УДК 519.63: 622.681.4

В. Ф. Чекурін[1], О. М. Химко[2]✉

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ЦІЛІСНОСТІ ЛІНІЙНОЇ ЧАСТИНИ МАГІСТРАЛЬНИХ ГАЗОПРОВОДІВ

Сформульовано крайові задачі, які моделюють течію газу в довгому трубопроводі за різних умов зовнішнього керування. З використанням даних моніторингу параметрів течії на вході та виході трубопроводу, а також розв'язків сформульованих задач, отриманих на основі цих даних, побудовано критерії його цілісності. Окремо розглянуто випадок, коли наявні додаткові емпіричні дані про параметри течії у проміжних точках. Обговорюється можливість застосування отриманих результатів для створення методів і систем контролю цілісності газопроводів.

Ключові слова: *довгі трубопроводи, модель динаміки газу, моделі керування течією газу, виявлення витоків, критерії цілісності труби.*

Неконтрольована розгерметизація газопроводу створює аварійно-небезпечні ситуації, екологічні загрози і може призводити до значних економічних втрат. Тому неперервний контроль цілісності лінійної частини магістральних газопроводів є важливою науково-технічною проблемою.

Методи і системи контролю цілісності інженерних об'єктів можна поділити на дві категорії. Системи першого типу інформують, що незабаром може відбутися порушення цілісності об'єкта (англ. before the event systems). Системи другого типу інформують про факт настання такої події (англ. after the event systems). До систем першого типу контролю можна віднести системи внутрішньотрубної діагностики стосовно лінійної частини газопроводів та інші методи неруйнівного контролю. Системи другого типу базуються на методах виявлення витоків.

Відомі методи виявлення витоків, які використовують різні фізичні принципи та технології відбору й обробки даних. Серед них – внутрішні методи, які базуються на даних моніторингу параметрів потоку в трубопроводі: тиску, масової чи об'ємної витрат, температури або параметрів хвильових процесів [1, 5–8, 13, 14]. Зокрема, у методі моделювання перехідних процесів у реальному часі (англ. Real Time Transient Modeling – RTTM) результати моніторингу параметрів потоку розглядають як вхідні дані для певних обернених задач, сформульованих у рамках тих чи інших моделей газової динаміки [7, 8].

У цій статті в рамках моделі газової динаміки сформульовано крайові задачі, якими моделюється течія газу в довгому трубопроводі за різних умов зовнішнього керування потоком. З використанням цих моделей сумісно з даними моніторингу газодинамічних параметрів потоку на вході та виході, а також у декількох контрольних точках, рознесених вздовж траси трубопроводу, сформульовано критерії його цілісності.

1. Математична динаміка газу в довгому трубопроводі. Розглядаємо газопровід, складений із труб однакового внутрішнього діаметра D_{pipe}, довжиною $L \gg D_{\text{pipe}}$. Коефіцієнт гідравлічного опору трубопроводу $\lambda(x)$ та профіль його осі $H(x)$ у вертикальній площині є відомими функціями від координати x уздовж осі труби. Рух газу в такому трубопроводі описується моделлю динаміки, що містить три диференціальні рівняння з частинними похідними, залежні від просторової координати вздовж осі труби x і часу t, які виражають збереження маси, імпульсу та енергії, а також два рівняння стану – термічне і калоричне [2, 3, 8].

✉ olgakhymko@ukr.net

Диференціальні рівняння моделі залежать від локальних газодинамічних параметрів, зокрема тиску $P(x,t)$, густини $D(x,t)$, швидкості руху газу $V(x,t)$, густини масового потоку $J(x,t) = D(x,t)V(x,t)$, внутрішньої енергії $U(x,t)$.

Термічне рівняння стану встановлює зв'язок між параметрами термодинамічного стану – тиском P, густиною D та температурою T. Калоричне рівняння стану виражає внутрішню енергію U чи інші термодинамічні потенціали (наприклад, вільну енергію Ґіббса чи вільну енергію Гельмгольца) через параметри термодинамічного стану газу (наприклад, тиск P і температуру T чи густину D і температуру T).

Залежно від термодинамічного стану, величини, які характеризують властивості реального газу, можуть істотно відрізнятися від їхніх значень, розрахованих як за моделлю ідеального газу, так і за складнішими моделями (наприклад, модель Ван дер Ваальса). Щоб досягнути точності, достатньої для інженерних застосувань, рівняння стану, якими визначаються залежності термодинамічних властивостей газів від параметрів стану, отримують на основі емпіричних даних з використанням відомих термодинамічних співвідношень. Тому рівняння стану залежать від певних емпіричних функцій. Наприклад, відхилення величин, які характеризують термічні властивості реального газу, від випадку моделі ідеального газу враховується у термічному рівнянні стану надстисливістю Z – термодинамічним параметром, який розглядається як функція параметрів стану (наприклад, тиску P і температури T або густини D і температури T). Калоричне рівняння стану також залежить від емпіричних функцій, зокрема від теплоємності за сталого об'єму у формі $C_V = C_V(P,T)$ або $C_V = C_V(D,T)$.

