

НЕКЛАСИЧНІ ЛІНІЙНІ ТЕОРІЇ КОНТИНУАЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

Наведено короткий огляд неklasичних лінійних теорій механіки суцільних середовищ. Стисло охарактеризовано нелокальну теорію пружності Ерінгена – Еделена, теорії полярних і мікрополярних середовищ, моментну теорію пружності Тупіна, мікроморфну теорію Ерінгена – Сухубі – Міндліна, градієнтну теорію пружності Міндліна, а також локально градієнтну теорію деформування пружних середовищ, що враховує локальне зміщення маси.

Ключові слова: лінійна пружність, неklasичні моделі, нелокальна пружність, градієнтного типу теорії, теорії з неklasичною кінематикою.

Вступ. Понад століття увага багатьох вчених спрямована на розвиток узагальнених (неklasичних) теорій механіки, що враховують вплив локальної структури матеріалу на його макровластивості та описують спостережувані ефекти і явища, які не обґрунтовує класична теорія. Йдеться, зокрема, про розмірні ефекти механічних характеристик матеріалу [28, 77, 78], приповерхневу неоднорідність фізико-механічних полів [41, 69, 111], високочастотну дисперсію пружних хвиль [13, 36] тощо. Вплив мікроструктури є вагомим у випадку поширення ультразвукових хвиль (пружних коливань, що характеризуються високими частотами та малими довжинами хвиль). Урахування такого впливу виявляє нового типу хвилі, які не описуються в рамках класичної теорії. Розроблення неklasичних математичних моделей стимулювали впровадження у сучасну техніку нових композитних і пористих матеріалів, потреба у керуванні структурою матеріалу, мініатюризація технічних пристроїв, розвиток нанотехнологій та ін. Побудова нових теорій механіки зумовлена потребою уникнути сингулярностей розв'язків у задачах з тріщинами, надрізами, дислокаціями тощо.

Метою статті є стислий огляд неklasичних (нелокальних і градієнтних) теорій континуальної механіки.

1. Короткий огляд стану проблеми. Некласична теорія пружності бере початок від робіт G. Piola [35, 42]. У 1909 році E. Cosserat та F. Cosserat запропонували теорію полярних середовищ (*polar continuum*) [40]. Через два десятиліття T. Jaramillo сформулював співвідношення градієнтної теорії пружних середовищ [68]. Наступний крок у розвитку неklasичних теорій пружності було зроблено у 60-х роках минулого століття, коли закладено основи полярної теорії Аеро – Кувшинського [2], теорії моментних напружень (*couple stress theory*) [90, 114], а також теорії пружних середовищ із мікроструктурою [46, 52, 86, 109] (відомої як мікроморфна теорія – *theory of micromorphic materials*). У працях [52, 109] розвинуто мікрополярну теорію (*micropolar theory*). У 1964 році A. Green та R. Rivlin репрезентували математичну модель мультиполярного континууму (*multipolar continuum*) [61]. У 1987 році Я. Бурак [4] запропонував континуально-термодинамічний підхід до побудови градієнтного типу математичних моделей механіки. Побудована на цій основі теорія отримала назву *локально градієнтної пружності* [6, 11, 20].

Розбудова узагальнених теорій середовищ із мікроструктурою значною мірою завдячує працям Ерінгена (A. Eringen), який разом зі співавторами розвинув лінійну [45] і нелінійну [71, 72] теорії мікрополярної пружності, мікроморфну теорію [46, 52, 109] та теорію пружних тіл з мікророзтягом (*microstretch continuum*) [49].

Практично водночас із побудовою нових неklasичних математичних моделей пружних континуумів опубліковано огляди різних напрямків роз-

✉ gryt045@gmail.com

виту неklasичних теорій пружності. Розділи у монографіях та оглядові статті за цією тематикою були опубліковані ще у 60–70-х роках минулого століття [23, 25, 47]. У роботах [18, 84, 101] висвітлено тенденції розвитку та перспективи застосування неklasичних теорій. А. Eringen [47, 49] виклав математичні основи та відстежив розвиток теорій мікрополярних пружних і термopружних континуумів, середовищ із мікророзтягом, а у співпраці з С. Kafadar [51] – навів загальний огляд мікроконтинуумних теорій. W. Nowacki [95] подав низку розв’язків задач мікрополярної пружності. Y. Chen зі співавторами [38] із позицій теорії ґратки і молекулярної динаміки проаналізували співвідношення нелокальної, мікроморфної, мікрополярної, полярної та моментної теорій. С. Саркисян [26, 27] та J. Altenbach зі співавторами [33] навели огляд моделей мікрополярних пружних тонких оболонок, пластин, балок і стрижнів. Е. Aifantis [29–31] подав стислий огляд розвинених ним та його співавторами нелокальних і градієнтних моделей пружності, дифузії та пластичності. Е. Aifantis трактує побудовані ним узагальнені теорії пружних континуумів як своєрідний компроміс між класичною теорією пружності, яка не описує належним чином механічний відгук наноструктур на зовнішню дію, та молекулярною динамікою, застосування якої вимагає значних обчислювальних ресурсів [30]. S. Forest [55] встановив зв’язки між кількома відомими градієнтного типу моделями термopружних і в’язкопластичних тіл, а у співпраці з С. Papenfuss [97] проаналізував вищого порядку теорії з внутрішніми змінними і додатковими ступенями свободи. М. Jirásek [70] сфокусував увагу на застосуванні сильно та слабо нелокальних теорій механіки, а також моделей середовищ із внутрішніми ступенями свободи для опису розмірних ефектів і дисперсії коротких пружних хвиль у гетерогенних середовищах. П. Белов та С. Лур’є [3, 19] навели порівняльний аналіз теорій Коссера [40], Джеремілло [68], Аеро-Кувшинського [2], Міндліна [86], Тупіна [114] і Белова – Лур’є [3]. Є. І. Єрофеев [13] застосував теорії середовищ із мікроструктурою (континуумів Леру, мікроморфного середовища Міндліна – Ерінгена, континууму та псевдоконтинууму Коссера) для вивчення закономірностей поширення пружних хвиль. С. Polizzotto [101] зосередився на співвідношеннях градієнтних моделей механіки, які додатково містять одну, дві, три та чотири сталі вищого порядку, а також навів графічну схему зв’язків між цими моделями для ізотропних матеріалів. Праці [42, 112] дають ретроспективу розвитку неklasичних моделей механіки, що враховують складну механічну поведінку матеріалів із мікроструктурою. Ряд авторів [28, 56, 59, 100] провели порівняльний аналіз різних варіантів теорій середовищ із мікроструктурою та продемонстрували їхню ефективність для дослідження механічної поведінки мікро- та нанооб’єктів. У праці [18] досліджено застосовність методів континуальної механіки для вивчення механічного відгуку наноструктур, а в [91] вказано на певні застереження щодо використання визначальних співвідношень нелокальної пружності для опису механічної поведінки таких об’єктів.

Інтенсивний розвиток мікроелектроніки стимулював побудову інтегрального та градієнтного типів математичних моделей пружних мікро- і нанорозмірних трубок, оболонок, плит, балок і стрижнів. Здобутки у цьому напрямку проаналізовано в [34, 43, 113, 116, 118, 119].

Окремий і надзвичайно важливий напрямок досліджень стосується визначення вищого порядку сталих матеріалу, пов’язаних із урахуванням нелокальних ефектів. В [75, 78, 85, 957, 111 та ін.] для визначення механічних характеристик середовищ (у тому числі характерної віддалі матеріалу – *material length scale parameter*) залучено експериментальні дані. У таких дослідженнях застосовують так званий «метод розмірного ефекту» (*method of size effects*). У цьому методі для оцінки вищого порядку сталих матеріалу використовують аналітичні розв’язки тестових крайових задач неklasичної пружності, які описують розмірні ефекти в малорозмірних структурах, та

відповідні експериментальні результати для цих структур. Низка робіт пропагує атомістичний підхід для обчислення сталих матеріалу градієнтної пружності [83, 95], а також ядер нелокальної континуальної пружності [110]. R. Mindlin [88, 89] для знаходження додаткових пружних модулів, пов'язаних із мікроструктурою матеріалу, застосував теорію ґраток. Огляд робіт, спрямованих на визначення вищого порядку сталих неklasичних теорій пружності з градієнтом деформації, наведено в [35, 76, 95].

Нижче стисло охарактеризовано неklasичні теорії континуальної механіки з наголосом на концептуальних роботах, які містять основи математичного опису цих теорій. Проаналізовано два напрямки розбудови неklasичних математичних моделей теорії пружності, а саме, моделі градієнтного та інтегрального типу.

2. Нелокальні теорії середовищ із функціональними конститутивними рівняннями просторового типу. Згідно з нелокальною теорією, напруження у фіксованій точці тіла залежать не лише від деформацій у цій точці, а й від реформацій у решті його точок. У рамках цієї теорії для опису ефектів далекодії прийнято подання для густини енергії деформації

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} \int_{(V)} \mathcal{K}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) e_{kl}(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \quad (1)$$

і функціональний зв'язок між спряженими параметрами стану [99]

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl} \int_{(V)} \mathcal{K}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) e_{kl}(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'). \quad (2)$$

Тут \mathbf{r} – радіус-вектор, $\hat{\mathbf{e}} = \{e_{ij}\}$ і $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\sigma_{ij}\}$ – тензори деформації і напружень, $\hat{\mathbf{C}}^{(4)} = \{C_{ijkl}\}$ – тензор четвертого рангу, компоненти якого є характеристиками матеріалу (модулі пружності), $\mathcal{K}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ – ядро релаксації (заникаюча функція впливу). Тут і далі жирні символи відповідатимуть векторним величинам, а жирні символи з шапочками зверху – тензорам другого і вищих рангів. Верхній індекс у дужках праворуч від символу вказує на ранг тензорної величини (використовуватимемо їх для позначення тензорів третього і вищих рангів).

