\beta_i^{(2)}, y^{(1)})p_2(\beta_j^{(2)}, y^{(1)}) \times\right.$$

$$\left.\times\, k_{ij}(R_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j}\right]V_m = F_m^0(t,Z),$$

$$V_m(0,z) = G_m(Z) \equiv \Phi_m(Z),$$

$$B_3V_m\big|_{z_n=0} \equiv \sum_{k=1}^{n} d_1(\beta_k^{(1)}, t^{(1)})p_2(\beta_k^{(2)}, y^{(1)})\ell_k(t,R_1)\partial_{z_k}V_m\Big|_{z_n=0} =$$

$$= R_m(t,Z)\big|_{z_n=0},$$

де

$$Z = \big(d_1(-\beta_1^{(1)}, t^{(1)})p_2(-\beta_1^{(2)}, y^{(1)})z_1, \ldots, d_1(-\beta_n^{(1)}, t^{(1)})p_2(-\beta_n^{(2)}, y^{(1)})z_n\big).$$

Позначимо $z_i^{(1)} = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})p_2(\beta_i^{(2)}, y_1)y_i^{(1)}$, $\Pi_\mu^{(1)} = \{(t,z) \in \Pi_2 \mid |t - t^{(1)}| \leq \mu^2 T_2$, $|z_i - z_i^{(1)}| \leq \mu\sqrt{T_2}, i \in \{1,\ldots,n\}\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,z)$, яка задовольняє такі умови:

$$\eta(t,z) = \begin{cases} 1, & (t,z) \in \Pi_{1/2}^{(1)}, \quad 0 \leq \eta(t,z) \leq 1, \\ 0, & (t,z) \not\in \Pi_{3/4}^{(1)}, \quad \left|\partial_t^k\partial_z^j\eta(t,z)\right| \leq c_{ki}d_1(-(2k+|j|)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) \times \\ & \qquad \times\, p_2(-(2k+|j|)\gamma^{(2)}, y^{(2)}). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t,z) = \eta(t,z)V_m(t,z)$ буде розв'язком крайової задачі

$$L_3W_m = \sum\sum_{i,j=1}^{n} d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)})p_2(\beta_i^{(2)}, y^{(1)})p_2(\beta_j^{(2)}, y^{(1)})k_{ij}(R_1) \times$$

$$\times [\partial_{z_i} \eta \partial_{z_j} V_m + \partial_{z_j} \eta \partial_{z_i} V_m] +$$

$$+ V_m \left[\sum_{i,j=1}^{n} d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)}) p_2(\beta_i^{(2)}, y^{(1)}) p_2(\beta_j^{(2)}, y^{(1)}) \times \right.$$

$$\left. \times k_{ij}(R_1) \partial_{z_i} \partial_{z_j} \eta - \partial_t \eta \right] + F_m^{(0)} \eta \equiv F_m^{(1)}(t, z), \tag{29}$$

$$W_m(0, x) = \eta(0, z) \Phi_m(Z) \equiv \Phi_m^{(1)}(z), \tag{30}$$

$$B_3 W_m |_{z_n = 0} = \left[\sum_{k=1}^{n} d_1(\beta_k^{(1)}, t^{(1)}) p_2(\beta_k^{(2)}, y^{(1)}) V_m \ell_k(t, R_1) \partial_{z_k} \eta - \right.$$

$$\left. - R_m(t, Z) \eta \right] \Big|_{z_n = 0} \equiv R_m^{(1)}. \tag{31}$$

Коефіцієнти рівняння (29) і крайової умови (31), згідно з накладеними умовами, обмежені сталими, незалежними від точки R_1. Тому, використовуючи теорему 6.2 з [2, с. 368], для довільних точок $\{M_1, M_1\} \subset \Pi_{1/2}^{(1)}$ запишемо нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2) \left| \partial_t^k \partial_z^j V_m(M_1) - \partial_t^k \partial_z^j V_m(M_2) \right| \le c \left(\left\| F_m^{(1)} \right\|_{C^\alpha(\Pi_{3/4}^{(1)})} + \right.$$

$$\left. + \left\| \Phi_m^{(1)} \right\|_{C^{2+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)} \cap \{t = t_k\})} + \left\| G_1 \right\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)} \cap \{(t,z) \in \Pi_{3/4}^{(1)} | z_n = 0\})} \right), \tag{32}$$

де $2k + |j| = 2$, а $d(M_1, M_2)$ – параболічна відстань між M_1 і M_2.