За відсутності витоків система рівнянь балансу маси, імпульсу та енергії матиме вигляд [5]

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} = -\mathrm{Ma}\cdot\frac{\partial\rho v}{\partial\xi}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial j}{\partial\tau} = -\mathrm{Ma}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(vj + \frac{Z_t}{\mathrm{Ma}^2}p\right) - \mathrm{Ma}\cdot\rho\frac{d\gamma}{d\xi} - \mathrm{Ma}\cdot\beta|v|j, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho u}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\lambda_T\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - ju\right) - \frac{Z_t\alpha}{\mathrm{Ma}}p\frac{\partial v}{\partial\xi} + \mathrm{Ma}\cdot\alpha\frac{d\gamma}{d\xi}j + \\ + \mathrm{Ma}\cdot\alpha\beta|v|jv + \bar{h}(\theta_{\mathrm{env}} - \theta). \tag{3}$$

Тут $\rho = D/D_t$, $j = J/J_t$, $\theta = T/T_t$, $p = P/P_t$, $v = V/V_t$ та $u = U/U_t$ – безрозмірні густина, масовий потік, температура, тиск, швидкість течії газу та питома внутрішня енергія, які визначаються шляхом нормування відповідних розмірних параметрів D, J, θ, P, V та U на їхні характерні значення D_t, J_t, θ_t, P_t, V_t та U_t. Параметри ρ, j, θ, p, v та u є функціями від безрозмірних змінних – координати $\xi = x/L$ і часу $\tau = t/t_t = t\,C_t/L$, де L – довжина трубопроводу, t_t – характерний проміжок часу, який визначається через L і характерну швидкість звуку в газі C_t як $t_t = L/C_t$. Параметр C_t визначається як $C_t = \sqrt{R_g T_t}$, де $R_g \equiv R/\mu_g$, R – універсальна газова стала, μ_g – молярна маса газу. Безрозмірна функція $\gamma = \gamma(\xi)$ визначає профіль осі трубопроводу у вертикальній площині: $\gamma = H(L\xi)/H_t$, де $H_t = V_t^2/g$, g – прискорення земного тяжіння. Параметр $\beta = \lambda\cdot L/(2D_{\mathrm{pipe}})$ – зведений коефіцієнт гідравлічного опору. Коефіцієнт $\mathrm{Ma} \equiv V_t/C_t$ – характерне число Маха течії. Безрозмірний параметр $\lambda_T = \Lambda/\Lambda_t$ – нормований коефіцієнт теплопровідності газу, $\Lambda_t = LD_tU_tC_t/T_t$ – типове значення коефіцієнта теплопровідності $\Lambda = \Lambda(D,T)$. Символом Z_t позначено типове значення надстисливості $Z_t \equiv Z(D_t, T_t)$, а безрозмірний коефіцієнт α визначається як $\alpha \equiv 2U_t/V_t^2$. Через $\theta_{\text{env}} \equiv T_{\text{env}}/T_t$ позначено безрозмірну температуру зовнішнього середовища, а $\bar{h} = h/\Lambda_t \cdot 4L^2/D_{\text{pipe}}$ – безрозмірний коефіцієнт конвективного теплообміну транспортованого газу з зовнішнім середовищем через стінку труби.

Існують різні форми аналітичного подання термічного рівняння стану для газів [3, 9]. Зокрема, використовують підхід, який базується на уточненні відомого рівняння стану ідеального газу $P = R_gTD$ шляхом введення надстисливості газу Z. У цьому випадку термічне рівняння стану в безрозмірній формі матиме вигляд

$$p = z\theta\rho. \tag{4}$$

Тут $z = Z/Z_t$ – нормований коефіцієнт надстисливості, який можна розглядати як функцію від ρ, θ або p, θ.

Калоричне рівняння стану можна отримати, використовуючи відому термодинамічну тотожність [3]

$$dU = C_V dT - \frac{1}{D^2}\left(P - T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_D\right)dD$$

і термічне рівняння стану. В результаті отримаємо калоричне рівняння стану в диференціальній формі [5]

$$du = c_v d\theta + b\frac{\theta^2}{\rho}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_\rho d\rho, \tag{5}$$

де $c_v \equiv C_V/C_V(D_T, T_T)$ і $b \equiv R_gZ_t/C_V(D_T, T_T)$ – відповідно безрозмірна теплоємність газу і безрозмірна стала.

Якщо функції $c_v(\rho,\theta)$ і $z(\rho,\theta)$ відомі, повний диференціал (5) можна проінтегрувати і отримати калоричне рівняння стану в інтегральній формі.

Відомими є математичні моделі для рівнянь стану, які дозволяють розраховувати термодинамічні властивості природних газів з високою точністю. Це, зокрема, модель AGA8-DC92, у якій використовується коефіцієнт надстисливості [6], а також моделі GERG-2004 і GERG-2008, які базуються на вільній енергії Гельмгольца [12].

Рівняння (1)–(3) разом зі співвідношеннями (4), (5) складають математичну модель динаміки газу в довгому трубопроводі. З використанням термічного і калоричного рівнянь стану газу можна отримати ключову систему нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними стосовно трьох невідомих функцій. Якщо вибрати за ключові функції безрозмірні густину $\rho(\xi,\tau)$, густину масового потоку $j(\xi,\tau) = \rho(\xi,\tau)v(\xi,\tau)$ і температуру $\theta(\xi,\tau)$, то отримаємо систему, в якій рівняння, що випливає із закону збереження маси, пов'язуватиме ключові функції $\rho(\xi,\tau)$ та $j(\xi,\tau)$ і буде лінійним. Цей факт можна використати, щоб підвищити швидкодію ітераційних алгоритмів розв'язування прямих крайових задач, сформульованих для цієї системи.

Позначимо систему рівнянь стосовно ключових функцій $\rho(\xi,\tau)$, $j(\xi,\tau)$ та $\theta(\xi,\tau)$, яка випливає з моделі динаміки газу (1)–(5), через $\mathcal{PDE}$.