Для певного класу ядер релаксації інтегральні визначальні співвідношення (2) можна подати в диференціальній формі [48]:

$$\left(1 - c \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right) \sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}. \quad (3)$$

Тут $c = (e_0 a)^2$ – нелокальний параметр, e_0 – стала матеріалу (її визначають лабораторними методами або з використанням підходів молекулярної динаміки), a – внутрішня характерна віддаль (*internal characteristic length*) – параметр ґратки, розмір зерна або молекули. Такі математичні моделі іноді називають узагальненими *моделями середовищ із градієнтами (лапласіаном) тензора напружень* [35].

H. Askès та E. Aifantis [35] розглянули загальніший зв'язок між тензорами напружень і деформації:

$$\left(1 - c_1 \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(1 - c_2 \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right) e_{kl}, \quad (4)$$

де c_1 і c_2 – градієнтні коефіцієнти. Визначальне співвідношення (4) дозволило уникнути сингулярностей на лініях дефектів і у вершинах тріщин.

Диференціальну форму (3) рівнянь стану нелокальної пружності отримано для безмежного середовища, що накладає певні обмеження на область їх застосовності. Зокрема, такі рівняння стану не можуть коректно описати нелокальні ефекти в усіх точках нанорозмірного тіла. Докладніше про це йдеться у статтях [53, 91]. E. Aifantis [29, 30, 35] неодноразово торкався

питання еквівалентності інтегральної форми визначальних співвідношень нелокальної теорії Ерінгена і диференціальних співвідношень (3), (4). Модель пружного середовища, що використовує рівняння стану (3), та її зв'язок із нелокальною теорією Ерінгена аналізували також С. Polizzotto [100], G. Romano і R. Barretta [105] та інші дослідники.

За теоріями, у яких закладено функціональний зв'язок між тензорами напружень і деформацій, закріпилася назва «нелокальних теорій інтегрального типу» (*nonlocal theories of integral type*), «нелокальних» (*nonlocal theories*) або «сильно нелокальних» (*strongly nonlocal theories*) теорій. Оскільки такі математичні моделі описують просторову дисперсію коротких хвиль, то їх ще іноді називають «нелокальними моделями середовищ із просторовою дисперсією» (*nonlocal media with space dispersion*).

Диференціальна форма визначальних співвідношень є значно зручнішою для розв'язування задач математичної фізики. З огляду на це, диференціальні співвідношення (3), (4) широко застосовують для дослідження механічного відгуку пружних тіл на статичне та динамічне навантаження. Нелокальні рівняння стану використали для дослідження механічної поведінки балок [43, 103, 105, 116], дротів [73], наноплит [81, 113], нанотрубок [117], сферичних оболонки [115] та багатьох інших об'єктів. Огляд досліджень статичної та динамічної поведінки нанобалок у рамках нелокальних теорій балок Ейлера – Бернуллі, Тимошенка, Редді, Левінсона та ін., наведено в [103, 119]. Статті [34, 37, 79] містять огляд сучасних досліджень з точки зору використання нелокальної пружності для вивчення графенових листів та карбонових нанотрубок. Такі структури широко використовують у практиці як елементи транзисторів, сенсорів, датчиків, наноконденсаторів та інших пристроїв, а також для проектування нових надміцних композитних наноматеріалів. J. Engelbrecht та M. Braun [44], а також M. Eltaher зі співавторами [43] навели огляд нелокальних теорій механіки з точки зору їх використання для дослідження хвильового руху.

С. Lim зі співавторами [80] запропонували модифіковану нелокальну теорію балок, яка ґрунтується на загальнішому у порівнянні з (1) поданні енергії деформації:

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} \int_{(V)} \mathcal{K}_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) e_{kl}(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') + \\ + \frac{\ell^2}{2} C_{ijkl} e_{ij,m} \int_{(V)} \mathcal{K}_1(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) e_{kl,m}(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'),$$

де ℓ та $\mathcal{K}_1(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ – характерна віддаль і додаткове ядро, введені для врахування впливу градієнта тензора деформації. Тут і далі індекс після коми означає операцію диференціювання за відповідною просторовою координатою. Визначальні співвідношення такої моделі та кінематичні гіпотези теорії балок Ейлера – Бернуллі і Тимошенка були застосовані для вивчення динамічної поведінки пружних нанобалок.

В Україні нелокальну теорію пружного континууму розвивали Я. Підстригач [22], Ю. Повстенко [102] та інші дослідники.

3. Теорії градієнтного типу.

3.1. Загальна характеристика. Теорії, у яких фазовий простір параметрів стану розширено градієнтами певних фізичних величин, називають «градієнтними» (*gradient-type theories*) або «слабо нелокальними» (*weakly nonlocal theories*) теоріями. Градієнтні теорії можна умовно поділити на дві підгрупи (див. схему 1). Для однієї з них властиве використання класичних кінематичних характеристик. У таких теоріях, як і в класичній пружності, єдиною кінематичною характеристикою є вектор переміщення $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Іноді такі теорії називають континуальними теоріями пружності вищого рангу (*higher-grade continuum theories*) [112], градієнтними теоріями матеріалів простої структури чи середовищами Леру [13, 17] або ж класифікують як

теорії, що враховують ефекти далекодії [38]. До градієнтних теорій із класичною кінематикою належать: моментна теорія Тупіна [114], теорія пружності Міндліна з градієнтами деформації [87], а також теорії Джеремілло [68], Аеро – Кувшинського [2] та інші. Теорія Міндліна [87] та Гріна – Рівліна [60] з градієнтами деформацій вищих порядків є найзагальнішою серед перелічених теорій. Як граничні випадки вона містить математичні моделі середовищ Тупіна, Аеро – Кувшинського і Джеремілло.

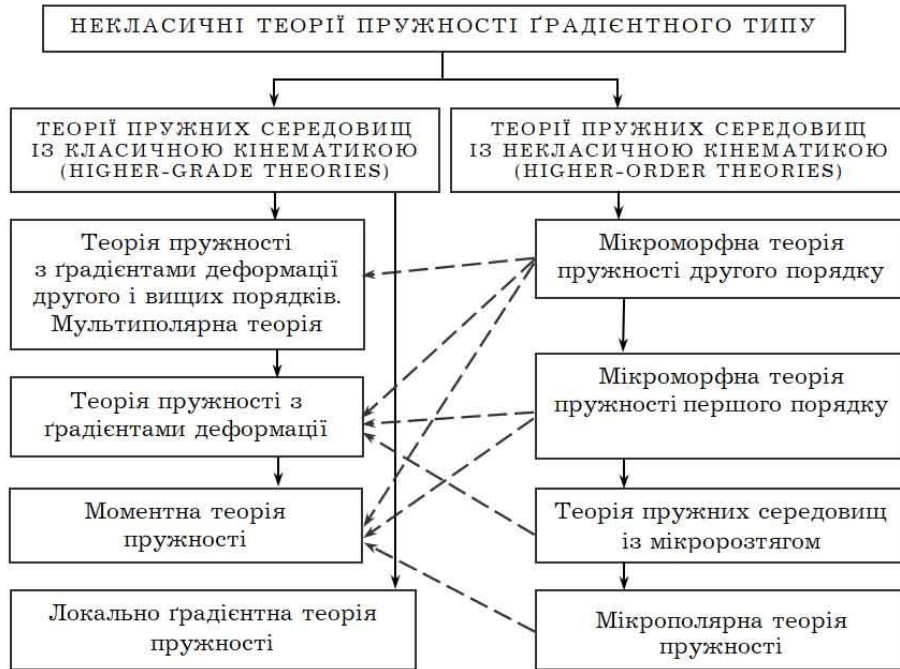


Схема 1. Зв'язки між узагальненими теоріями градієнтного типу.

До градієнтного типу теорій належить також локально градієнтна теорія пружності [4, 6, 11, 20]. Ця теорія ґрунтується на врахуванні у модельному описі взаємозв'язку процесів деформування та локального зміщення маси. При цьому локальне зміщення маси пов'язується з потоком маси \mathbf{J}_{ms} недифузійної і неконвективної природи, зумовленим змінами структури матеріалу фізично малого елемента тіла. Аналогом такого потоку в електропружності є поляризаційний струм.

Іншу підгрупу теорій укладають математичні моделі середовищ із додатковими ступенями вільності. Їх іноді називають континуальними теоріями пружності вищого порядку (*higher-order continuum theories*) [112], градієнтними теоріями матеріалів складної структури [17], середовищами з мікроструктурою [86] або середовищами з додатковими ступенями вільності [17]. У таких теоріях середовище моделюють сукупністю великої кількості репрезентативних елементів (макроелементів), кожен із яких характеризується скінченним розміром, структурою та орієнтацією. Макроелементи є системою взаємодіючих частинок (мікроелементів), які, у свою чергу, можуть деформуватися, повертатися відносно центра маси макроелемента і у підсумку впливати на макроскопічну поведінку тіла. Таким чином, у мікроморфних теоріях поряд із конвективним (трансляційним) рухом мікроелемента розглядають також обертальний рух і деформацію його мікрочастинок. Залежно від того, які форми руху мікроелемента враховують (трансляційні чи ротаційні), будують різні варіанти теорій середовищ із мікроструктурою. При цьому макроелемент розглядають як жорстке орієнтоване тіло (у полярних і мікрополярних теоріях) або тверде деформівне тіло (у мікроморфній теорії, теорії пружних середовищ із дислокаціями). Таку

підгрупу теорій формують: полярна та мікрополярна теорії [49], мікроморфна теорія [52, 86, 109], теорії середовищ із мікророзтягом [49], пружних середовищ із незмінною кількістю дислокацій [3], а також різноманітні модифікації згаданих теорій. Серед перелічених найзагальнішою є мікроморфна теорія, яка як часткові випадки містить полярну й мікрополярну теорії, математичні моделі середовищ із мікророзтягом та ін.