Враховуючи властивості функції $\eta(t, z)$, маємо

$$\left\| F_m^{(1)} \right\|_{C^\alpha(\Pi_{3/4}^{(1)})} \le c d_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) p_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)}, y^{(1)}) \times$$

$$\times \left(\left\| F_m; \gamma; 0, 2\gamma; \Pi_{3/4}^{(1)} \right\|_\alpha + \left\| V_m; \Pi_{3/4}^{(1)} \right\|_0 + \left\| V_m; \gamma; 0, 0; \Pi_{3/4}^{(1)} \right\|_2 \right),$$

$$\left\| \Phi_m^{(1)} \right\|_{C^{2+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)} \cap (t=0))} \le c d_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) p_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)}, y^{(1)}) \times$$

$$\times \left\| \Phi_m; \tilde{\gamma}; 0; 0; \Pi_{3/4}^{(1)} \cap \{t = 0\}_{2+\alpha} \right\|,$$

$$\left\| R_m^{(1)} \right\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)} \cap \{(t,z) \in \Pi_{3/4}^{(1)} | z_n = 0\})} \le c d_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) \times$$

$$\times p_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)}, y^{(1)}) \left(\left\| R_m; \gamma, 0; \gamma; \Pi_{3/4}^{(1)} \right\|_{1+\alpha} + \right.$$

$$\left. + \left\| V_m; \gamma, 0; 0; \Pi_{3/4}^{(1)} \right\|_2 + \left\| V_m; \Pi_{3/4}^{(1)} \right\|_0 \right). \tag{33}$$

Підставляючи (33) у (32) і повертаючись до змінних (t, y), знаходимо

$$E_r \le c \left(\left\| F_m; \gamma, \beta; 2\gamma; \Pi_2 \right\|_\alpha + \left\| \Phi_m; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; \Pi_2 \cap \{t = 0\} \right\|_{2+\alpha} + \right.$$

$$\left. + \left\| G_m; \gamma, \beta; \gamma; \Pi_{3/4}^{(1)} \right\|_{1+\alpha} + c_1 \left\| V_m; \gamma, \beta; 0; \Pi_2 \right\|_2 + \left\| V_m; \Pi_2 \right\|_0 \right),$$

$$r \in \{1, 2\}. \tag{34}$$

Враховуючи означення простору $H^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і умови ***1°, 2°***, маємо

$$E_\mu \le c(n^2 \rho^\alpha + \varepsilon^\alpha (n+2)) \left\| u_m; \gamma, \beta; 0; Q \right\|_{2+\alpha} + c_1 \left(\left\| f_m; \gamma, \beta; 0; Q \right\|_{2+\alpha} + \right.$$

$$+ \lambda_0 \|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} + \|\varphi_m;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;Q \cap (t=0)\|_{2+\alpha} +$$

$$+ \|\psi_m;\gamma,\beta;\gamma;Q\|_{1+\alpha} + \|u_m;Q\|_0), \qquad \mu \in \{1,2\}. \tag{35}$$

ε, ρ − довільні числа, $\rho \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,1)$.

Нехай $|x-\xi| \ge 2T_2 n$. Розглянемо задачу

$$\left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right]u_m \equiv \sum_{i,j=1}^{n}[a_{ij}(t,x) - a_{ij}(P_1)]\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(t,x)\partial_{x_i}u_m + a_0(t,x)\right)u_m + f_m \equiv F_m^{(2)}(t,z), \tag{36}$$

$$u_m(0,x) = G_m(x). \tag{37}$$

Нехай $\Pi_1^{(2)} \in Q$, $\Pi_1^{(2)}$ − куб з центром в точці P_1, $\Pi_\rho^{(2)} = \{(t,x) \in Q^{(k)} \mid |t - t^{(1)}| \le$ $\le 16^{-1}\mu^2 T_1, |x_i - x_i^{(1)}| \le 4\mu^{-1}T_2, i \in \{1,2,\dots,n\}\}$.

