УДК 539.375

В. А. Кривень[✉], В. Б. Валяшек, Л. І. Цимбалюк, Н. І. Блащак

ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОБІЧНО ВІДШАРОВАНОГО ТОНКОГО ВКЛЮЧЕННЯ ПІД ЗСУВНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Досліджено розвиток пластичних деформацій в тілі із тонким включенням яке перебуває в однобічному контакті з ідеально пружно-пластичним середовищем під зсувним навантаженням. Знайдено форму континуальної пластичної зони за розв'язком пружно-пластичної задачі та досліджено розвиток пластичного шару вздовж межі включення – середовище. Об'ємно розподілені пластичні деформації охоплюють менше 40% поверхні включення, а модель локалізованих пластичних деформацій передбачає повне відшарування включення.

Ключові слова: *пружно-пластична задача, пластична зона,включення, конформне відображення, задача Келдиша – Сєдова.*

Вступ. Дослідження напружено-деформованого стану (НДС) пружно-пластичних тіл з концентраторами напружень залишається актуальною задачею, незважаючи на увагу дослідників до цієї проблеми в Україні та світі і досягнуті результати [5, 6, 9–11]. З огляду на формальну доступність методів і засобів чисельного аналізу на сьогоднішній день виявилось зовсім небагато аналітичних і чисельно-аналітичних підходів до розв'язання пружно-пластичних задач у тілах з концентраторами напружень складної форми, хоча якраз вони найбільш зручні для застосувань і дають найповніше уявлення про картину НДС. Дослідження розвитку пластичних деформацій у тілах з концентраторами напружень, виконані на основі класичних розв'язків пружно-пластичної задачі, є також важливим доповненням їх досліджень та аналізу на основі модельного припущення про локалізацію пластичних деформацій у шарах нехтовно малої товщини [7, 12].

1. Постановка задачі. Нехай ідеально пружно-пластичне тіло $-\infty < x, y, z < +\infty$, із жорстким включенням $x = 0$, $-h \le y \le h$, $-\infty < z < +\infty$, що знаходиться в однобічному, $x = +0$, $-h \le y \le h$, ідеальному механічному зв'язку із середовищем, деформується монотонно зростаючим зсувним навантаженням $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = \tau_\infty$, прикладеним на нескінченності (див. рис. 1, де сірим кольором відмічено зону пластичних деформацій).

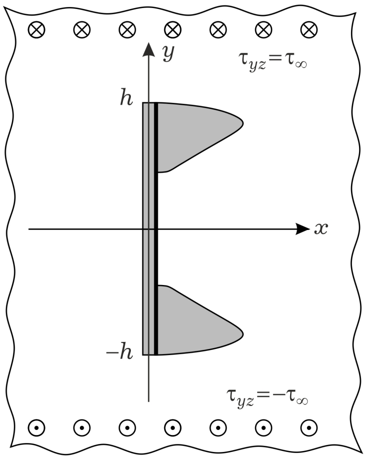

Рис. 1. Поперечний переріз тіла.

Задача полягає у визначенні НДС і знаходженні залежності форми і характеристик пластичної зони від величини діючого навантаження у ідеально пружно-пластичному тілі із зсувною границею текучості, рівною k.

2. Основні результати. У рамках сформульованої задачі у середовищі виникає антиплоский НДС, а утворена компонентами напружень функція $\tau^{(1)}(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ буде у пружній частині тіла аналітичною функцією комплексного аргументу $\zeta = x + iy$.

✉ kryvenv@gmail.com

Дослідимо розвиток об’ємно розподілених пластичних деформацій, що розвиваються від вершин включення, та проаналізуємо розвиток пластичних деформацій рамках моделі Леонова – Панасюка – Дагдейла [7], вважаючи їх локалізованими в шарі нульової товщини на межі включення – середовище.

Будемо вважати, що локалізовані деформації зосереджуються у шарах $x = +0$, $h - d \le |y| \le h$, де $d = d(\tau_\infty)$ – довжина ділянок, уздовж яких відбулось відшарування включення від основного середовища під впливом навантаження τ_∞.

Внаслідок симетрії напружено-деформований стан і функцію $\tau^{(1)}(\zeta)$ достатньо розглянути тільки поза включенням у верхній півплощині Oxy (область $\mathcal{D}^{(1)} = \{(x, y) : x \ge 0 \backslash \{x = 0,\ 0 \le y \le h\}\}$).