Розвиток статичних теорій градієнтної пружності був стимульований потребою вивчення розмірних і приповерхневих ефектів, а також необхідністю уникнення сингулярностей розв'язків у задачах з тріщинами, дислокаціями тощо. Опис динамічної поведінки пружних континуумів (зокрема, дисперсійних властивостей) за дії швидкозмінних навантажень вимагав побудови неklasичних теорій континуальної механіки, що враховують інерцію градієнтів деформації [86] (у рамках градієнтної теорії пружності) або ж кінетичну енергію локального зміщення маси чи необоротний складник градієнта модифікованого хімічного потенціалу [11, 14] (у рамках локально градієнтної пружності). Розв'язувальні системи рівнянь таких моделей містять доданки, пропорційні вищого порядку мішаним (часово-просторовим) похідним від ключових функцій [11, 14, 35, 120]. Згадані математичні моделі дозволили описати поширення у твердих тілах нових типів пружних хвиль. Огляд таких математичних моделей наведено в [35]. Нижче стисло охарактеризуємо градієнтні моделі механіки суцільних середовищ.

3.2. Середовища Коссера. Мікрополярна теорія. Теорія середовищ Коссера (*Cosserat continuum theory*, 1909) стала першим кроком у розбудові неklasичної теорії пружності [40]. Ця теорія розглядає репрезентативний елемент як тверде орієнтоване тіло. Тому її часто називають полярною теорією. І. Кунін [17] класифікував полярні та мікрополярні континууми як моделі суцільних середовищ зі слабкою нелокальністю пружних властивостей.

Кінематичні властивості середовища Коссера описують дві незалежні векторні величини: вектор переміщень $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ та вектор поворотів $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$. Ці вектори визначають несиметричні тензори деформації $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \{\gamma_{ij}\}$ і згинувкручення $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \{\alpha_{ij}\}$ [21]:

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} + \epsilon_{ijk}\omega_k, \quad \alpha_{ji} = \omega_{i,j}.$$

Тут ϵ_{ijk} – компоненти псевдотензора Леві – Чівіта, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(3)} = \{\epsilon_{ijk}\}$.

У полярних середовищах виникають не лише силові $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\sigma_{ij}\}$, а й моментні $\hat{\boldsymbol{m}} = \{m_{ij}\}$ напруження, які визначаються такими рівняннями стану:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}}, \quad m_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ij}}.$$

На відміну від класичної (симетричної) пружності, напружений стан середовища Коссера описується несиметричним тензором напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. Тому теорію Коссера також часто називають теорією несиметричної пружності [21]. Динамічну поведінку пружного середовища Коссера характеризують рівняння:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (5)$$

$$m_{ji,j} + \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} + M_i = J \ddot{\omega}_i. \quad (6)$$

Тут $\mathbf{F} = \{F_i\}$ і $\mathbf{M} = \{M_i\}$ – вектори об'ємних сил і моментів, J – міра інерції під час повороту (динамічна характеристика середовища).

Якщо для густини енергії деформації W ізотропного континууму прийняти білінійне розвинення

$$W(\gamma_{ij}, \alpha_{ij}) = \frac{1}{2} \lambda \gamma_{ii} \gamma_{jj} + \frac{1}{2} (\mu + \alpha) \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{1}{2} (\mu - \alpha) \gamma_{ij} \gamma_{ji} +$$

$$+ \frac{1}{2} \beta \alpha_{ii} \alpha_{jj} + \frac{1}{2} (\gamma + \varepsilon) \alpha_{ij} \alpha_{ij} + \frac{1}{2} (\gamma - \varepsilon) \alpha_{ij} \alpha_{ji},$$

то отримаємо такий явний вигляд рівнянь стану [21]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \gamma_{ij}^S + 2\alpha \gamma_{ij}^A + \lambda \gamma_{kk} \delta_{ij}, \quad m_{ij} = 2\gamma \alpha_{ij}^S + 2\varepsilon \alpha_{ij}^A + \beta \alpha_{kk} \delta_{ij}. \quad (7)$$

Тут верхні індекси «S» та «A» позначають симетричну та кососиметричну частини тензорів деформації $\hat{\gamma}$ та згину-кручення $\hat{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^S &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = e_{ij}, & \alpha_{ij}^S &= \frac{1}{2} (\omega_{i,j} + \omega_{j,i}), \\ \gamma_{ij}^A &= \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) - \epsilon_{ijk} \omega_k, & \alpha_{ij}^A &= \frac{1}{2} (\omega_{i,j} - \omega_{j,i}). \end{aligned}$$

Механічну поведінку ізотропного пружного матеріалу в межах полярної теорії описують шість модулів пружності, а саме: дві сталі Ляме λ, μ та чотири сталі матеріалу вищого порядку $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$.

Підставивши рівняння стану (7) у балансові рівняння (5) та (6), для визначення переміщень та поворотів отримаємо два векторні (шість скалярних) ключові диференціальні рівняння другого порядку

$$(\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mu + \alpha) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}},$$

$$(\beta + 2\gamma) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - (\gamma + \varepsilon) \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) + 2\alpha \nabla \times \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M} = J \ddot{\boldsymbol{\omega}}.$$

Тут ∇ – набла-оператор, « \times » та « \cdot » – відповідно векторний та скалярний добуток, а крапка над символом позначає похідну по часу.

Континуум Коссера став основою для математичного опису мікрополярних середовищ, у яких, поряд із трансляційним рухом, частинка наділена додатковими ступенями свободи – здатністю до жорстких поворотів [45]. Якщо мікроінерцію щодо поворотів вважати сталою величиною, то мікрополярна теорія зведеться до теорії середовищ Коссера [38].

Пружні характеристики полярних і мікрополярних континуумів визначали R. Lakes [75, 76], S. Hassanpour та G. Herpler [65], A. McFarland і J. Colton [85] та ін.

Співвідношення континууму Коссера та мікрополярної пружності розвинули на теорію пружних оболонок, пластин і стрижнів [1, 106], балок [85] та інших малорозмірних структур.

Y. Chen зі співавторами [38] з позицій молекулярної динаміки й теорії ґраток показали, що полярну теорію доцільно застосовувати для вивчення механічної поведінки матеріалів, які допускають суттєві зміни орієнтації мікроструктури (рідкі кристали та фероелектрики), а мікрополярну – для дослідження молекулярних кристалів, гранульованих матеріалів і деяких видів композитів.

3.3. Псевдоконтинуум Коссера (1960). Спрощеним варіантом континууму Коссера є псевдоконтинуум Коссера (*Cosserat pseudocontinuum theory*). У цій теорії вектори повороту й переміщення пов'язані формулою: $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}/2$. Згадану теорію іноді називають теорією Коссера з «обмеженими поворотами» або моментною теорією. У цьому варіанті моментної теорії пружності є лише одна незалежна кінематична характеристика – вектор переміщення \mathbf{u} , який визначає такі міри деформації:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{klj} u_{l,ki}.$$

Кількість сталих для ізотропного пружного тіла у межах цієї теорії скорочується з шести до чотирьох. При цьому вектор переміщення задовольняє векторне диференціальне рівняння четвертого порядку. За відсутності масових сил це рівняння має вигляд [21]

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{4} (\gamma + \varepsilon) \nabla \times (\nabla \times \Delta \mathbf{u}) - \frac{I}{4} \nabla \times (\nabla \times \ddot{\mathbf{u}}) = \rho \ddot{\mathbf{u}}.$$

Тут λ , μ , γ , ε – сталі матеріалу, які характеризують пружні властивості псевдоконтинууму Коссера, I – стала матеріалу, яка характеризує інерційні властивості макрооб'єму, Δ – оператор Лапласа.

Теорія Коссера з обмеженими поворотами належить до вищого рангу теорій пружності. Порівняно з класичною пружністю, вона додатково враховує моментні напруження і оперує несиметричним тензором напружень. Зважаючи на відносну простоту, ця теорія достатньо добре розвинена і доволі часто використовується у прикладних дослідженнях.

Докладний аналіз системи рівнянь континууму та псевдоконтинууму Коссера можна знайти у монографіях В. Новацького [21] і Г. Савіна [23], а також у роботах Е. Аеро і Е. Кувшинського [2, 16], Р. Mindlin і Н. Tiersten [90], Р. Toupin [114], Г. Савіна зі співавторами [24], А. Hadjesfandiari і G. Dargush [63] та ін.

3.4. Мікроморфна теорія Міндліна – Ерінгена – Сухубі (1964). Мікрополярна теорія розглядає структурні елементи макрооб'єму як тверді тіла і враховує лише жорсткі повороти цих елементів щодо центра маси макрооб'єму. Загальнішою є мікроморфна теорія, кінематика якої описується не лише векторною, а й тензорними величинами. Така теорія враховує усі компоненти тензора вільної дисторсії, а не лише його кососиметричну частину (вільні повороти), як теорія Коссера.

Основи мікроморфної теорії запропоновано у працях А. Eringen, Е. Suhubi та Р. Mindlin [52, 86, 109]. Мікроморфна теорія трактує тіло як неперервну сукупність великої кількості деформівних частинок, кожна з яких характеризується скінченним розміром та внутрішньою структурою. Деформівні частинки (макроелементи) складаються зі структурних елементів – мікроелементів. Рух макроелемента є результатом його конвективного перенесення, повороту навколо центра маси та деформування. Наслідком деформування мікроморфного континууму є макродеформації (*macrostrains*) та мікроскопічні внутрішні деформації (*microscopic internal strains*).