2. Моделі керування течією газу в трубопроводі. Керування режимом транспортування газу в газопроводі здійснюють шляхом зміни режимів роботи компресорних станцій, що спричиняє відповідні зміни значень тиску

P, потоку J і температури T на вході ($x=0$) та виході ($x=L$) трубопроводу. Вимірюючи значення цих параметрів у точках $x=0$ та $x=L$, можна отримати шість емпіричних функцій $P_{\text{in}}^{\text{emp}}(t)$, $J_{\text{in}}^{\text{emp}}(t)$, $T_{\text{in}}^{\text{emp}}(t)$ та $P_{\text{out}}^{\text{emp}}(t)$, $J_{\text{out}}^{\text{emp}}(t)$, $T_{\text{out}}^{\text{emp}}(t)$. Обчисливши відповідні безрозмірні функції $p_{\text{in/out}}^{\text{emp}}(\tau)=P_{\text{in/out}}^{\text{emp}}(\tau t_t)/J_t$, $j_{\text{in/out}}^{\text{emp}}(\tau)=J_{\text{in/out}}^{\text{emp}}(\tau t_t)/J_t$, $\theta_{\text{in/out}}^{\text{emp}}(\tau)=\theta_{\text{in/out}}^{\text{emp}}(\tau t_t)/J_t$, можна застосувати їх, щоб сформулювати крайові умови для системи $\mathcal{PDE}$.

Оскільки система $\mathcal{PDE}$ має четвертий порядок за змінною ξ, а емпіричних функцій є шість, то на їхній базі можна сформулювати декілька комплектів крайових умов для цієї системи. Тут обмежимося розглядом лише трьох таких комплектів:

$$\mathcal{BC}_I:\quad \rho|_{\xi=0}=\rho_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau),\ \ \rho|_{\xi=1}=\rho_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau),\ \ \theta|_{\xi=0}=\theta_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau),\ \ \theta|_{\xi=1}=\theta_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau), \quad (6)$$

$$\mathcal{BC}_{II}:\quad \rho|_{\xi=0}=\rho_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau),\ \ j|_{\xi=1}=j_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau),\ \ \theta|_{\xi=0}=\theta_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau),\ \ \theta|_{\xi=1}=\theta_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau), \quad (7)$$

$$\mathcal{BC}_{III}:\ j|_{\xi=0}=j_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau),\ \ \rho|_{\xi=1}=\rho_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau),\ \ \theta|_{\xi=0}=\theta_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau),\ \ \theta|_{\xi=1}=\theta_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau), \quad (8)$$

Функції $\rho_{\text{in/out}}^{\text{emp}}(\tau)$ в цих умовах обчислюємо, використовуючи термічне рівняння стану (4): $\rho_{\text{in/out}}^{\text{emp}}(\tau)=zp_{\text{in/out}}^{\text{emp}}(\tau)\,\theta_{\text{in/out}}^{\text{emp}}(\tau)$.

Праві частини крайових умов (6)−(8) назвемо функціями керування або *зовнішніми функціями*, а їх множину позначимо як

$$\phi(\tau)\equiv\left\{\rho_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau),\rho_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau),j_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau),j_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau),\theta_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau),\theta_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau)\right\}.$$

Початкові умови для системи $\mathcal{PDE}$ виберемо у вигляді

$$\mathcal{IC}:\quad \rho|_{\tau=0}=\rho_0(\xi),\ \ j|_{\tau=0}=j_0(\xi),\ \ \theta|_{\tau=0}=\theta_0(\xi),\ \ \xi\in(0,1). \quad (9)$$

Тут $\rho_0(\xi)$, $j_0(\xi)$, $\theta_0(\xi)$ − задані функції.

Під час експлуатації магістральних газопроводів, як правило, прагнуть застосовувати стаціонарні режими транспортування газу, які є оптимальними за питомими енергетичними затратами. Нестаціонарні режими виникають за потреби перевести трубопровід із одного стаціонарного режиму в інший. Кожен стаціонарний режим визначається двома параметрами керування − масовим потоком $j_0=\text{const}$ і густиною на вході (або виході) трубопроводу $\rho_{\text{in/out}}^{\text{emp}}$. За цими даними, розв'язавши відповідну задачу для стаціонарного режиму, можна встановити функції розподілів безрозмірних густини $\rho_0(\xi)$ і температури $\theta_0(\xi)$ для першої і третьої умов (9). У другій умові покладаємо $j_0(\xi)=j_0=\text{const}$, де j_0 − безрозмірна густина масового потоку у першому стаціонарному режимі.

Із використанням комплектів крайових умов (6)−(8) сформулюємо три крайові задачі для системи $\mathcal{PDE}$:

$$\mathcal{BVP}_I=\{\mathcal{PDE},\mathcal{IC},\mathcal{BC}_I\},$$

$$\mathcal{BVP}_{II}=\{\mathcal{PDE},\mathcal{IC},\mathcal{BC}_{II}\},$$

$$\mathcal{BVP}_{III}=\{\mathcal{PDE},\mathcal{IC},\mathcal{BC}_{III}\}.$$

Ці задачі визначають моделі керування нестаціонарними режимами.

Множини *зовнішніх функцій* $\phi_\Lambda(\tau)$ для задач $\mathcal{BVP}_\Lambda$, $\Lambda=\boldsymbol{I},\boldsymbol{II},\boldsymbol{III}$, є підмножинами $\phi_\Lambda(\tau)\subset\phi(\tau)$, де

$$\phi_{I}(\tau) \equiv \{\rho_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau), \rho_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau), \theta_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau), \theta_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau)\},$$

$$\phi_{II}(\tau) \equiv \{\rho_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau), j_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau), \theta_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau), \theta_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau)\},$$

$$\phi_{III}(\tau) \equiv \{j_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau), \rho_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau), \theta_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau), \theta_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau)\}.$$

Розв'язки $\Phi_{\Lambda}(\xi,\tau) \equiv \{\rho_{\Lambda}(\xi,\tau), j_{\Lambda}(\xi,\tau), \theta_{\Lambda}(\xi,\tau)\}$ задач $\mathcal{BVP}_{\Lambda}$ визначають множини *внутрішніх функцій* відповідних моделей керування.