На межі області $\mathcal{D}^{(1)}$ функція $\tau^{(1)}(\zeta)$ повинна задовольняти такі умови:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Im} \tau^{(1)}(\zeta) = 0, && \zeta = x, && -\infty < x < 0, \\
&\operatorname{Im} \tau^{(1)}(\zeta) = 0, && \zeta = -0 + iy, && 0 \le y \le h, \\
&\left|\tau^{(1)}(\zeta)\right| = k, && \zeta = +0 + iy, && h - d < y < h, \\
&\operatorname{Re} \tau^{(1)}(\zeta) = 0, && \zeta = +0 + iy, && 0 \le y \le h - d, \\
&\lim_{\zeta \to \infty} \tau^{(1)}(\zeta) = \tau_\infty. && &&
\end{aligned} \tag{1}
$$

Перша з умов (1) є наслідком симетрії відносно осі $y = 0$, друга – результат відсутності контакту включення із середовищем на ділянці $x = -0$, $-h \le y \le h$, третя умова є умовою пластичності: $\tau_{xz}^2(+0, y) + \tau_{yz}^2(+0, y) = k^2$, яка досягається у точках пластичного шару, четверта – результат ідеального механічного контакту на ділянці включення, не охопленій пластичними деформаціями, та відсутності на ній переміщення, п’ята умова задає спосіб і величину діючого навантаження.

Крім того, оскільки умова пластичності не повинна досягатися поза відрізком $x = +0$, $h - d \le |y| \le h$, в усіх інших точках області $\mathcal{D}^{(1)}$ повинна виконуватися умова

$$
\left|\tau^{(1)}(\zeta)\right| < k. \tag{2}
$$

Функція $\tau^{(1)}(\zeta)$ є однолистою в області $\mathcal{D}^{(1)}$ і конформно відображає її на область $\mathcal{G}$ ($|\tau| \le k$, $0 \le \arg\tau \le \pi/2$) комплексної площини τ (рис. 2).

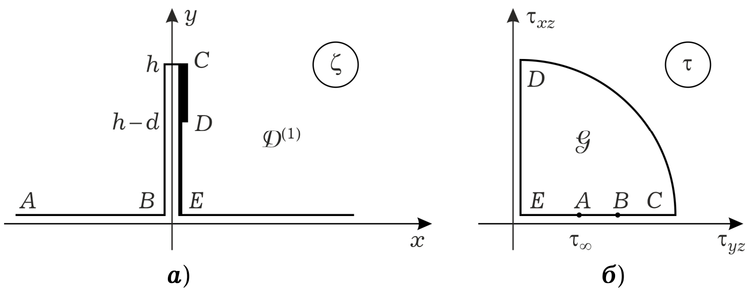

Рис. 2. Конформне відображення, здійснюване функцією $\tau^{(1)}(\zeta)$.

Області $\mathcal{D}^{(1)}$ і $\mathcal{G}$ визначені, їхні межі не містять невідомих ділянок. На границі обох областей є рівно три пари точок, координати яких апріорі відомі: $A\,(\zeta=\infty,\tau=\tau_\infty)$, $C\,(\zeta=ih,\tau=k)$, $E\,(\zeta=0,\tau=0)$. Тому, згідно з теоремою Рімана про конформні відображення, функція $\tau^{(1)}(\zeta)$ існує і є єдиною. Її можна знайти як композицію елементарних відображень:

$$\tau^{(1)}(\zeta)=\frac{\sqrt{(k^2+\tau_\infty^2)^2\sqrt{\zeta^2+h^2}-4k^2\tau_\infty^2h}-(k^2-\tau_\infty^2)\sqrt[4]{\zeta^2+h^2}}{2\tau_\infty\sqrt{\sqrt{\zeta^2+h^2}-h}}. \tag{3}$$

Таким чином, зі збільшенням величини діючого навантаження τ_∞ від 0 до k довжина пластичного шару монотонно зростає від 0 до h.

Дослідимо тепер розвиток континуальної пластичної зони.

Не приймаючи будь-яких припущень щодо форми пластичної зони, визначимо НДС і форму зони за розв'язком пружно-пластичної задачі як задачі з вільною границею (див. рис. 1).

Функція $\tau_{yz}(x,y)+i\tau_{xz}(x,y)$, яку тепер позначимо через $\tau(\zeta)$, буде аналітичною та однолистою у розрізаній вздовж відрізка $x=0$, $0\le y\le h$ верхній півплощині ζ поза пластичною зоною (область $\mathcal{D}^{(1)}$). Лінію, що розділяє область пружних і пластичних деформацій, позначимо через L.