Наведемо нижче основні співвідношення мікроморфної теорії першого порядку. Кінематичну поведінку точок такого середовища описують векторним полем переміщень \mathbf{u} та тензором другого рангу $\hat{\chi} = \{\chi_{ij}\}$, компоненти якого характеризують мікродеформації. У рамках цієї теорії кожна точка тривимірного середовища має дванадцять ступенів вільності.

Мікроморфне середовище першого порядку характеризують такими силовими факторами: «класичним» тензором напружень $\hat{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$, тензором подвійних напружень $\hat{\tau}^{(3)} = \{\tau_{ijk}\}$ (*double stress*), а також тензором відносних напружень $\hat{s} = \{s_{ij}\}$ (*relative stress tensor*). У стаціонарному випадку за відсутності масових сил ці напруження справджують балансові співвідношення [39]:

$$\sigma_{ij,j} + s_{ij,j} = 0, \quad s_{ij} + \tau_{ijk,k} = 0. \quad (8)$$

Густина енергії деформації є функцією $W = W(e_{ij}, \gamma_{ij}, \mathbf{x}_{ijk})$, де тензори $\hat{e} = \{e_{ij}\}$, $\hat{\gamma} = \{\gamma_{ij}\}$ та $\hat{\mathbf{x}}^{(3)} = \{\mathbf{x}_{ijk}\}$ визначені формулами

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\chi_{ij} + \chi_{ji}), \quad \gamma_{ij} = u_{j,i} - \chi_{ji}, \quad \mathbf{x}_{ijk} = \chi_{ij,k},$$

\hat{e} – тензор макродеформацій, який характеризує відносні зміщення центрів мас макрооб'ємів (він збігається з тензором деформації Гріна у класичній теорії пружності), тензор $\hat{\mathbf{x}}^{(3)} = \nabla \otimes \hat{\chi}$ введено для опису градієнтів мікродеформацій, « \otimes » – знак діадного добутку, $\hat{\gamma}$ – відносна деформація

(міра відмінності макродеформації \hat{e} від мікродеформації $\hat{\chi}$). Тензори $\hat{\alpha}^{(3)}$ та $\hat{\gamma}$ є новими мірами деформації, які відсутні в класичній теорії.

Відповідні рівняння стану мають вигляд

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}, \quad s_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}}, \quad \tau_{ijk} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ijk}}. \quad (9)$$

Тензори звичайних $\hat{\sigma}$ [Н/м²], відносних \hat{s} [Н/м²] та подвійних $\hat{\tau}^{(3)}$ [Н/м] напружень володіють такими самими властивостями симетрії, як і пов'язані з ними тензори деформацій \hat{e} , $\hat{\gamma}$ та $\hat{\alpha}^{(3)}$.

У рамках лінійної теорії густину енергії деформації подають такою білінійною формою:

$$W(e_{ij}, \gamma_{ij}, \alpha_{ijk}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + \frac{1}{2} B_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} A_{ijklmn} \kappa_{ijk} \kappa_{lmn} + \\ + G_{ijkl} e_{ij} \gamma_{kl} + F_{ijklm} e_{ij} \alpha_{klm} + D_{ijklm} \gamma_{ij} \alpha_{klm}. \quad (10)$$

Тут C_{ijkl} , B_{ijkl} , A_{ijklmn} , G_{ijkl} , F_{ijklm} та D_{ijklm} – характеристики матеріалу. Механічну поведінку анізотропного середовища характеризують 903 модулі. Для ізотропних матеріалів лінійна теорія передбачає 18 сталих матеріалу. Для такого континууму білінійна форма (10) набуває вигляду

$$W = \frac{1}{2} \lambda e_{ii} e_{jj} + \mu e_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2} b_1 \gamma_{ii} \gamma_{jj} + \frac{1}{2} b_2 \gamma_{ij} \gamma_{ij} + g_1 \gamma_{ii} e_{jj} + \\ + g_2 (\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) e_{ij} + a_1 \alpha_{iik} \alpha_{kjj} + a_2 \alpha_{iik} \alpha_{jjk} + \\ + \frac{1}{2} a_3 \alpha_{iik} \alpha_{jjk} + \frac{1}{2} a_4 \alpha_{ijj} \alpha_{ikk} + a_5 \alpha_{ijj} \alpha_{kik} + \\ + \frac{1}{2} a_8 \alpha_{iji} \alpha_{kjk} + \frac{1}{2} a_{10} \alpha_{ijk} \alpha_{ijk} + a_{11} \alpha_{ijk} \alpha_{jki} + \\ + \frac{1}{2} a_{13} \alpha_{ijk} \alpha_{ikj} + \frac{1}{2} a_{14} \alpha_{ijk} \alpha_{jik} + \frac{1}{2} a_{15} \alpha_{ijk} \alpha_{kji}. \quad (11)$$

Тут λ і μ – сталі Ляме, b_i , a_i і g_i – шістнадцять вищого порядку сталих матеріалу.

Якщо подання (10) (чи (11) у випадку ізотропного середовища) підставити у визначальні співвідношення (9), то отримаємо явний вигляд рівнянь стану. Для забезпечення однозначності розв'язків відповідних крайових задач математичної фізики, балансові рівняння (8) та визначальні співвідношення (9) доповнюють крайовими умовами, які задають на поверхні тіла вектор $\tau^a = \{\tau_i^a\}$ або тензор другого рангу $\hat{\tau}^a = \{\tau_{ij}^a\}$ [39]:

$$(\sigma_{ij} + s_{ij}) n_j = \tau_i^a, \quad \tau_{ijk} n_k = \tau_{ij}^a.$$

Базові положення мікроморфної і мікрополярної теорій, а також теорії середовища з мікророзтягом докладно подано у монографії [50], де також відстежено зв'язки між цими теоріями.

Розглянувши певні типи внутрішнього руху, з мікроморфної теорії можна отримати різні варіанти градієнтного типу неklasичних моделей механіки [50, 58]. Якщо не враховувати зміну мікроструктури фізично малого елемента тіла, то з мікроморфної теорії отримаємо мікрополярну теорію. Мікрополярний континуум враховує лише жорсткі повороти структурних елементів. Якщо рух репрезентативних елементів описувати мікроповоротами і мікророзтягом (враховувати деформації стискування-розтягання), то прийдемо до теорії середовища із мікророзтягом (*microstretch continuum*). Вона розглядає міри деформації $e_{ij} = u_{j,i} + \epsilon_{jik} \omega_k$, $\alpha_{ij} = \omega_{i,j}$, $\gamma_k = \phi_{,k}$, $e = \phi$, де ϕ – мікророзтяг, а ω_i – мікроповороти. Якщо прийняти, що частинки деформуються так само, як увесь континуум, то з мікроморф-

ної теорії отримуємо градієнтну теорію пружності Міндліна. Якщо частинки здійснюють обертовий рух, який збігається з обертливим рухом усього континууму, то одержимо моментну теорію пружності. Якщо частинки звести до точок, наділених масою, то усі теорії середовищ із мікроструктурою зведуться до класичної теорії пружності.

Мікроморфну теорію доцільно застосовувати для вивчення ковалентних, молекулярних та іонних кристалів [38]. Недоліком цієї теорії є велика кількість пружних сталей, для визначення яких відсутня експериментальна програма. Це безумовно обмежує використання цієї теорії у практиці.

3.5. Градієнтні теорії пружності (stress-gradient theories). У градієнтній теорії пружності зміни мікроструктури матеріалу асоціюються з градієнтами деформації.

Наявність великої кількості варіантів градієнтного типу теорій пружності пояснюється принциповою можливістю включення у подання для густини енергії деформації складників трьох типів, а саме, доданків, пропорційних до:

$$(1) \text{ градієнтів другого порядку вектора переміщень, } \hat{\eta}^{(3)} = \{\eta_{ijk}\}$$

$$(\text{градієнт мікродисторсії}), \eta_{ijk} = u_{k,ij};$$

$$(2) \text{ градієнтів першого порядку тензора макродеформації, } \hat{e} = \{e_{ij}\},$$

$$\gamma_{ijk} = e_{kj,i} = (u_{k,ji} + u_{j,ki})/2 = (\eta_{ijk} + \eta_{kij})/2, \quad e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2;$$

$$(3) \text{ градієнтів поворотів } \alpha_{ij} = \epsilon_{ilk} u_{k,lj}/2 \text{ та симетричного тензора}$$

$$\text{другого градієнта вектора переміщень: } \eta_{ijk}^S = (u_{k,ij} + u_{i,jk} + u_{j,ki})/3.$$

Зазначимо, що тензор деформації $\hat{e} = \{e_{ij}\}$ має шість незалежних компонент, тоді як тензор $\hat{\eta}^{(3)} = \{\eta_{ijk}\}$ є симетричним тензором за першими двома індексами і має вісімнадцять незалежних компонент. Урахування білінійних комбінацій таких складових у розвиненні густини енергії дозволило побудувати різного типу теорії пружних середовищ із мікроструктурою.