Позначимо через $\mathcal{DS}_{\Lambda}$ алгоритм розв'язування крайової задачі $\mathcal{BVP}_{\Lambda}$. На вході в алгоритм передаємо множину функцій керування $\phi_{\Lambda}(\tau)$, а на виході з алгоритму отримуємо множину внутрішніх функцій $\Phi_{\Lambda}(\xi,\tau)$:

$$\phi_{\Lambda}(\tau) \xrightarrow{\mathcal{DS}_{\Lambda}} \Phi_{\Lambda}(\xi,\tau). \tag{10}$$

Відображення (10) встановлюють кількісний зв'язок між емпіричними функціями та розв'язками крайових задач для різних моделей керування, що можна використати для контролю цілісності трубопроводу.

Система рівнянь $\mathcal{PDE}$ містить коефіцієнти, залежні від просторової координати ξ, і є суттєво нелінійною. Тому для розв'язування крайових задач $\mathcal{BVP}_{\Lambda}$ диференціальні оператори в правих частинах рівнянь системи $\mathcal{PDE}$ апроксимуємо за змінною ξ скінченними різницями на сітці, яка рівномірно покриває відрізок $[0,1]$. Це дозволяє звести кожну з крайових задач $\mathcal{BVP}_{\Lambda}$ для системи диференціальних рівнянь із частинними похідними до відповідних задач Коші $\mathcal{IVP}_{\Lambda}$ для систем $3N-4$ звичайних диференціальних рівнянь, де N – кількість вузлів $\xi_j \in [0,1]$ [4, 5]. Задачі $\mathcal{IVP}_{\Lambda}$ розв'язано з використанням методів Рунге – Кутта [10, 11], зокрема алгоритм RKF45, який забезпечує високу точність і реалізований у математичних бібліотеках багатьох сучасних систем програмування, таких як Matlab [15], C++, Fortran 90, GNU Octave, Python, SciLab та інших.

Цей підхід застосовано у роботі [4], у якій досліджено вплив параметрів функцій керування $\phi_{\Lambda}(\tau)$ на внутрішні функції $\Phi_{\Lambda}(\xi,\tau)$, які визначають течію газу в трубопроводі для моделей керування $\mathcal{BVP}_{\Lambda}$. Розглянуто випадок перехідних режимів, для якого розроблено спеціальну модель функцій керування, яка враховує специфічність таких режимів.

Проведеними обчислювальними експериментами встановлено, що параметри перехідних процесів, такі як тривалість процесу, робота сил тертя, питомі затрати енергії на транспортування газу, залежність від часу маси газу, накопиченого в трубопроводі тощо, істотно залежать від вибраної моделі керування $\mathcal{BVP}_{\Lambda}$, а також від значень параметрів її функцій керування $\phi_{\Lambda}(\tau)$ – швидкості зміни функцій керування, тривалості та часового зсуву між вхідними і вихідними функціями керування.

У статті [5] чисельно досліджено течію газу в трубопроводі при локальній розгерметизації для різних моделей керування течією $\mathcal{BVP}_{\Lambda}$, $\Lambda = I, II, III$. При цьому розглянуто випадок, коли локальна розгерметизація виникає на фоні стаціонарного режиму роботи газопроводу і досліджено перехідні процеси, спричинені витоком. Із цією метою розроблено математичну модель динаміки газу у трубопроводі за наявності витоку. У цій моделі використано математичну модель малого локального витоку, яку побудовано на основі термодинамічних принципів. Ця модель визначає параметри локального витоку залежно від значень тиску (густини) і температури газу в місці витоку. Проведено обчислювальні експерименти, які дозволили отримати кількісні оцінки збурень параметрів течії газу, спричинених локальною розгерметизацією трубопроводу залежно від місця розгерметизації та інтенсивності витоку.

3. Моделі для контролю цілісності трубопроводу. Встановимо співвідношення, які можна використати для створення методів контролю цілісності лінійної частини магістральних газопроводів на основі даних моніторингу параметрів течії газу в контрольних точках.

Нехай на вході та виході трубопроводу здійснюється моніторинг значень тиску, масової витрати та температури газу. Сформулюємо співвідношення, які можна використати для неперервного контролю цілісності трубопроводу. Контроль з використанням емпіричних функцій $P_{\text{in/out}}^{\text{emp}}(t)$, $J_{\text{in/out}}^{\text{emp}}(t)$ і $T_{\text{in/out}}^{\text{emp}}(t)$ підтверджує (чи спростовує) факт цілісності трубопроводу в моменти часу t періоду спостереження $\mathscr{T}_0$. Застосуємо розглянуті тут математичні моделі керування течією $\mathscr{BVP}_\Lambda$, беручи за вхідні дані для них множину функцій $\phi(\tau)$, обчислених за результатами моніторингу.

3.1. Інформативні ознаки цілісності. Якщо трубопровід цілісний (витоки відсутні), то параметри течії задовольняють математичну модель динаміки (1)–(5). При цьому виконується відображення (10), яке визначає кількісний зв'язок між зовнішніми емпіричними та внутрішніми функціями, що є ознакою цілісності трубопроводу. За наявності витоку відповідність (10) між зовнішніми і внутрішніми функціями вже не виконуватиметься, що є ознакою розгерметизації. Таким чином, цілісність трубопроводу можемо контролювати, перевіряючи виконання відображення (10) в реальному часі.