Зробимо в задачі (36), (37) заміну $u_m(t,x) = \omega_m(t,y)$, $x_i = d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)}) \times$ $\times d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})y_i$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Область визначення функцій $\omega_m(t,y)$ позначимо через $\Pi^{(3)}$. Тоді $\omega_m(t,y)$ є розв'язком задачі

$$L_3\omega_m \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)}) \times\right.$$

$$\left.\times d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})d_2(\beta_j^{(2)},x^{(1)})\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right]\omega_m = F_m^{(2)}(t,Y), \tag{38}$$

$$\omega_m(0,y) = G_m(Y), \tag{39}$$

де

$$Y = \left(d_1(-\beta_1^{(1)},t^{(1)})d_2(-\beta_1^{(2)},x^{(1)})y_1,\dots,d_1(-\beta_n^{(1)},t^{(1)})d_2(-\beta_n^{(2)},x^{(1)})y_n\right).$$

Позначимо $y_i^{(1)} = d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})x_i^{(1)}$, $\Pi_\mu^{(3)} = \{(t,y) \in \Pi^{(3)} \mid |t - t^{(1)}| \le$ $\le 16^{-1}\mu^2 T_1, |x_i^{(1)} - x_i| \le 4^{-1}\mu\sqrt{T_1}, i \in \{1,\dots,n\}\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta_1(t,y)$:

$$\eta_1(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y) \in \Pi_{1/2}^{(3)}, \quad 0 \le \eta_1(t,y) \le 1, \\ 0, & (t,y) \not\subset \Pi_{3/4}^{(3)}, \quad |\partial_t^k \partial_x^j \eta_1(t,y)| \le c_{kj} d_1(-(2k+|j|)\gamma^{(1)},t^{(1)}) \times \\ & \qquad \times d_2(-(2k+|j|)\gamma^{(2)},x^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $V_m^{(1)}(t,y) = \omega_m(t,y)\eta_1(t,y)$ є розв'язком задачі Коші:

$$L_3 V_m^{(1)} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})d_2(\beta_j^{(2)},x^{(1)}) \times$$

$$\times[\partial_{y_i}\eta_1\partial_{y_j}\omega_m + \partial_{y_j}\eta_1\partial_{y_i}\omega_m] +$$

$$+ \omega_m\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)}) \times\right.$$

$$\left.\times d_2(\beta_j^{(2)},x^{(1)})\partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta_1 - \partial_t\eta_1\right] + F_m^{(2)}\eta_1 \equiv F_m^{(3)}, \tag{40}$$

$$V_m^{(1)}(0,y) = G_m \eta_1(0,y) = R_m^{(2)}. \tag{41}$$

Згідно з теоремою 5.1 з [2, с. 364], для довільних точок $\{M_1, M_2\} \subset \Pi_{1/2}^{(3)}$ виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|\partial_t^k \partial_x^j \omega_m(M_1) - \partial_t^k \partial_x^j \omega_m(M_2)\right| \le$$

$$\le c\left(\left\|F_m^{(3)}\right\|_{C^\alpha(V_{3/4}^{(2)})} + \left\|R_m^{(2)}\right\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4}^{(1)}\cap\{t=0\})}\right), \quad 2k + |j| = 2.$$

Враховуючи властивості функції $\eta_1(t,y)$, означення простору $H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ та обмеження ***1°, 2°***, одержимо нерівність

$$E_\mu \le c(n^2\rho^\alpha + \varepsilon^\alpha(n+2))\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\right\|_{2+\alpha} + \lambda_0\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\right\|_{2+\alpha} +$$

$$+ c_1\left(\left\|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\right\|_{2+\alpha} + \left\|f_m;\gamma;\beta;0;Q\right\|_\alpha\right). \tag{42}$$

Об'єднуючи нерівності (22), (25), (35), (42) і вибираючи ε достатньо малим, одержимо нерівності