3.5.1. Теорія пружного континууму з першим градієнтом деформації. У 1962 році R. Toupin [114] та R. Mindlin і H. Tiersten [90] сформулювали систему співвідношень градієнтної пружності, що враховує залежність густини енергії деформації від градієнта деформації. Ця теорія відома як моментна теорія пружності. У 1964 році R. Mindlin [86] запропонував математично складнішу лінійну теорію пружного континууму з мікроструктурою. На відміну від моментної теорії, математична модель середовища з мікроструктурою включає симетричну частину градієнта деформації. З огляду на це, згадана теорія містить більше (порівняно з моментною пружністю) сталей матеріалу. Зокрема, пружна поведінка центральносиметричних та ізотропних матеріалів характеризується двома сталими Ляме і п'ятьма додатковими сталими матеріалу (сумарно – сім констант) [86]. При цьому для густини енергії деформації R. Mindlin використав таке подання:

$$W(e_{ij}, \gamma_{ijk}) = \frac{1}{2} \lambda e_{ii} e_{jj} + \mu e_{ij} e_{ij} + g_1 \gamma_{iik} \gamma_{kjj} + g_2 \gamma_{ijj} \gamma_{ikk} + \\ + g_3 \gamma_{iik} \gamma_{jjk} + g_4 \gamma_{ijk} \gamma_{ijk} + g_5 \gamma_{ijk} \gamma_{kji}, \quad (12)$$

де $g_i, i = 1, 2, \dots, 5$, – додаткові сталі матеріалу, пов'язані з урахуванням градієнтів деформації. Рівняннями стану в рамках цієї теорії є:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}, \quad \tau_{ijk} = \tau_{jik} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ijk}}.$$

Тут $\tau^{(3)} = \{\tau_{ijk}\}$ – тензор подвійних напружень. Поряд із формулою (12) R. Mindlin розглядав іншу форму подання енергії деформації, а саме:

$$W(e_{ij}, \eta_{ijk}) = \frac{1}{2} \lambda e_{ii} e_{jj} + \mu e_{ij} e_{ij} + a_1 \eta_{iik} \eta_{kjj} + a_2 \eta_{ijj} \eta_{ikk} + \\ + a_3 \eta_{iik} \eta_{jjk} + a_4 \eta_{ijk} \eta_{ijk} + a_5 \eta_{ijk} \eta_{kji}.$$

У такій математичній моделі «класичні» і подвійні напруження визначаються співвідношеннями

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}, \quad \tau_{ijk} = \tau_{jik} = \frac{\partial W}{\partial \eta_{ijk}}$$

і задовольняють рівняння рівноваги

$$\sigma_{ji,j} - \tau_{kji,kj} + F_i = 0.$$

Градентна теорія пружності була взята за основу багатьма дослідниками, які запропонували спрощені або навпаки, узагальнені варіанти цієї теорії. Нижче наведемо деякі з них.

D. Lam зі співавторами [77] звели кількість додаткових пружних сталей до трьох. Вони розглядали таке розвинення для потенціалу W :

$$W(e_{ij}, e_{mm,i}, \eta_{ijk}^{SD}, \alpha_{ij}^S) = \frac{1}{2} \lambda e_{ii} e_{jj} + \mu e_{ij} e_{ij} + \\ + \mu \ell_0^2 e_{mm,i} e_{nn,i} + \mu \ell_1^2 \eta_{ijk}^{SD} \eta_{ijk}^{SD} + \mu \ell_2^2 \alpha_{ij}^S \alpha_{ij}^S, \quad (13)$$

де ℓ_0 , ℓ_1 , ℓ_2 – характерні віддалі, пов'язані відповідно з градієнтом дилатації, девіаторним складником градієнта деформацій розтягу і симетричним складником градієнта поворотів:

$$\eta_{ijk}^{SD} = \eta_{ijk}^S - (\delta_{ij} \eta_{\ell\ell k}^S + \delta_{jk} \eta_{\ell\ell i}^S + \delta_{ik} \eta_{\ell\ell j}^S),$$

$$\alpha_{ij}^S = (\alpha_{ij} + \alpha_{ji})/2 = (\epsilon_{ip\ell} e_{\ell j, p} + \epsilon_{j p\ell} e_{\ell i, \ell})/2.$$

Таку теорію часто називають *модифікованою теорією градієнтної пружності*. Вона розглядає такі силові чинники:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{\ell\ell} \delta_{ij}, \quad \gamma_i = \frac{\partial W}{\partial e_{nn,i}} = 2\mu \ell_0^2 e_{nn,i},$$

$$\tau_{ijk}^{SD} = \frac{\partial W}{\partial \eta_{ijk}^{SD}} = 2\mu \ell_1^2 \eta_{ijk}^{SD}, \quad m_{ij}^S = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ij}^S} = 2\mu \ell_2^2 \alpha_{ij}^S.$$

Тут σ_{ij} – компоненти тензора напружень Коші, γ_i – градієнт тиску, τ_{ijk}^{SD} – компоненти тензора подвійних напружень, m_{ij}^S – симетрична складова моментних напружень.

А. Гусев і С. Лур'є [62] побудували ще більш спрощений варіант градієнтної теорії пружності, яка для ізотропних матеріалів містить два класичні пружні модулі і дві сталі матеріалу вищого порядку (загалом – чотири константи). У теорії Гусева – Лур'є компоненти тензора подвійних напружень визначаються формулою

$$\tau_{ijk} = a_1 \gamma_{ijk}^{SH} + a_2 \gamma_{ijk}^S,$$

де γ_{ijk}^S та γ_{ijk}^{SH} – симетрична частина та кульовий складник тензора $\tilde{\gamma}^{(3)}$,

$$\gamma_{ijk}^S = (\gamma_{ijk} + \gamma_{jki} + \gamma_{kij})/3 = \eta_{ijk}^S, \quad \gamma_{ijk}^{SH} = (\gamma_{i\ell\ell}^S \delta_{jk} + \gamma_{j\ell\ell}^S \delta_{ki} + \gamma_{k\ell\ell}^S \delta_{ij})/5.$$

С. Текоğlu й Р. Онск [112] врахували у розкладі для густини енергії деформації доданки, пропорційні до дивергенції градієнта деформації $\tilde{\eta}_i = (u_{j,i} + u_{i,j})/2 = e_{ij,j}$. Для анізотропних матеріалів вони використали білінійну форму

$$W(e_{ij}, \tilde{\eta}_i) = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + B_{ijk} e_{ij} \tilde{\eta}_k + D_{ij} \tilde{\eta}_i \tilde{\eta}_j.$$

Для центральносиметричних матеріалів компоненти псевдотензора B_{ijk} дорівнюють нулеві, а рівняння стану мають вигляд

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = C_{ijkl} e_{kl}, \quad \tau_i = \frac{\partial W}{\partial \tilde{\eta}_i} = D_{ij} \tilde{\eta}_j.$$

Тут τ_i – вектор напружень, який є спряженим параметром до дивергенції градієнта деформації. Для ізотропних матеріалів $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl}$, а $D_{ij} = a \delta_{ij}$, де a – додаткова стала матеріалу, пов'язана з дивергенцією градієнта деформації. Автори назвали цю теорію узагальненою теорією пружності з дивергенцією деформації (*strain divergence theory*). У рамках цієї теорії введені вище тензор і вектор напружень підпорядковані такому рівнянню рівноваги:

$$\sigma_{ij,i} - \frac{1}{2} (\tau_{i,ji} + \tau_{j,ii}) + F_i = 0.$$

В. Altan та Е. Aifantis [32] запропонували інше подання для енергії деформації

$$W(e_{ij}, e_{ij,k}) = \frac{1}{2} \lambda e_{ii} e_{jj} + \mu e_{ij} e_{ij} + \ell^2 \left(\frac{1}{2} \lambda e_{ii,k} e_{jj,k} + \mu e_{ij,k} e_{ij,k} \right),$$

де ℓ – характерна віддаль мікроструктури матеріалу. Тоді компоненти тензора подвійних напружень $\tau^{(3)}$ визначаються співвідношеннями

$$\tau_{ijk} = \tau_{jik} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij,k}} = \ell^2 (2\mu e_{ij,k} + \lambda e_{\ell\ell,k} \delta_{ij}) = \ell^2 \sigma_{ij,k},$$

а рівняння рівноваги для ізотропних та анізотропних матеріалів є:

$$\lambda u_{j,ij} + 2\mu u_{i,jj} - \ell^2 (\lambda u_{j,ijmm} + 2\mu u_{i,jjmm}) + F_i = 0,$$

$$C_{ijkl} (u_{k,j\ell} - \ell^2 u_{k,j\ell mm}) + F_i = 0.$$

Варіаційне формулювання такого спрощеного варіанта градієнтної пружності (з трьома сталими матеріалу, дві з яких є сталі Ляме і одна – характерна віддаль матеріалу) запропонували Х.-Л. Gao та S. Park [57].

Кососиметрична частина тензора подвійних напружень є тензором моментних напружень. У рамках сформульованої у 1962 році моментної теорії пружності [90, 114] визначальні співвідношення для ізотропних матеріалів містять дві додаткові сталі, які характеризують мікроструктуру матеріалу (разом зі сталими Ляме – чотири константи). Дещо пізніше були запропоновані модифіковані варіанти моментної теорії пружності, які містили більшу або меншу кількість сталих матеріалу. Зокрема, у 1993 році N. Fleck та J. Hutchinson [54] сформулювали співвідношення модифікованої моментної теорії, яка характеризує ізотропний континуум ще трьома додатковими сталими матеріалу, пов'язаними з урахуванням градієнтів повороту та розтягу (разом п'ять констант). У 2002 році F. Yang зі співавторами [122] запропонували спрощений варіант моментної пружності, яка сумарно містить лише три сталі матеріалу (два пружні модулі і одну характерну віддаль). У цій теорії, поряд із рівнянням балансу механічного імпульсу та моменту імпульсу, сформульовано також додаткове балансове рівняння, якому підпорядковуються напруження вищого порядку. Рівняння цієї моделі можна отримати, якщо у формулі (13) прийняти $\ell_0 = 0$ і $\ell_1 = 0$. З огляду на невелику кількість сталих матеріалу, таку теорію доволі широко застосовували у практиці [82, 98].

А. Abazari зі співавторами [28] запропонували узагальнену теорію моментних напружень, в основу якої закладено постулат про відмінність механічних властивостей матеріалу у приповерхневих областях тіла. Таку

теорію автори застосували для обґрунтування розмірного ефекту модуля Юнга.

Взаємозв'язок між теоріями, які ґрунтуються на різних поданнях густини енергії деформації, аналізували у працях [35, 59, 93, 101, 112] та інших. Моментні теорії докладно розглянуто у роботах [63, 64].