На межі області $\mathcal{D}^{(1)}$ функція $\tau(\zeta)$ задовольнятиме умови (1), третя з яких замінена двома умовами

$$|\tau(\zeta)|=k,\qquad \zeta\in L,$$

$$\arg\tau(\zeta)=-\arg(\zeta-ih),\qquad \zeta\in L,$$

а друга умова з (1) є наслідком співвідношення Генкі [8], згідно з яким лінії ковзання у зоні пластичності є відрізками прямих.

Умова пластичності не повинна досягатися поза пластичною зоною, а всередині області $\mathcal{D}^{(1)}$ необхідно, щоб виконувалась нерівність (2).

Як і $\tau^{(1)}(\zeta)$, функція $\tau(\zeta)$ також конформно відображає область $\mathcal{D}^{(1)}$ на $\mathcal{G}$, але, оскільки межа області $\mathcal{D}^{(1)}$ не є апріорі відомою, визначення $\tau(\zeta)$ не зводиться до побудови самого лише конформного відображення. Знаходження $\tau(\zeta)$ тепер є задачею із невідомою межею, для розв'язання якої скористаємося методом, розвинутим у роботах [3, 4].

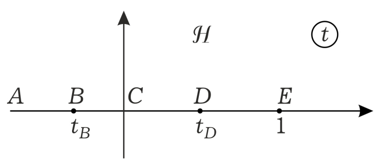

Рис. 3. Область допоміжного комплексного параметра.

Функцію $\tau(\zeta)$ шукаємо в параметричному вигляді:

$$\tau=\tau(t),\qquad \zeta=\zeta(t),\qquad t\in\mathcal{H}=\{\operatorname{Im}t>0\}. \tag{5}$$

Оскільки конформний образ області $\mathcal{H}$ у площині t відомий, першу із функцій (5) можна знайти конформним відображенням області $\mathcal{H}$ на $\mathcal{D}^{(1)}$ (рис. 2, рис. 3). Таким чином, отримуємо

$$\tau(t)=k\frac{\sqrt{t_D(t-1)}}{\sqrt{t-t_D}+\sqrt{(1-t_D)t}}, \tag{6}$$

де $t_D=4\dfrac{k^2\tau_\infty^2}{(k^2+\tau_\infty^2)^2}$, а під $\sqrt{t-a}$, $a\in\mathbb{R}$, розуміємо аналітичну в $\mathcal{H}$ функцію, дійсну і додатну при $t>a$.

Подібно, як у роботі [3], введемо нову невідому аналітичну в $\mathcal{H}$ функцію

$$\lambda(t) = (\zeta(t) - ih)\tau(t)\,,$$

визначення якої зводиться в півплощині $\mathcal{H}$ до такої задачі Келдиша – Сєдова [1]:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\lambda(t) = -\ell\tau(t), && t \in (-\infty, t_B)\,,\\
&\operatorname{Re}\lambda(t) = 0, && t \in [t_B, 0)\,,\\
&\operatorname{Im}\lambda(t) = 0, && t \in (t_D, 1]\,,\\
&\operatorname{Im}\lambda(t) = -\ell\tau(t), && t \in (1, \infty)\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

Зауважимо, що характер крайових умов (7) змінюється у точках t_B і 0, в околі яких функція $\lambda(t)$ повинна бути обмеженою.

Загальний розв'язок задачі (7) можна подати формулою

$$\lambda(t) = \frac{\ell\sqrt{t(t-t_B)}}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{t_b} \frac{\tau(\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta(\eta-t_B)}(\eta-t)} + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\tau(\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta(\eta-t_B)}(\eta-t)} + \mathcal{A}\right), \tag{8}$$

де $\mathcal{A}$ – довільна дійсна константа.

Для обмеженості функції (8) у точках зміни типу крайових умов необхідно, щоб виконувалась умова

$$\int\limits_{-\infty}^{t_b} \frac{\tau(\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta(\eta-t_B)}\,\eta} + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\tau(\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta(\eta-t_B)}\,\eta} = 0\,. \tag{9}$$

Крім того, із формули (6) випливає, що $\tau(1) = 0$, а отже, і $\lambda(1) = 0$. Звідси отримуємо ще одну умову, яку повинна задовольняти функція $\lambda(t)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{t_b} \frac{\tau(\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta(\eta-t_B)}\,(\eta-1)} + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\tau(\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta(\eta-t_B)}\,(\eta-1)} + \mathcal{A} = 0\,. \tag{10}$$

Безпосередньою перевіркою встановлено, що для кожного $\tau_\infty \in (0.01,\, 0.999)$ ліва частина (9) як функція від t_B є монотонно спадною функцією, знак якої змінюється на відрізку $[-3,\, 0]$, тому параметр t_B можна знайти чисельним методом.