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\right\|_{2+\alpha} \le c\left(\left\|f_m;\gamma;\beta;0;Q\right\|_\alpha + \left\|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\right\|_{2+\alpha} +\right.$$

$$\left. + \left\|\psi_m;\gamma;\beta;0;Q\right\|_{1+\alpha}\right). \tag{43}$$

Оскільки

$$\left\|f_m;\gamma;\beta;0;Q\right\|_\alpha \le c\left\|f;\gamma;\beta;0;Q\right\|_\alpha,$$

$$\left\|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\right\|_{2+\alpha} \le c\left\|\varphi_k;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\right\|_{2+\alpha},$$

$$\left\|\psi_m;\gamma;\beta;\delta;Q\right\|_{1+\alpha} \le c\left\|\psi;\gamma;\beta;\delta;Q\right\|_{1+\alpha}, \tag{44}$$

то підставляючи (37) у (36), одержимо нерівність (21). ♦

Д о в е д е н н я **теореми 1.** Права частина нерівності (21) не залежить від m_1, m_2, і послідовності

$$\{u_m^{(0)}\} \equiv \{u_m(P)\}, \qquad P(t,x) \in Q,$$

$$\{u_m^{(1)}\} \equiv \{d_1(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}, t)\, d_2(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}, x)\partial_{x_i} u_m\},$$

$$\{u_m^{(2)}\} \equiv \{d_1(2\gamma^{(1)}, t)\, d_2(2\gamma^{(2)}, x)\partial_t u_m\},$$

$$\{u_m^{(3)}\} \equiv \{d_1(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}, t)\, d_1(\gamma^{(1)} - \beta_j^{(1)}, t)\, d_2(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}, x) \times$$

$$\times\, d_2(\gamma^{(2)} - \beta_j^{(2)}, x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m\}$$

рівномірно обмежені та рівностепенево неперервні в області Q. За теоремою Арцела існують підпослідовності $\{u_{m(\ell)}^{(\mu)}\}$, рівномірно збіжні в Q до $\{u^{(\mu)}\}$, $\mu \in \{0,1,2,3\}$. Переходячи в задачі (7)–(9) до границі при $m(\ell) \to \infty$, одержимо, що $u(t,x) = u_0^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1)–(3), $u \in H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ і правильною є оцінка (6). ♦

3. Задача оптимального керування. В області Q розглянемо задачу (1)–(4). Будемо вважати, що виконуються умови ***1°, 2°***, а також умови

3°) функції $f(t,x,q_1) = r^{(0)}(t) f^{(0)}(x, q_1(x))$, $\psi(t,x,q_2) = r^{(1)}(t)\psi^{(0)}(x, q_2(x))$,

$F_1(t,x;u;q_1)$, $F_2(t,x;u;q_2)$, $F_3(x,u(t_1,x,q),u(t_2,x,q),\dots,u(t_N,x,q),q_3)$ мають похідні другого порядку за змінними (u,q_1,q_2,q_3), які належать як функції від змінних (t,x) та x до просторів $C^{\alpha}(Q)$, $C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $C^{2+\alpha}(D)$ відповідно.

Для розв'язання задачі (1)−(4) побудуємо послідовність розв'язків задач, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)−(4).

Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій (u_m,q), на яких функціонал

$$I(q)=\int_0^T dt\int_D F_1(t,x;u_m(t,x,q),q_1)\,dx+\int_0^T dt\int_D F_2(t,x;u_m(t,x,q),q_2)\,d_xS+$$

$$+\int_D F_3(t,x;u_m(t_1,x,q),\dots,u_m(t_N,x,q),q_3(x))\,dx \qquad (45)$$

досягає мінімального значення в класі функцій $q\in V$, де u_m задовольняє рівняння (7) при $f_m(t,x,q_1)=r_m^{(0)}(t)f_m^{(0)}(x,q_1(x))$, багатоточкову умову (8) за часовою змінною і крайову умову (9) на бічній поверхні Γ при $\psi_m(t,x;q_2)\equiv$ $\equiv r_m^{(1)}(t)\psi_m^{(0)}(x,q_2(x))$.