Можливість такої перевірки базується на тому, що для кожної моделі керування множина зовнішніх функцій $\varphi_\Lambda(\tau)$, які використовуються у формулюванні задачі $\mathscr{BVP}_\Lambda$, є лише підмножиною множини зовнішніх функцій $\phi(\tau)$, тому для кожної моделі керування є дві вільні зовнішні функції: $\varphi_I(\tau) = \{j_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau), j_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau)\}$, $\varphi_{II}(\tau) = \{j_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau), \rho_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau)\}$, $\varphi_{III}(\tau) = \{\rho_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau), j_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau)\}$, $\varphi_\Lambda(\tau) = \phi(\tau) \setminus \phi_\Lambda(\tau)$. Тому можна порівнювати вільні зовнішні функції на вході та виході зі значеннями відповідних внутрішніх функцій, обчислених у точках $\xi = 0$ та $\xi = 1$.

Наприклад, для моделі керування $\mathscr{BVP}_I$ можна порівняти значення вільної зовнішньої функції $j_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau) \subset \varphi_I(\tau)$ зі значеннями внутрішньої функції $j_I(\xi,\tau) \subset \Phi_I(\xi,\tau)$, обчисленими в точці $\xi = 0$: $j_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau) \rightleftarrows j_I(0,\tau)$, а $j_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau) \subset \phi_I(\tau)$ – із тією самою функцією $j_I(\xi,\tau)$, але обчисленою в точці $\xi=1$: $j_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau) \rightleftarrows j_I(1,\tau)$. Тут «$\rightleftarrows$» – символ порівняння. Для моделей $\mathscr{BVP}_{II}$ і $\mathscr{BVP}_{III}$ також матимемо по дві пари таких порівнянь: $j_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau) \rightleftarrows j_{II}(0,\tau)$ і $\rho_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau) \rightleftarrows \rho_{II}(1,\tau)$ та $\rho_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau) \rightleftarrows \rho_{III}(0,\tau)$ і $j_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau) \rightleftarrows j_{III}(1,\tau)$.

Щоб порівнювати пари цих функцій за їхніми миттєвими значеннями, обчислюємо різниці:

$$\delta_{\text{in}}^{I}(\tau) = j_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau) - j_I(0,\tau), \qquad \delta_{\text{out}}^{I}(\tau) = j_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau) - j_I(1,\tau),$$

$$\delta_{\text{in}}^{II}(\tau) = j_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau) - j_{II}(0,\tau), \qquad \delta_{\text{out}}^{II}(\tau) = \rho_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau) - \rho_{II}(1,\tau),$$

$$\delta_{\text{in}}^{III}(\tau) = \rho_{\text{in}}^{\text{emp}}(\tau) - \rho_{III}(0,\tau), \qquad \delta_{\text{out}}^{III}(\tau) = j_{\text{out}}^{\text{emp}}(\tau) - j_{III}(1,\tau),$$

Оскільки зовнішні функції $\phi(\tau)$ отримано шляхом вимірювань, то навіть за відсутності витоків функції $\delta_{\text{in/out}}^{\Lambda}(\tau)$ не будуть тотожно нульовими. Для цілісного трубопроводу їхні значення залежатимуть лише від похибок вимірювання вхідних даних і похибок розв'язування задачі $\mathscr{BVP}_\Lambda$ із застосуванням алгоритму $\mathcal{DS}_\Lambda$. При цьому вплив похибок вимірювань значно переважатиме. Тому значення функцій $\delta_\Lambda(\tau) = \{\delta_{\text{in}}^\Lambda(\tau), \delta_{\text{out}}^\Lambda(\tau)\}$ визначатимуть випадкові величини з математичним сподіванням, близьким до нуля, що можна вважати інформативною ознакою цілісності трубопроводу.

За наявності витоку функція $\delta_\Lambda(\tau)$ міститиме детерміністичну складову, яка зростатиме зі збільшенням інтенсивності витоку, що можна вважати інформативною ознакою порушення цілісності трубопроводу (тобто наявності витоку).

3.2. Функціонали і критерії контролю цілісності. Ці ознаки можна виявити, порівнюючи зовнішні вільні функції з відповідними їм внутрішніми функціями на скінченних часових інтервалах за певною функціональною нормою $\|\cdot\|$. З цією метою розглянемо дискретні моменти часу $\tau_i \in \mathcal{T}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, і аналізуватимемо функції $\delta_\Lambda(\tau)$ на проміжках $\mathcal{T}_i = [\tau_i - \Delta/2, \tau_i + \Delta/2]$, де Δ − стала.

Вибираючи квадратичну норму $\|\cdot\|_2$, введемо для кожної з моделей керування $\mathcal{BVP}_\Lambda$ два функціонали, обчислені на проміжку $\mathcal{T}_i$:

$$IF_{\text{in}}^\Lambda(\mathcal{T}_i) = \left(\frac{1}{\Delta} \int\limits_{\tau_i - \Delta/2}^{\tau_i + \Delta/2} (\delta_{\text{in}}^\Lambda(\tau))^2 \, d\tau \right)^{1/2},$$

$$IF_{\text{out}}^\Lambda(\mathcal{T}_i) = \left(\frac{1}{\Delta} \int\limits_{\tau_i - \Delta/2}^{\tau_i + \Delta/2} (\delta_{\text{out}}^\Lambda(\tau))^2 \, d\tau \right)^{1/2}. \tag{11}$$

Нехай на проміжку $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}$ трубопровід залишається цілісним. Тоді зовнішні функції $\phi(\tau)$, обчислені для цього проміжку на основі емпіричних даних, узгоджуються з математичною моделлю динаміки газу у цілісному трубопроводі. Оскільки наслідком застосування алгоритму $\mathcal{DS}_\Lambda$ є відображення (10), на основі якого обчислено функціонали (11), то значення вхідного і вихідного функціоналів (11), обчислених на проміжку $\mathcal{T}_i$, не перевищуватимуть деяких додатних значень $\overline{\delta}_{\text{in/out}}^\Lambda \ll 1$, залежних від середньоквадратичних похибок вимірювання параметрів течії на вході та виході і від похибки розв'язування задачі $\mathcal{BVP}_\Lambda$.