Теорії моментної і градієнтної пружності, а також їх модифіковані варіанти застосовують для дослідження напружено-деформованого стану навколо тріщин [108], порожнин [112] тощо. Їх поширено на математичні моделі пружних плит [96, 104], балок [77, 93] та інші малорозмірні структури. Ґрунтовний аналіз градієнтних моделей балок і плит можна знайти в працях [35, 113].

Аналізуючи згин нанобалок, M. Shokrieh та I. Zibaei [107] вказали на переваги градієнтної пружності над теорією балок із функціональними визначальними співвідношеннями.

У рамках градієнтних теорій прогин пружних балок і плит визначається з рівняння шостого порядку, тоді як класичні теорії ґрунтуються на рівнянні четвертого порядку. У мікро-/нанобалках, товщина яких сумірна з характерною віддаллю матеріалу, градієнтні моделі передбачають збільшення частоти власних коливань і зменшення (порівняно з класичною теорією) прогину балок під дією зосередженої сили чи розподіленого навантаження [74]. Таке зміцнення матеріалу добре узгоджується з результатами експериментальних вимірювань, однак не обґрунтовується класичною теорією.

Теорія пружності з першим градієнтом деформації описує експериментально спостережувану високочастотну дисперсію пружних механічних поздовжніх хвиль, однак передбачає невірний знак кривини дисперсійної кривої [87, 89]. Для усунення цього недоліку були запропоновані математичні моделі пружних середовищ, які враховують залежність внутрішньої енергії від градієнтів деформації другого і вищих порядків.

3.5.2. Теорія мультиполярних континуумів Гріна – Рівліна (1964). Градієнтна теорія пружності Міндіна (1965). У 1964 році A. Green та R. Rivlin [60, 61] розробили основи дуже загальної математичної моделі пружного континууму, яка включає градієнти деформації довільного порядку. Кількість фізичних сталих у ній визначається порядком теорії. Така теорія отримала назву теорії мультиполярних континуумів. Ця теорія розглядає такі міри деформації:

$$e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad \gamma_{ijk} = e_{kj,i}, \quad \gamma_{ijkl} = e_{kj,il}, \quad \gamma_{ijklm} = e_{kj,ilm}.$$

Роком пізніше, R. Mindlin [87] запропонував простішу лінійну теорію, що враховує залежність густини енергії від тензора деформації, а також другого і третього градієнтів вектора переміщень: $W = W(e_{ij}, \eta_{ijk}, \eta_{ijkl})$. Тут $\eta_{ijkl} = u_{l,ijk}$, $\hat{\eta}^{(4)} = \{\eta_{ijkl}\}$. Щоб отримати лінійні визначальні співвідношення, R. Mindlin подав енергію деформації у вигляді полінома другого порядку з усіма можливими комбінаціями квадратичних доданків із компонент тензора деформації, другого і третього градієнтів вектора переміщень. За такого опису він отримав рівняння стану

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}, \quad \tau_{ijk} = \frac{\partial W}{\partial \eta_{ijk}}, \quad \tau_{ijkl} = \frac{\partial W}{\partial \eta_{ijkl}},$$

де $\hat{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ – класичний тензор макронапружень розмірності Н/м²; $\hat{\tau}^{(3)} = \{\tau_{pqr}\}$ – тензор подвійних напружень розмірності Н/м; $\hat{\tau}^{(4)} = \{\tau_{pqrs}\}$ – тензор четвертого рангу розмірності Н, який отримав назву тензора потрійних напружень.

Тензори класичних, подвійних і потрійних напружень підпорядковані одному диференціальному рівнянню рівноваги вищого порядку

$$\sigma_{ij,j} - \tau_{ijk,jk} + \tau_{ijkl,jkl} + F_i = 0.$$

До цього рівняння долучаються також крайові умови, які визначають поверхневі значення проекції на нормаль до поверхні тіла вектора переміщення та його першої й другої похідних (на поверхні задано векторні величини, на відміну від мікроморфної теорії, де на поверхні, окрім вектора переміщення, задаються тензорні величини – додаткові ступені вільності) [39].

R. Mindlin проаналізував зв'язок системи рівнянь градієнтної пружності з результатами теорії ґраток [87, 89] і, ґрунтуючись на лінійних співвідношеннях, отримав формули для поверхневого натягу у рідинах, а також поверхневої енергії деформації, необхідної для поділу пружного твердого тіла вздовж деякої поверхні на дві частини [87]. Він показав, що теорія з другим градієнтом деформації коректно описує приповерхневу неоднорідність механічних полів і дисперсію пружної поздовжньої хвилі в області високих частот.

Ефективність використання теорій, що враховують градієнти тензора деформації другого, четвертого, шостого і восьмого порядків, проаналізовано у праці [121] на прикладі пружного нанострижня.

3.6. Градієнтна теорія пружних середовищ із урахуванням локального зміщення маси. Цей напрямок був започаткований Я. Бураком [4] і розвинений у працях [5–7, 14, 20, 92 та ін.]. Запропонована у 1987 році математична модель термопружного континууму ґрунтувалася на врахуванні у рівнянні балансу маси потоку маси $\mathbf{J}_{ms} = -\partial \mathbf{\Pi}_m / \partial t$ недифузійної і неконвективної природи. Цей потік маси Я. Бурак пов'язав зі зміною структури матеріалу фізично малого елемента тіла [4]. Вектор $\mathbf{\Pi}_m = \{\Pi_i^m\}$ (розмірності густини масового дипольного моменту, кг·м/м³) отримав назву вектора локального зміщення маси. Врахування потоку маси \mathbf{J}_{ms} за припущення, що він спричиняє потік енергії $\mu \partial \mathbf{\Pi}_m / \partial t$, де μ – хімічний потенціал речовини, дозволило побудувати градієнтного типу теорію фізико-механічних процесів у твердих пружних і термопружних тілах, названу локально градієнтною [4, 10]. У такій теорії фазовий простір параметрів стану додатково розширено однією парою спряжених параметрів: градієнтом хімічного потенціалу $\nabla \mu$ та вектором локального зміщення маси [10]:

$$\Pi_i^m = \frac{\partial W}{\partial \mu_{,i}}.$$

Перелік робіт, реалізованих у межах такого підходу, наведено в [10].

У працях [6, 7, 14] континуально-термодинамічний підхід до побудови локально градієнтних моделей механіки суцільного середовища набув подальшого розвитку. У цих роботах для опису процесу локального зміщення маси введено ще дві об'єктивні фізичні величини, а саме: густину наведеної маси $\rho_{m\pi} = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_m$ та потенціал μ_π , який введено як міру впливу локального зміщення маси на внутрішню енергію системи. Аналогом густини наведеної маси в електропружності є густина наведеного електричного заряду. Для цих фізичних величин одержано балансове рівняння [11]:

$$\frac{\partial \rho_{m\pi}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{ms} = 0. \quad (14)$$

За такого модельного опису напружений стан тіла визначає модифікований тензор напружень $\hat{\sigma}_* = \{\sigma_{ij}^*\}$, який пов'язаний із тензором напружень Коші $\hat{\sigma}$ співвідношенням $\hat{\sigma}_* = \hat{\sigma} - (\rho_{m\pi} \mu'_\pi - \mathbf{\Pi}_m \cdot \nabla \mu'_\pi) \hat{\mathbf{I}}$. Тут $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$ – модифікований хімічний потенціал. У такій математичній моделі у простір параметрів стану, поряд із тензорами напружень $\hat{\sigma}_*$ і де-

формації \hat{e} , введено дві додаткові пари спряжених параметрів стану, пов'язаних із урахуванням локального зміщення маси. Модифікований хімічний потенціал μ'_π і питома густина наведеної маси ρ_m складають одну пару параметрів, іншу пару формують питомих вектор локального зміщення маси $\pi_m = \{\pi_{mi}\}$ і градієнт модифікованого хімічного потенціалу $\nabla\mu'_\pi = \{\mu'_{\pi,i}\}$. Рівняннями стану цієї моделі є [11]:

$$\sigma_{ij}^* = \rho \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}, \quad \mu'_\pi = \frac{\partial W}{\partial \rho_m}, \quad \pi_i^m = \frac{\partial W}{\partial \mu'_{\pi,i}},$$

де ρ – густина маси, $\pi_m = \Pi_m/\rho$, $\rho_m = \rho_{m\pi}/\rho$, $\pi_m = \{\pi_i^m\}$, \hat{e} – тензор деформації Гріна. Для лінійного наближення функцію W репрезентує така білінійна форма

$$W(e_{ij}, \rho_m, \mu'_{\pi,i}) = \mu'_{\pi 0} \rho_m + \frac{\lambda}{2\rho_0} e_{ii} e_{jj} + \frac{\mu}{\rho_0} I_2 + \frac{d_\rho}{2} \rho_m^2 - \\ - \frac{\alpha_\rho}{\rho_0} \left(\frac{\lambda}{3} + \frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \right) e_{ii} \rho_m - \frac{\chi_m}{2} (\mu'_{\pi,i})^2.$$

Тут λ , μ – сталі Ляме, d_ρ , α_ρ , χ_m – пружні сталі вищого порядку, $\mu'_{\pi 0}$ – значення модифікованого хімічного потенціалу μ'_π у безмежному середовищі.

Балансові рівняння моделі охоплюють рівняння балансу наведеної маси (11) та баланс механічного імпульсу

$$\nabla \cdot \hat{\sigma}_* + \mathbf{F} + \rho \mathbf{F}'_* = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (15)$$

Рівняння (15) поряд із масовою силою \mathbf{F} містить додаткову нелінійну масову силу $\mathbf{F}'_* = \rho_m \nabla \mu'_\pi - \pi_m \cdot \nabla \otimes \nabla \mu'_\pi$, спричинену зміною мікроструктури матеріалу (локальним зміщенням маси).