Позначимо

$$\boldsymbol{\omega}=(u_m(t_1,x,q),u_m(t_2,x,q),\dots,u_m(t_N,x,q),q_3)=(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{N+1}),$$

$$\lambda_1(\xi)=\int_0^T r_m^{(0)}(\tau)\,d\tau\int_\tau^T dt\int_D \frac{\partial F_1(t,x;u_m(t,x,q),q_1)}{\partial u_m}G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi)\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int_0^{t_k} r_m^{(0)}(\tau)\,d\tau\int_\tau^T dt\int_D \frac{\partial F_1(t,x;u_m(t,x,q),q_1)}{\partial u_m}Z_k^{(1)}(t_k,t,x,\tau,\xi)\,dx+$$

$$+\int_0^T r_m^{(0)}(\tau)\,d\tau\int_\tau^T dt\int_{\partial D} \frac{\partial F_2(t,x;u_m(t,x,q),q_1)}{\partial u_m}G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi)\,d_xS+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int_0^{t_k} r_m^{(0)}(\tau)\,d\tau\int_\tau^T dt\int_{\partial D} \frac{\partial F_2(t,x;u_m(t,x,q),q_1)}{\partial u_m}Z_k^{(2)}(t_k,t,x,\tau,\xi)\,d_xS+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\left[\int_0^{t_j} r_m^{(0)}(\tau)\,d\tau\int_D \frac{\partial F_3(x;\boldsymbol{\omega})}{\partial \omega_j}G_m^{(1)}(t_j,x,\tau,\xi)\,dx+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{N}\int_0^{t_k} r_m^{(0)}(\tau)\,d\tau\int_D \frac{\partial F_3(x;\boldsymbol{\omega})}{\partial \omega_j}Z_k^{(1)}(t_k,t_j,x,\tau,\xi)\,dx\right],$$

$$\lambda_2(\xi)=\int_0^T r_m^{(1)}(\tau)\,d\tau\int_\tau^T dt\int_D \frac{\partial F_1(t,x;u_m(t,x,q),q_1)}{\partial u_m}G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi)\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int_0^{t_k} r_m^{(1)}(\tau)\,d\tau\int_\tau^T dt\int_D \frac{\partial F_1(t,x;u_m(t,x,q),q_1)}{\partial u_m}Z_k^{(1)}(t_k,t,x,\tau,\xi)\,dx+$$

$$+\int_0^T r_m^{(1)}(\tau)\,d\tau\int_\tau^T dt\int_{\partial D}\frac{\partial F_2(t,x;u_m(t,x,q),q_2)}{\partial u_m}G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi)\,d_xS+$$

$$+\sum_{k=1}^N\int_0^{t_k} r_m^{(1)}(\tau)\,d\tau\int_\tau^T dt\int_{\partial D}\frac{\partial F_2(t,x;u_m(t,x,q),q_2)}{\partial u_m}Z_k^{(2)}(t_k,t,x,\tau,\xi)\,d_xS+$$

$$+\sum_{j=1}^N\left[\int_0^{t_j} r_m^{(1)}(\tau)\,d\tau\int_{\partial D}\frac{\partial F_3(x;\boldsymbol{\omega})}{\partial\omega_j}G_m^{(2)}(t_j,x,\tau,\xi)\,d_xS+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^N\int_0^{t_k} r_m^{(1)}(\tau)\,d\tau\int_{\partial D}\frac{\partial F_3(x;\boldsymbol{\omega})}{\partial\omega_j}Z_k^{(2)}(t_k,t_j,x,\tau,\xi)\,d_xS\right],$$

$$\lambda_3(\xi)=\int_0^T dt\int_D\frac{\partial F_1(t,x;u_m(t,x,q),q_1)}{\partial u_m}G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^N\int_0^T dt\int_D\frac{\partial F_1(t,x;u_m(t,x,q),q_1)}{\partial u_m}Z_k^{(1)}(t_k,t,x,0,\xi)\,dx+$$