Якщо на проміжку $\mathcal{T}_i$ трубопровід втратив цілісність, то зовнішні функції $\phi(\tau)$, які обчислені на основі результатів вимірювань на трубопроводі з витоками, не узгоджуватимуться з математичною моделлю, в якій витоки не враховані. Тепер значення функціоналів (11) визначатимуться не тільки похибками, але й втратами маси, імпульсу й енергії в трубопроводі внаслідок витоків через негерметичну стінку. Це спричиняє зростання їхніх значень понад $\overline{\delta}_{\text{in/out}}^\Lambda$.

За критерій цілісності труби візьмемо параметр IC − булеву змінну, яка приймає значення 1, коли трубопровід цілісний, і 0 − коли його цілісність не підтверджена. Використовуючи функціонал (11), обчислимо параметр цілісності трубопроводу на проміжку $\mathcal{T}_i$ при застосуванні моделі керування $\mathcal{BVP}_\Lambda$:

$$IC_\Lambda(\mathcal{T}_i) = \begin{cases} 1, & (IF_{\text{in}}^\Lambda(\mathcal{T}_i) \le \overline{\delta}_{\text{in}}^\Lambda) \wedge (IF_{\text{out}}^\Lambda(\mathcal{T}_i) \le \overline{\delta}_{\text{out}}^\Lambda), \\ 0, & \text{в іншому випадку}, \end{cases} \tag{12}$$

де $\wedge$ − оператор кон'юнкції.

Параметр цілісності IC, визначений з використанням усіх трьох моделей керування, обчислимо як

$$IC(\mathcal{T}_i) = IC_I(\mathcal{T}_i) \cdot IC_{II}(\mathcal{T}_i) \cdot IC_{III}(\mathcal{T}_i). \tag{13}$$

3.3. Контроль цілісності в проміжних точках. Надійність виявлення інформативних ознак розгерметизації трубопроводу можна істотно підвищити, якщо, крім даних вимірювання параметрів течії на вході та виході секції, використати додаткову інформацію про параметри течії газу в проміжних точках.

Отримати таку інформацію можна, оскільки вздовж кожної секції лінійної частини, довжина яких складає 100÷150 км, на відстанях 25÷30 км розташовані кранові вузли, на майданчиках яких можна встановити прилади вимірювання тиску і температури газу в трубі.

Тому розглянемо випадок, коли наявні емпіричні дані, які визначають залежні від часу t значення тиску $P_k^{\mathrm{emp}}(t)$ і температури газу $T_k^{\mathrm{emp}}(t)$ в трубі, що виміряні в $K-1$ контрольних точках з координатами x_k, $k = 1, 2, \ldots, K-1$.

За цими даними обчислюємо множину додаткових *зовнішніх вільних* функцій $\varphi_a(\tau) = \{\rho_k^{\mathrm{emp}}(\tau), \theta_k^{\mathrm{emp}}(\tau),\ k = 1, 2, \ldots, K-1\}$. Тепер для кожної моделі $\mathcal{BVP}_\Lambda$, крім функціоналів (11), матимемо також по два функціонали у кожній проміжній контрольній точці ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, K-1$:

$$IF_k^{\rho\Lambda}(\mathcal{T}_i) = \left(\frac{1}{\Delta} \int_{\tau_i - \Delta/2}^{\tau_i + \Delta/2} (\delta_k^{\rho\Lambda}(\tau))^2 \, d\tau \right)^{1/2},$$

$$F_k^{\theta\Lambda}(\mathcal{T}_i) = \left(\frac{1}{\Delta} \int_{\tau_i - \Delta/2}^{\tau_i + \Delta/2} (\delta_k^{\theta\Lambda}(\tau))^2 \, d\tau \right)^{1/2}, \tag{14}$$

де $\delta_k^{\rho\Lambda}(\tau) = \rho_k^{\mathrm{emp}}(\tau) - \rho_\Lambda(\xi_k, \tau)$, $\delta_k^{\theta\Lambda}(\tau) = \theta_k^{\mathrm{emp}}(\tau) - \theta_\Lambda(\xi_k, \tau)$.

Введемо параметр цілісності, визначений за даними вимірювань у контрольній точці k при застосуванні моделі керування $\mathcal{BVP}_\Lambda$:

$$IC_k^\Lambda(\mathcal{T}_i) = \begin{cases} 1, & (IF_k^{\rho\Lambda}(\mathcal{T}_i) \le \bar{\delta}_k^{\rho\Lambda}) \wedge (IF_k^{\theta\Lambda}(\mathcal{T}_i) \le \bar{\delta}_k^{\theta\Lambda}), \\ 0, & \text{в іншому випадку}, \end{cases} \tag{15}$$

а також параметри цілісності, визначені за даними вимірювань на вході $IC_0^\Lambda(\mathcal{T}_i)$ та виході $IC_K^\Lambda(\mathcal{T}_i)$ при застосуванні цієї самої моделі:

$$IC_0^\Lambda(\mathcal{T}_i) = \begin{cases} 1, & IF_{\mathrm{in}}^\Lambda(\mathcal{T}_i) \le \bar{\delta}_{\mathrm{in}}^\Lambda, \\ 0, & \text{в іншому випадку}; \end{cases}$$

$$IC_K^\Lambda(\mathcal{T}_i) = \begin{cases} 1, & IF_{\mathrm{out}}^\Lambda(\mathcal{T}_i) \le \bar{\delta}_{\mathrm{out}}^\Lambda, \\ 0, & \text{в іншому випадку}. \end{cases} \tag{16}$$

Тоді формула для обчислення параметра цілісності трубопроводу при застосуванні моделі керування $\mathcal{BVP}_\Lambda$ матиме вигляд

$$IC_\Lambda(\mathcal{T}_i) = \prod_{k=0}^{K} IC_k^\Lambda(\mathcal{T}_i). \tag{17}$$

Параметр цілісності трубопроводу, обчислений при застосуванні усіх трьох моделей керування, як і раніше, визначається формулою (13).