Ключова система рівнянь локально градієнтної пружності включає одне векторне диференціальне рівняння другого порядку для вектора переміщення (рівняння руху) і одне скалярне диференціальне рівняння другого порядку для модифікованого хімічного потенціалу [11]. Якщо у математичній моделі такого середовища не враховувати необоротність та інерцію локального зміщення маси, то отримаємо динамічно незв'язану ключову систему рівнянь локально градієнтної пружності. Така теорія дозволила пояснити низку явищ, які не охоплює класична теорія пружності, зокрема, описати приповерхневу неоднорідність напружено деформованого стану твердих тіл [12], дисперсію коротких механічних хвиль [12], розмірний ефект модулів пружності [66, 92], поширення SH хвиль в однорідному ізотропному півпросторі [9], виникнення розклинювального тиску у тонких твердих плівках [12], зміцнення тонких пружних нанобалок [67] та інші ефекти.

Співвідношення локально градієнтної теорії використано для визначення поверхневого натягу та поверхневої енергії деформації у твердих пружних тілах [8, 12]. Врахування необоротності локального зміщення маси дозволило описати перехідні режими формування приповерхневої неоднорідності полів у твердих тілах із плоскими межами [15], що не було зроблено в рамках інших теорій.

Зв'язок локально градієнтної пружності з іншими неklasичними теоріями пружних континуумів відстежено у низці робіт. Із рівнянь стану для тензора напружень $\hat{\sigma}_*$ можна виключити параметри, пов'язані з локальним зміщенням маси [11]. У підсумку отримуємо більш загальний зв'язок між тензорами $\hat{\sigma}_*$ та \mathbf{e}

$$(1 - \ell_*^2 \Delta) \boldsymbol{\sigma} = 2\mu(1 - \ell_*^2 \Delta) \mathbf{e} + \lambda(1 - \ell_{1*}^2 \Delta) \mathbf{eI},$$

аніж передбачає теорія Айфантіса (див. рівняння стану (4)). Тут ℓ_* – характерна віддаль матеріалу, $\ell_{1*}^2 = \ell_*^2 \mathfrak{M} / (1 + \mathfrak{M})$, де \mathfrak{M} – параметр взаємозв'язку процесів деформування та локального зміщення маси [11].

У роботі [11] на прикладі безмежного середовища показано, що врахування у модельному описі локального зміщення маси в певному сенсі еквівалентне також використанню інтегральних визначальних співвідношень просторового типу з експоненціальними ядрами релаксації.

Роботу виконано за фінансової підтримки Slovak Science and Technology Assistance Agency (проект номер SK-CN-RD-18-0005) та Національної академії наук України (проект номер 0117U004156).

1. Амбарцумян С. А. Микрополярная теория оболочек и пластин. – Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. – 214 с.
2. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. – 1960. – 2, № 7. – С. 1399–1409.
3. Белов П. А., Лурье С. А. Континуальная модель микрогетерогенных сред // Прикл. математика и механика. – 2009. – 73, вып. 5. – С. 833–848.
Te same: Belov P. A., Lurie S. A. A continuum model of microheterogeneous media // J. Appl. Math. Mech. – 2009. – 73, No. 5. – P. 599–608.
– <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.11.013>.
4. Бурак Я. Й., Чапля С. Я., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р. Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 45–49.
5. Бурак Я. Й., Нагірний Т. С. Теоретичні основи розрахунку локально-градієнтних термомеханічних систем з врахуванням поверхневих явищ // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1993. – 29, № 4. – С. 24–30.
Te same: Burak Ya. I., Nagirniy T. S. Theoretical principles for computing local-gradient thermomechanical systems with allowance for subsurface phenomena // Mater. Sci. – 1994. – 29, No. 4. – P. 349–354.
– <https://doi.org/10.1007/BF00566442>.
6. Бурак Я. Й. Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1987. – № 12. – С. 19–23.
7. Грицина О. До опису впливу локального зміщення маси на зсувні напруження // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 16. – С. 61–75.
8. Грицина О. Визначення поверхневої енергії твердих тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2013. – Вип. 17. – С. 43–54.
9. Грицина О. Р. Вплив приповерхневої неоднорідності на поширення SH хвиль в ізотропних матеріалах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2017. – 53, № 2. – С. 128–134.
Te same: Hrytsyna O. R. Influence of subsurface inhomogeneity on the propagation of SH waves in isotropic materials // Mater. Sci. – 2017. – 53, No. 2. – P. 273–281. – <https://doi.org/10.1007/s11003-017-0072-0>.
10. Грицина О., Нагірний Т., Червінка К. Локально-градієнтний підхід у термомеханіці // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2006. – Вип. 3. – С. 72–83.
11. Грицина О., Кондрат В. Термомеханіка конденсованих систем за врахування локального зміщення маси: I. Основи теорії. – Львів: Растр-7, 2017. – 208 с.
12. Грицина О., Кондрат В. Термомеханіка конденсованих систем за врахування локального зміщення маси: II. Прикладні дослідження. – Львів: Растр-7, 2019. – 144 с.
13. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 328 с.
14. Кондрат В. Ф., Грицина О. Р. Співвідношення градієнтної термомеханіки за врахування необоротності та інерційності локального зміщення маси // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 1. – С. 91–100.
Te same: Kondrat V. F., Hrytsyna O. R. Relations of gradient thermomechanics taking into account the irreversibility and inertia of local mass displacement // J. Math. Sci. – 2012. – 183, No. 1. – P. 100–111.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0800-9>.

15. Кондрат В., Нагірний Т., Грицина О. Утворення та взаємовплив приповерхневих неоднорідностей у пружному шарі за врахування необоротності локального зміщення маси // *Машинознавство*. – 2008. – № 3 (129). – С. 31–36.
16. Кувшинский Е. В., Аэро Э. Л. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет «внутреннего» вращения // *Физика твердого тела*. – 1963. – 5, № 9. – С. 2591–2598.
17. Кунин И. А. Теория упругих тел с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 416 с.
18. Лисина С. А., Потанов А. И. Обобщенные модели сплошной среды в наномеханике // *Докл. РАН*. – 2008. – 420, № 3. – С. 328–330.
19. Лурье С. А., Белов П. А. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро – Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием» // *Сб. трудов конф. «Современные проблемы механики гетерогенных сред»*. – Ин-т прикл. мех. РАН. 2005. – С. 235–267.
20. Нагірний Т., Червінка К. Термодинамічні моделі та методи термомеханіки із врахуванням приповерхневої та структурної неоднорідностей. *Основи наномеханіки I*. – Львів: Сполом, 2012. – 264 с.
21. Новацкий В. Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
22. Подстригач Я. С. Об одной нелокальной теории деформирования твердых тел // *Прикл. механика*. – 1967. – 3, № 2. – С. 71–76.
Te same: Podstrigach Ya. S. On a nonlocal theory of solid body deformation // *Sov. Appl. Mech.* – 1967. – 3, No. 2. – P. 44–46.
– <https://doi.org/10.1007/BF00885584>.
23. Савин Г. Н. Основы плоской задачи моментной теории упругости. – Киев: Изд-во КГУ, 1965. – 162 с.
24. Савин Г. Н., Лукашов А. А., Лыско Е. М., Веремеенко С. В., Агасъев Г. Г. Распространение упругих волн в континууме Коссера со стесненным вращением частиц // *Прикл. механика*. – 1970. – 6, № 6. – С. 37–41.
Te same: Savin G. N., Lukashov A. A., Lysko E. M., Veremeenko S. V., Agas'ev G. G. Elastic wave propagation in a cosserat continuum with constrained particle rotation // *Sov. Appl. Mech.* – 1970. – 6, No. 6. – P. 599–602.
– <https://doi.org/10.1007/BF00888458>.
25. Савин Г. Н., Немши Ю. Н. Исследование по концентрации напряжений в моментной теории упругости (обзор) // *Прикл. механика*. – 1968. – 4, № 12. – С. 1–17.
Te same: Savin G. N., Nemish Y. N. Investigations into stress concentration in the moment theory of elasticity (a survey) // *Sov. Appl. Mech.* – 1968. – 4, No. 12. – P. 1–15. – <https://doi.org/10.1007/BF00886725>.
26. Саркисян С. О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек // *Изв. НАН Армении. Механика*. – 2005. – 58, № 2. – С. 84–95.
27. Саркисян С. О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин // *Изв. НАН Армении. Механика*. – 2011. – 64, №1. – С. 58–67.
28. Abazari A. M., Safavi S. M., Rezazadeh G., Villanueva L. G. Modelling the size effects on the mechanical properties of micro/nano structures // *Sensors*. – 2015. – 15, No. 11. – P. 28543–28562. – <https://doi.org/10.3390/s151128543>.
29. Aifantis E. C. Update on a class of gradient theories // *Mech. Mater.* – 2003. – 35, No. 3–6. – P. 259–280. – [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(02\)00278-8](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(02)00278-8).
30. Aifantis E. C. Exploring the applicability of gradient elasticity to certain micro/nano reliability problems // *Microsyst. Technol.* – 2009. – 15, No. 1. – P. 109–115.
– <https://doi.org/10.1007/s00542-008-0699-8>.
31. Aifantis E. C. A concise review of gradient models in mechanics and physics // *Front. Phys.* – 2020. – 7. – Art. 239 (8 p).
– <https://doi.org/10.3389/fphy.2019.00239>.
32. Altan B. S., Aifantis E. C. On some aspects in the special theory of gradient elasticity // *J. Mech. Behav. Mater.* – 1997. – 8, No. 3. – P. 231–282.
– <https://doi.org/10.1515/JMBM.1997.8.3.231>.
33. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography // *Arch. Appl. Mech.* – 2010. – 80, No 1. – P. 73–92. – <https://doi.org/10.1007/s00419-009-0365-3>.
34. Arash B., Wang Q. A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes // *Comput. Mater. Sci.* – 2012. – 51, No. 1. – P. 303–313. – <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2011.07.040>.