$$+\int_D\left[\sum_{j=1}^N\frac{\partial F_3(x;\boldsymbol{\omega})}{\partial\omega_j}G_m^{(1)}(t_j,x,0,\xi)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^N\frac{\partial F_3(x;\boldsymbol{\omega})}{\partial\omega_j}Z_k^{(1)}(t_k,t_j,x,0,\xi)\right]dx+$$

$$+\int_0^T dt\int_{\partial D}\frac{\partial F_2(t,x;u_m(t,x,q),q_2)}{\partial u_m}G_m^{(2)}(t,x,0,\xi)\,d_xS+$$

$$+\sum_{k=1}^N\int_0^{t_k} dt\int_{\partial D}\frac{\partial F_2(t,x;u_m(t,x,q),q_2)}{\partial u_m}Z_k^{(2)}(t_k,t,x,0,\xi)\,d_xS\,,$$

$$H_1(\xi,u_m,\lambda_1,q_1)\equiv\lambda_1(\xi)f_m^{(0)}(\xi,q_1(\xi))+\int_0^T F_1(t,\xi;u_m,q_1)\,dt\,,$$

$$H_2(\xi,u_m,\lambda_2,q_2)\equiv\lambda_2(\xi)\psi_m^{(0)}(\xi,q_2(\xi))+\int_0^T F_2(t,\xi;u_m,q_2)\,dt\,,$$

$$H_3(\xi,u_m,\lambda_3,q_3)\equiv\lambda_3(\xi)\,\varphi_m(\xi,q_3(\xi))+F_3(\xi;\boldsymbol{\omega})\,,$$

$q^{(0)}=\left(q_1^{(0)},q_2^{(0)},q_3^{(0)}\right)$ – оптимальне керування, $u_m\left(t,x,q^{(0)}\right)$ – оптимальний розв'язок задачі (7)–(9).

Виконується така

Теорема 5. *Якщо* $\partial_{q_i}H_i(\xi,u_m,\lambda_i,q_i)>0$, *то оптимальним є керування* $q_i^{(0)}=V_{i1}$, $i\in\{1,2,3\}$. *Якщо* $\partial_{q_i}H_i(\xi,u_m,\lambda_i,q_i)<0$, *то оптимальним є керування* $q_i^{(0)}=V_{i2}$, $i\in\{1,2,3\}$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо, наприклад, випадок $i=3$. Нехай Δq_3 – довільний приріст керування $q_3(x)\in V$, $\Delta q_3>0$, $q_3+\Delta q_3\in V$. Позначимо через $\Delta_{q_3} u_m$ відповідний приріст функції $u_m(t,x;q)$. Тоді $\Delta_{q_3} u_m$ в області Q буде розв'язком крайової задачі

$$(L_1 \Delta_{q_3} u_m)(t,x) = 0, \qquad \lim_{x\to z\in\partial D} (B_2 \Delta_{q_3} u_m)(t,x) = 0\,,$$

$$(B\Delta_{q_3} u_m)(x) = \varphi_m(x;q_3+\Delta q_3) - \varphi_m(x;q_3) \equiv \Delta_{q_3}\varphi_m(x;q_3)\,. \tag{46}$$

Запишемо частковий приріст функціонала $I(q)$ за формулою Тейлора:

$$\Delta_{q_3} I = \int_0^T dt \int_D \partial_{u_m} F_1(t,x;u_m,q_1)\Delta_{q_3} u_m\, dx +$$
$$+\int_0^T dt \int_{\partial D} \partial_{u_m} F_2(t,x;u_m,q_2)\Delta_{q_3} u_m\, d_x S +$$
$$+\sum_{k=1}^N \int_D \partial_{\omega_k} F_3(x;\boldsymbol{\omega})\Delta_{q_3}\omega_k\, dx + \int_D \partial_{q_3} F_3(x;\boldsymbol{\omega})\Delta q_3\, dx +$$
$$+\int_0^T dt \int_D O(|\Delta_{q_3} u_m|^2)\, dx + \int_D \Big[O(|\Delta_{q_3}|^2) +$$
$$+\sum_{k=1}^N O(|\Delta_{q_3}\omega_k|^2)\Big] dx + \int_0^T dt \int_{\partial D} O(|\Delta_{q_3} u_m|^2)\, d_x S\,. \tag{47}$$