3.4. Про алгоритм реалізації методу контролю цілісності. Реалізація методу контролю цілісності секції лінійної частини магістрального газопроводу передбачає декілька етапів.

Перший етап – отримання емпіричних даних про параметри течії газу. З цією метою визначаються дискретність відбору даних і тривалість Δ_0 періоду спостереження. Потім здійснюється моніторинг значень параметрів в усіх контрольних точках, їх первинна обробка (фільтрація) і накопичення у базах оперативної інформації та архіві режимних даних. У базі оперативної інформації зберігаються дані за період спостереження $\mathcal{I}_0 = [\tau - \Delta_0, \tau]$, який змінюється з часом так, що останній запис завжди містить дані, отримані в поточний момент часу τ, а його тривалість Δ_0 залишається незмінною. Для цього перед накопиченням нових даних, отриманих для поточного моменту часу τ, найстаріші дані видаляють з бази оперативної інформації. Цей етап виконується автономно, незалежно від інших етапів.

На наступному етапі визначають тривалість $\Delta_c < \Delta_0$ поточного контрольного періоду $\mathcal{I}_i = [\tau - \Delta_c, \tau]$ і формують дані, необхідні для обчислення зовнішніх функції $\phi(\tau)$ та $\varphi(\tau)$, а також функцій, які визначають властивості математичної моделі динаміки газу, таких як $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$, $z(\rho, \theta)$, $c_v(\rho, \theta)$ та інших. Для обчислення цих функцій створюють відповідні програмні модулі, які використовують дані, що накопичені в базі оперативної інформації і базах параметрів математичної моделі. Функції початкових умов $\rho_0(\xi)$ та $j_0(\xi)$ для поточного контрольного періоду отримують із розв'язків $\Phi_\Lambda(\xi, \tau)$, отриманих для попереднього контрольного періоду.

На третьому етапі отримують чисельні розв'язки $\Phi_\Lambda(\xi, \tau)$ для поточного контрольного періоду усіх трьох задач $\mathcal{BVP}_\Lambda$. З цією метою створюють програмний модуль, який використовує як вхідні дані значення зовнішніх функцій і функцій властивостей математичної моделі динаміки, які повертають програмні модулі, що створені на другому етапі. Отримані на цьому етапі розв'язки $\Phi_\Lambda(\xi, \tau)$ заносять до бази даних розв'язків із прив'язкою до контрольного періоду.

На наступному етапі обчислюють значення функціоналів (11), (14) для поточного контрольного періоду. Необхідні для цього дані про вільні зовнішні функції $\varphi_\Lambda(\tau)$ та $\varphi_a(\tau)$ обчислюють за допомогою відповідних програмних модулів, створених на другому етапі, а дані про внутрішні функції $\Phi_\Lambda(\xi, \tau)$ для поточного контрольного періоду зчитують із бази даних розв'язків. Обчислені значення функціоналів заносять до бази даних цілісності з прив'язкою до поточного контрольного періоду.

На п'ятому етапі обчислюють значення параметрів цілісності $IC_k^\Lambda(\mathcal{I}_i)$, $k = 0, 1, \dots, K$, $IC_\Lambda(\mathcal{I}_i)$, $IC(\mathcal{I}_i)$. Для цього використовують наперед визначені значення критичних параметрів $\overline{\delta}_{\text{in/out}}^\Lambda$ та $\overline{\delta}_k^{\rho\Lambda}$, $\overline{\delta}_k^{\theta\Lambda}$, а також обчислені на попередньому етапі значення функціоналів для поточного контрольного періоду. Результати обчислень цього етапу заносять до бази даних цілісності.

Останнім етапом є прийняття рішення щодо цілісності трубопроводу. Для цього використовують дані про значення параметрів цілісності $IC_\Lambda(\mathcal{I}_i)$ та $IC(\mathcal{I}_i)$, обчислені для поточного контрольного періоду. Для підвищення надійності контролю можна використовувати також значення параметрів цілісності, обчислених для декількох попередніх контрольних періодів. Якщо на цьому етапі підтверджується цілісність газопроводу, то відбувається повернення до другого етапу. Робота алгоритму циклічно повторюється аж до підтвердження факту розгерметизації.

4. Висновки. Запропоновано підхід до контролю цілісності лінійної частини магістральних газопроводів, що базується на сумісному використанні математичної моделі динаміки газу в довгому трубопроводі та даних моніторингу параметрів течії газу на його вході та виході.

У рамках моделі сформульовано крайові задачі для нелінійної системи диференціальних рівнянь із частинними похідними, що моделюють нестаціонарні процеси перенесення маси, імпульсу та енергії в газопроводі за різних умов керування. Розглянуто три моделі керування, які відрізняються крайовими умовами.

У першій моделі на вході та виході задано густину газу як функцію часу, у другій моделі на вході – густину, а на виході – густину масового потоку, у третій моделі на вході – густину масового потоку, а на виході – густину. У всіх трьох моделях задано також температуру газу на вході та виході.