Підставивши значення $\mathcal{A}$, визначене із (10), у формулу (8), отримуємо

$$\lambda(t) = \frac{\ell\sqrt{t(t-t_B)}(t-1)}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{t_B} \frac{\tau(\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta(\eta-t_B)}(\eta-1)(\eta-t)} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\tau(\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta(\eta-t_B)}(\eta-1)(\eta-t)}\right). \tag{11}$$

Зауважимо, що усі інтеграли, які входять у формули (8)–(11), є збіжними.

Задачу Келдиша – Сєдова розв'язано і, отже, знайдено функцію $\zeta(t)$: $\zeta(t) = ih + \lambda(t)\,/\,\tau(t)$, яка разом із рівністю (6) повністю визначає НДС і континуальну зону пластичності.

Знайдемо рівняння пружно-пластичної межі L. Враховуючи, що межа L є образом відрізка у площині ζ, із формул (6), (11) одержуємо

$$x(t) = \lambda(t)\sqrt{\frac{t_D - t}{t_D(1-t)}}, \qquad y(t) = \ell - \lambda(t)\sqrt{\frac{(1-t_D)t}{t_D(1-t)}}, \qquad t \in [0, t_D]\,.$$

Форми межі зон пружних і пластичних деформацій для значень діючого навантаження $\tau_\infty / k = 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 0.975, 0.99$ наведено на рис. 4.

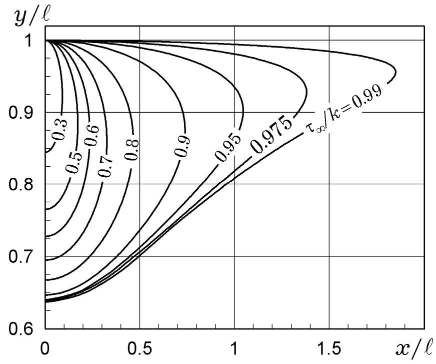

Рис. 4. Межі пластичної зони для різних значень τ_∞ / k .

Висновки і обговорення результатів. З проведеного дослідження випливає, що пластичний шар монотонно зростає, поступово відшаровуючи включення від його вершини до центру. Континуальна зона розвивається від вершини включення, збільшується в об'ємі але не охоплює усієї поверхні включення − більша її частина залишається невідшарованою. На початковій стадії континуальна зона розвивається майже гомотетично, але вже для навантажень $\tau_\infty > 0.5k$ її розвиток домінує в напрямку, перпендикулярному до включення. Зростання пластичної зони вздовж включення сповільнюється і практично припиняється при навантаженнях $\tau_\infty > 0.95k$. Починаючи від $\tau_\infty = 0.95k$, межа зони перестає бути опуклою лінією, її вершина поступово піднімається, наближаючись до перпендикуляра, проведеного через вершину включення. Цікаво, що максимальна частка поверхні включення, охопленого пластичною зоною, дорівнює 0.363, що є досить близьким до золотої пропорції: $(\sqrt{5} - 1)/2 = 0.382$.

Досить несподіваною виявилася відсутність розв'язку цієї задачі у пружній постановці, адже його існування передбачає, що пружне переміщення $w(x, y)$ в напрямку, перпендикулярному до площини поперечного перерізу (див. рис.1), повинно бути нульовим у двох точках $(-0, 0)$ і $(-0, h)$. У першій точці − внаслідок непарності $w(x, y)$ за координатою y, у другій − внаслідок контакту жорсткого включення із середовищем. А з умови монотонності $w(-0, y)$ на відрізку, який з'єднує ці точки, повинно випливати, що $w(-0, y)$ є тотожно нульовим на цьому відрізку. Тому обидві компоненти напружень $\tau_{xz}(-0, y)$ і $\tau_{yz}(-0, y)$ також повинні бути нульовими на $[0, h]$. Отже, функція $\tau(\zeta)$ тотожно дорівнювала б нулеві в усій області $\mathcal{D}^{(1)}$ як рівна нулеві функція на деякому відрізку в області аналітичності. За наявності аналітичного розв'язку пружно-пластичної задачі з нього можна отримати пружний розв'язок граничним переходом до нескінченно великої границі текучості [12]. У такий спосіб із формули (6) також отримуємо $\lim\limits_{k\to\infty} \tau(t) \equiv 0$.