Оскільки $\Delta_{q_3} u_m$ – роз'язок задачі (46), то, використовуючи формулу (12), маємо

$$\Delta_{q_3} u = \int_D G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)\Delta_{q_3}\varphi_m(\xi;q_3)\, d\xi +$$
$$+\sum_{k=1}^N \int_D Z_k^{(1)}(t_k,t,x,0,\xi)\Delta_{q_3}\varphi_m(\xi;q_3)\, d\xi\,. \tag{48}$$

Підставляючи (48) у (47) і змінюючи при цьому порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta_{q_3} I = \int_D \big[\partial_{q_3} H_3(\xi,u_m,\lambda_3,q_3)\Delta q_3 + O(|\Delta_{q_3}\Delta u_m|^2) + O(|\Delta q_3|^2)\big]\, dx\,. \tag{49}$$

Якщо $q_3 = V_{31}(x)$ і $\partial_{q_3} H_3 > 0$, то при досить малому Δq_3 маємо $\Delta_{q_3} I >$ > 0. Якщо $q_3 = V_{32}(x)$ і $\partial_{q_3} H_3 < 0$, то при достатньо малому Δq_3 маємо $\Delta_{q_3} I > 0$. Якщо $H_3(\xi,u_m,\lambda_3,q_3)$ за аргументом q_3 не є монотонною, то $\partial_{q_3} H_3(\xi,u_m,\lambda_3,q_3)$ є знакозмінною величиною: $\partial_{q_3} H_3(\xi,u_m,\lambda_3,q_3) > 0$ в області $D^+ \subset D$ і $\partial_{q_3} H_3(\xi,u_m,\lambda_3,q_3) < 0$ в області $D^- = D \setminus D^+$.

Використовуючи теорему про середнє значення, знаходимо

$$\Delta_{q_3} I = \partial_{q_3} H_3(\xi^+,u_m^+,\lambda_3^+,q_3^+) \int_{D^+} \Delta q_3\, dx -$$
$$-\left|\partial_{q_3} H_3(\xi^-,u_m^-,\lambda_3^-,q_3^-)\right| \int_{D^-} \Delta q_3\, dx +$$
$$+\int_D \big[O(|\Delta_{q_3} u_m|^2) + O(|\Delta q_3|^2)\big] dx\,.$$

При достатньо малому Δq_3 знак $\Delta_{q_3} I$ визначається першими доданками залежно від величин $\operatorname{mes} D^+$, $\operatorname{mes} D^-$, Δq_3. Отже, функціонал $I(q)$ за керуванням q_3 не досягає свого мінімального значення. Аналогічні міркування потрібно провести і у випадку, коли $\Delta q_3 < 0$.

При доведенні теореми у випадках $i \in \{1,2\}$ потрібно використати схему доведення випадку $i = 3$. ♦

Нехай умови теореми 5 не виконуються. Тоді правильною є така

Теорема 6. *Для того щоб керування* $q^{(0)} = \{q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)}\}$ *було оптимальним, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

(***i***) *функції* $H_i(\xi, u_m, \lambda_i, q_i)$ *за аргументом* q_i *мають в точці* $q_i^{(0)}$ *мінімальне значення,* $i \in \{1,2,3\}$;

(***ii***) *для довільного вектора* $(e_k^{(1)}, e_k^{(2)}) \neq 0$ *виконується нерівність*

$$\partial^2_{u_m} F_k(t,x;u_m;q_k^{(0)})(e_k^{(1)})^2 + 2\partial_{q_k}\partial_{u_m} F_k(t,x;u_m;q_k^{(0)})e_k^{(1)}e_k^{(2)} +$$
$$+ \partial^2_{q_k} F_k(t,x;u_m;q_k^{(0)})(e_k^{(2)})^2 > 0, \qquad k \in \{1,2\};$$

(***iii***) *для довільного вектора* $(e_1, e_2, \ldots, e_{N+1}) \neq 0$ *виконується нерівність*

$$\sum_{i,j=1}^{N+1} \partial^2_{\omega_i\omega_j} F_3(x;\boldsymbol{\omega}) e_i e_j > 0 .$$