Шість функцій правих частин крайових умов цих задач розглядаються як функції керування течією (зовнішні функції). У запропонованому підході зовнішні функції обчислюють на основі емпіричних даних, отриманих шляхом моніторингу тиску, температури і витрат на вході та виході трубопроводу.

Розв'язки кожної зі сформульованих задач розглядаються як внутрішні функції відповідної моделі керування. Вони визначають нестаціонарні розподіли густини, масового потоку та температури у трубопроводі. У формулюванні кожної задачі використовуються лише чотири зовнішніх функції з шести можливих. Тому дві зовнішні функції залишаються вільними. За запропонованим підходом їх використовують для контролю цілісності трубопроводу. З цією метою для кожної моделі керування побудовано два функціонали, які визначають відхилення вільних зовнішніх функцій від значень відповідних внутрішніх функцій, обчислених на вході та виході. За відсутності витоків значення цих функціоналів визначаються лише похибками вимірювань і обчислень: вони близькі до нуля, що є ознакою цілісності трубопроводу. За наявності витоків значення функціоналів зростають, що є ознакою розгерметизації трубопроводу.

Розглянуто також випадок використання додаткової інформації про течію газу в трубопроводі, отриманої шляхом вимірювання тиску і температури газу в проміжних контрольних точках між входом і виходом. Завдяки цьому зростає кількість вільних контрольних точок, тож інформативність вхідних даних суттєво зростає.

Отримані результати можна застосувати для створення методів контролю цілісності лінійної частини магістральних газопроводів з використанням даних моніторингу параметрів течії газу в контрольних точках.

1. *Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С.* Численный метод определения места утечки жидкости или газа в трубопроводе // Сиб. журн. индустр. математики. – 2009. – **12**, № 1. – С. 25–30.
   Те саме: *Voevodin A. F., Nikiforovskaya V. S.* A numerical method for identifying the location of a fluid leak in a pipeline // J. Appl. Ind. Math. – 2010. – **4**, No. 2. – P. 276–281. – https://doi.org/10.1134/S1990478910020171.
2. *Чекурін В. Ф., Химко О. М.* Перехідні процеси течії газу в трубопроводі, спричинені локальним витоком // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 3. – С. 143–158.
3. *Anderson G.* Thermodynamics of natural systems. – New York: Cambridge Univ. Press, 2005. – 662 p.
4. *Chekurin V., Khymko O.* Numerical modeling transient processes in a long gas pipeline // Math. Model. Comput. – 2019. – **6**, No. 2. – P. 220–238. – https://doi.org/10.23939/mmc2019.02.220.
5. *Chekurin V.*, *Kushnir R.*, *Ponomarev Yu.*, *Prytula M.*, *Khymko O.* A model of a system for gas transmission pipeline integrity monitoring // Degradation assessment and failure prevention of pipeline systems / Bolzon G., Gabetta G., Nykyforchyn H. (Eds).– (Ser.: Lecture Notes in Civil Engineering, Vol. 102). – Springer,

2021. – P. 99–114. – https://doi.org/10.1007/978-3-030-58073-5_8.
6. *Farzaneh-Gord M., Khamforoush A., Hashemi S., Namin H. P.* Computing thermal properties of natural gas by utilizing AGA8 equation of state // Int. J. Chem. Eng. Appl. – 2010. – **1**, No. 1. – P. 20–24.
7. *Geiger G.* Principles of leak detection. – Breda, The Netherlands: Krohne Oil&Gas, 2012. – 68 p.
8. *Geiger G., Werner T., Matko D.* Leak detection and locating: a survey // Proc. 35th PSIG Annual Meeting. Pipeline Simulation Interest Group (15–17 October 2003, Bern). – Paper Number PSIG-0301, 2003. – 20 p.
9. *Gerhart P. M., Gerhart A. L., Hochstein J. I.* Munson, Young, and Okiishi's fundamentals of fluid mechanics. – New York: Wiley, 2016. – 816 p.
10. *Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G.* Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 2008. – 542 p.
11. *Hairer E., Wanner G.* Solving ordinary differential equations. II. Stiff and differential-algebraic problems. – Berlin: Springer, 2010. – xv+614 p.
12. *Kunz O., Wagner W.* The GERG-2008 wide range equation of state for natural gases and other mixtures: An expansion of GERG-2004 // J. Chem. Eng. Data. – 2012. – **57**, No. 11. – P. 3032–3091. – https://doi.org/10.1021/je300655b.
13. *Murvay P.-S., Silea I.* A survey on gas leak detection and localization techniques // J. Loss Prevent. Proc. – 2012. – **25**, No. 6. – P. 966–973. – https://doi.org/10.1016/j.jlp.2012.05.010.
14. *Ostapkowicz P., Bratek A.* Possible leakage detection level in transmission pipelines using improved simplified methods // Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability. – 2016. – **18**, No. 3. – P. 469–480. – https://doi.org/10.17531/ein.2016.3.20.
15. *Shampine L. F., Gladwell I., Thompson S.* Solving ODEs with MATLAB. – Cambridge Univ. Press, 2003. – viii+263 p.

MATHEMATICAL MODELS FOR INTEGRITY CONTROL OF LINEAR PART OF MAIN GAS PIPELINES

Boundary-value problems modeling the gas flow in a long pipeline under various external controls are formulated. With the use of the data obtained by monitoring inlet and outlet flow parameters in pipeline and solutions of the formulated problems, criteria for pipeline integrity are formulated. The case of availability of an additional information on empirical flow parameters at intermediate points is considered separately. Possibility of using the obtained results to create methods and systems for monitoring the integrity of gas pipelines is discussed.

Key words: *long pipelines, gas dynamics model, gas flow control models, leak detection, pipe integrity criteria.*

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано 10.10.20