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. − Москва: Наука, 1977. − 640 с.
   Те саме: *Gakhov F. D.* Boundary value problems. − Oxford etc.: Pergamon Press, 1966. − xix+564 p.
2. *Кривень В. А.* Лінійна модель пластичної зони біля гострокінцевого концентратора напружень за поздовжнього зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. − 2004. − **40**, № 4. − С. 41−46.

Те саме: *Kryven' V. A.* Linear model of a plastic zone in the vicinity of a sharp notch under the conditions of longitudinal shear // Mater. Sci. – 2004. – **40**, No. 4. – P. 475–483. – https://doi.org/10.1007/s11003-005-0064-3.

3. *Кривень В. А.* Непрерывное и разрывные решения упругопластической задачи об антиплоской деформации тела с трещиной // Физ.-хим. механика материалов. – 1985. – **21**, № 6. – С. 10–16.
   Те саме: *Kryven' V. A.* Continuous and discontinuous solutions of the elastoplastic problem of antiplanar deformation of a crack-containing body // Mater. Sci. – 1986. – **21**, No. 6. – P. 514–520. – https://doi.org/10.1007/BF00722232.
4. *Кривень В. А.* Узагальнення представлень зони пластичності при антиплоскій деформації пружнопластичного тіла із гострокінцевим концентратором напружень // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1983. – № 2. – С. 31–34.
5. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 320 с.
6. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Ростун М. Й.* Пружно-пластичний граничний стан неоднорідних оболонок обертання з внутрішніми тріщинами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61,** № 4. – С. 56–65.
   Те саме: *Kushnir R. M., Nykolyshyn M. M., Rostun M. Yo.* Elastoplastic limit state of inhomogeneous shells of revolution with internal cracks // J. Math. Sci. – 2021. – **256**, No. 4. – P. 426–438.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-021-05436-w.
7. *Панасюк В. В., Саврук М. П.* Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – **28**, № 1. – С. 49–68.
   Те саме: *Panasyuk V. V., Savruk M. P.* Model for plasticity bands in elasto-plastic failure mechanics // Mater. Sci. – 1992. – **28**, No. 1. – P. 41–57.
   – https://doi.org/10.1007/BF00723631.
8. *Прагер В., Ходж Ф. Г.* Теория идеально пластических тел. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1956. – 400 с.
9. *Силованюк В. П., Юхим Р. Я., Горбач П. В.* Деформування та руйнування матеріалів в околі сфероїдальних включень // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 6. – С. 42–46.
   Те саме: *Sylovanyuk V. P., Yukhym R. Ya., Horbach P. V.* Deformation and fracture of materials near spheroidal inclusions // Mater. Sci. – 2011. – **46,** No. 6. – P. 757–762. – https://doi.org/10.1007/s11003-011-9349-x.
10. *Berto F., Lazzarin P., Kotousov A., Pook L. P.* Induced out-of-plane mode at the tip of blunt lateral notches and holes under in-plane shear loading // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. – 2012. – **35**, No. 6.– P. 538–555.
   – https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2011.01647.x.
11. *Cimbaro L., Sutton A. P., Balint D. S., Paxton A. T., Hardy M. C.* Embrittlement of an elasto-plastic medium by an inclusion // Int. J. Fract. – 2019. – **216**, No. 1. – P. 87–100. – https://doi.org/10.1007/s10704-019-00344-2.
12. *Kryven V. A., Sulym G. T., Yavorska M. I.* Plastic interfacial slip of periodic systems of rigid thin inclusions undergoing longitudinal shear // J. Theor. Appl. Mech. (Poland). – 2006. – **44**, No. 4. – P. 837–848.

ELASTIC-PLASTIC PROBLEM FOR A THIN ONE SIDED EXFOLIATED INCLUSION UNDER THE SHEAR LOADING

The development of plastic strains in a body with a thin inclusion which is in one-sided contact with an perfectly elastic-plastic medium under the shear loading are studied. The shape of the continual plastic zone by the solution of the elastic-plastic problem is found and the propagation of plastic layer along the inclusion – environment boundary is obtained. Continually distributed plastic strains occur less than 40% of the inclusion surface, and the model of localized plastic strains predicts complete exfoliation of the inclusion.

Keywords*: elastic-plastic problem, plastic zone, inclusion, conformal mapping, Keldysh – Sedov problem.*

Терноп. нац. техн. ун-т ім. І. Пулюя, Тернопіль

Одержано
04.11.20