Д о в е д е н н я теореми 6 проводиться за допомогою методики праць [7, 9]. Переходячи до границі в задачі (7)–(9), (45) при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$, одержимо оптимальний розв'язок задачі (1)–(4). ♦

1. *Згуровский М. З., Мельник В. С., Новиков А. Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – Киев: Наук. думка, 2004. – 588 с.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
   То саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Transl. Math. Monogr., Vol. 23. – Providence, RI: AMS, 1968. – xi+648 p.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – Москва: Мир, 1972. – 414 с.
   Те саме: *Lions J. L.* Contrôl optimal de systèmes gouvernés par des équations aux derivées particlles. – Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1968. – xiv+426 p.
4. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
5. *Пукальський І. Д.* Задача зі скісною похідною і задача оптимального керування для лінійних параболічних рівнянь із виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 3. – С. 24–35.
6. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
7. *Пукальський І. Д.* Параболічна крайова задача і задача оптимального керування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 4. – С. 34–41.
   Те саме: *Pukalskyi I. D.* A parabolic boundary-value problem and a problem of optimal control // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 2. – P. 159–168. – https://doi.org/10.1007/s10958-011-0287-9.
8. *Пукальський І. Д.* Функція Ґріна параболічної крайової задачі і задача оптимізації // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 4. – С. 567–571.
   Те саме: *Pukal'skii I. D.* Green function of a parabolic boundary-value problem and the optimization problem // Ukr. Math. J. – 2000. – **52**, No. 4. – P. 649–654. – https://doi.org/10.1007/BF02515406.

9. *Пукальський И. Д., Матийчук М. И.* О применениях функций Грина параболических краевых задач к задачам оптимального управления // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 6. – С. 738–744.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv + 347 p.
11. *Balakrishnan A. V.* Semigroup theory and control theory // The Proceedings of IFIP Congress on Information Processing. – Washington: Spartan Books Inc., 1965. – P. 157–163.
12. *Bermudez A.* Some applications of optimal control theory of distributed systems // ESAIM: Control, optimisation and calculus of variations. – 2002. – **8**. – P. 195–218. – https://doi.org/10.1051/cocv:2002057.
13. *Bintz J., Finotti H., Lenhart S.* Optimal control of resourse coefficient in a parabolic population model // Proc. Int. Symp. Math. Comput. Biology «Biomat 2013», Toronto, Canada, 4–8 Nov., 2013. – P. 121–135.
14. *Casas E., Vexler B., Zuazua E.* Sparse initial data identification for parabolic PDE and its finite element approximations // Mathematical Control & Related Fields. – 2015. – **5**, No. 3. – P. 377–399. – https://doi.org/10.3934/mcrf.2015.5.377.
15. *Farag M. N., Farag S. H.* On an optimal control problem for a quasilinear parabolic equation // Applicationes Mathematicae. – 2000. – **27**, No. 2. – P. 239–250. – https://doi.org/10.4064/am-27-2-239-250.
16. *Lu Z.* Existence and uniqueness of second order parabolic bilinear optimal control problems // Lobachevskii J. Math. – 2011. – **32**, No. 4. – P. 320–327. – https://doi.org/10.1134/S1995080211040135.

MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH DEGENERATION

The problem of optimal control of process described by a multipoint problem with an oblique derivative for a second-order parabolic equation is investigated. The cases of internal, starting and boundary control are considered. The criterion of quality is given as a sum of volume and surface integrals. With the help of the principle of maximum and a priory estimates, the existence and uniqueness of solutions of a multipoint boundary-value problem with degeneration are established. The coefficients of parabolic equation and boundary conditions have power singularities of arbitrary order for any variables on the some set of points. Estimates of the solution of multipoint boundary-value problem and its derivatives are obtained in the Hölder spaces with power weight. The necessary and sufficient conditions for existence of an optimal solution of the system are established.

Key words: *interpolation inequalities, maximum principle, a priori estimates, degeneration, boundary condition.*

Чернів. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
31.10.20