35. *Askes H., Aifantis E. C.* Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // *Int. J. Solids Struct.* – 2011. – **48**, No. 13. – P. 1962–1990.
– <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006>.
36. *Axe J. D., Harada J., Shirane G.* Anomalous acoustic dispersion in centrosymmetric crystals with soft optic phonons // *Phys. Rev. B.* – 1970. – **1**, No. 3. – P. 1227–1234. – <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.1.1227>.
37. *Behera L., Chakraverty S.* Recent researches on nonlocal elasticity theory in the vibration of carbon nanotubes using beam models: A review // *Arch. Comput. Meth. Eng.* – 2017. – **24**, No. 3. – P. 481–494.
– <https://doi.org/10.1007/s11831-016-9179-y>.
38. *Chen Y., Lee J. D., Eskandarian A.* Atomistic viewpoint of the applicability of microcontinuum theories // *Int. J. Solids Struct.* – 2004. – **41**, No. 8. – P. 2085–2097.
– <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.11.030>.
39. *Cordero N.* A strain gradient approach to the mechanics of micro and nanocrystals. – *Materials. École Nationale Supérieure des Mines de Paris.* – 2011. – 194 p.
40. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformable. – Paris: Hermann et Fils, 1909. – 242 p.
41. *Cuenot S., Fréty C., Demoustier-Champagne S., Nysten B.* Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy // *Phys. Rev. B.* – 2004. – **69**, No. 16. – Article. 165410 (5 p).
– <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.165410>.
42. *Dell'Isola F., Corte A. D., Giorgio I.* Higher-gradient continua: The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives // *Math. Mech. Solids.* – 2017. – **22**, No. 4. – P. 852–872.
– <https://doi.org/10.1177/1081286515616034>.
43. *Eltaher M. A., Khater M. E., Emam S. A.* A review on nonlocal elastic models for bending, buckling, vibrations, and wave propagation of nanoscale beams // *Appl. Math. Model.* – 2016. – **40**, No. 5-6. – P. 4109–4128.
– <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.11.026>.
44. *Engelbrecht J., Braun M.* Nonlinear waves in nonlocal media // *Appl. Mech. Rev.* – 1998. – **51**, No. 8. – P. 475–488. – <https://doi.org/10.1115/1.3099016>.
45. *Eringen A. C.* Linear theory of micropolar elasticity // *Indiana J. Math. Mech.* – 1966. – **15**, No. 6. – P. 909–923. – <https://doi.org/10.1512/iumj.1966.15.15060>.
46. *Eringen A. C.* Mechanics of micromorphic continua // In: E. Kröner (ed.) *Mechanics of Generalized Continua.* – Berlin: Springer-Verlag, 1968. – P. 18–35.
– https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6_2.
47. *Eringen A. C.* Theory of micropolar elasticity // In: *Fracture, An Advanced Treatise. Vol. II: Mathematical Fundamentals* / Liebowitz H. (ed.) – New York: Academic Press, 1968. – xvi+759 p. – (Chap. 7. – P. 621–729).
48. *Eringen A. C.* On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves // *J. Appl. Phys.* – 1983. – **54**, No. 9. – P. 4703–4710.
– <https://doi.org/10.1063/1.332803>.
49. *Eringen A. C.* *Microcontinuum field theories. 1. Foundation and solids.* – New York: Springer-Verlag, 1999. – 325 p.
50. *Eringen A. C.* *Nonlocal continuum field theories.* – New York: Springer-Verlag, 2002. – 376 p.
51. *Eringen A. C., Kafadar C. B.* Polar field theories // In: *Continuum physics. Vol. IV: Polar and nonlocal field theories* / A. C. Eringen (ed.). – New York: Academic Press, 1976. – 274 p. – (Chap. 1. – P. 1–73).
– <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-240804-5.50007-5>.
52. *Eringen A. C., Suhubi E. S.* Nonlinear theory of simple microelastic solids – I // *Int. J. Eng. Sci.* – 1964. – **2**, No. 2. – P. 189–203.
– [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(64\)90004-7](https://doi.org/10.1016/0020-7225(64)90004-7).
53. *Fernández-Sáez J., Zaera R., Loya J. A., Reddy J. N.* Bending of Euler – Bernoulli beams using Eringen's integral formulation: A paradox resolved // *Int. J. Engng. Sci.* – 2016. – **99**. – P. 107–116. – <https://doi.org/10.1016/j.jijengsci.2015.10.013>.
54. *Fleck N. A., Hutchinson J. W.* A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1993. – **41**, No. 12. – P. 1825–1857.
– [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90072-N](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90072-N).
55. *Forest S.* Micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity, and damage // *J. Eng. Mech.* – 2009. – **135**, No. 3. – P. 117–131.
– [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2009\)135:3\(117\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2009)135:3(117)).

56. *Forest S., Cordero N. M., Busso E. P.* First vs. second gradient of strain theory for capillarity effects in an elastic fluid at small length scales // *Comput. Mater. Sci.* – 2011. – **50**, No. 4. – P. 1299–1304.
– <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2010.03.048>.
57. *Gao X.-L., Park S. K.* Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem // *Int. J. Solids Struct.* – 2007. – **44**, No. 22-23. – P. 7486–7499.
– <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.04.022>.
58. *Germain P.* The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2. Microstructure // *SIAM J. Appl. Math.* – 1973. – **25**, No 3. – P. 556–575.
– <https://doi.org/10.1137/0125053>.
59. *Ghiba I.-D., Neff P., Madeo A., Münch I.* A variant of the linear isotropic indeterminate couple-stress model with symmetric local force-stress, symmetric nonlocal force-stress, symmetric couple-stresses and orthogonal boundary conditions // *Math. Mech. Solids.* – 2017. – **22**, No 6. – P. 1221–1266.
60. *Green A. E., Rivlin R. S.* Simple force and stress multipoles // *Arch. Ration. Mech. Analysis.* – 1964. – **16**, No. 5. – P. 325–353. – <https://doi.org/10.1007/BF00281725>.
61. *Green A. E., Rivlin R. S.* Multipolar continuum mechanics // *Arch. Ration. Mech. Analysis.* – 1964. – **17**, No. 2. – P. 113–147. – <https://doi.org/10.1007/BF00253051>.
62. *Gusev A. A., Lurie S. A.* Symmetry conditions in strain gradient elasticity // *Math. Mech. Solids.* – 2017. – **22**, No. 4. – P. 683–691.
– <https://doi.org/10.1177/1081286515606960>.
63. *Hadjesfandiari A. R., Dargush G. F.* Couple stress theory for solids // *Int. J. Solids Struct.* – 2011. – **48**, No 18. – P. 2496–2510.
– <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.05.002>.
64. *Hadjesfandiari A. R., Dargush G. F.* Evolution of generalized couple-stress continuum theories: a critical analysis. – 2015. – Preprint arXiv: 1501.03112.
65. *Hassanpour S., Heppler G. R.* Micropolar elasticity theory: A survey of linear isotropic equations, representative notations, and experimental investigations // *Math. Mech. Solids.* – 2017. – **22**, No 2. – P. 224–242.
– <https://doi.org/10.1177/1081286515581183>.
66. *Hrytsyna O. R.* Applications of the local gradient elasticity to the description of the size effect of shear modulus // *SN Appl. Sci.* – 2020. – **2**, No. 8. – Art. 1453 (9 p).
– <https://doi.org/10.1007/s42452-020-03217-9>.
67. *Hrytsyna O.* A Bernoulli – Euler beam model based on local gradient theory of elasticity // *J. Mech. Mater. Struct.* – 2020. – **15**, No 4. – P. 471–487.
– <https://doi.org/10.2140/jomms.2020.15.471>.
68. *Jaramillo T. J.* A generalization of the energy function of elasticity theory. Dissertation. – University of Chicago, 1929.
69. *Jing G. Y., Duan H. L., Sun X. M., Zhang Z. S., Xu J., Li Y. D., Wang J. X., Yu D. P.* Surface effects on elastic properties of silver nanowires: Contact atomic-force microscopy // *Phys. Rev. B.* – 2006. – **73**, No. 23. – Art. 235409.
– <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.73.235409>.
70. *Jirásek M.* Nonlocal theories in continuum mechanics // *Acta Polytechnica.* – 2004. – **44**, No. 5-6. – P. 16-34. – <https://doi.org/10.14311/610>.
71. *Kafadar C. B., Eringen A. C.* Micropolar media-I: The classical theory // *Int. J. Engng. Sci.* – 1971. – **9**, No. 3. – P. 271–305.
– [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(71\)90040-1](https://doi.org/10.1016/0020-7225(71)90040-1).
72. *Kafadar C. B., Eringen A. C.* Micropolar media-II: The relativistic theory // *Int. J. Engng. Sci.* – 1971. – **9**, No. 3. – P. 307–329.
– [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(71\)90041-3](https://doi.org/10.1016/0020-7225(71)90041-3).
73. *Kiani K.* Free longitudinal vibration of tapered nanowires in the context of non-local continuum theory via a perturbation technique // *Physica E.* – 2010. – **43**, No 1. – P. 387–397. – <https://doi.org/10.1016/j.physe.2010.08.022>.
74. *Kong S., Zhou S., Nie Z., Wang K.* Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory // *Int. J. Engng. Sci.* – 2009. – **47**, No. 4. – P. 487–498. – <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2008.08.008>.
75. *Lakes R.* Cosserat micromechanics of structured media experimental methods // In: *Proc. of the American Society for Composites. Third technical conf. "Integrated composites technology"*, September 25–29, Seattle, Washington, 1988. – P. 505–516.

76. *Lakes R.* Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // In: Continuum models for materials with micro-structure / H. Mühlhaus (ed.). – New York: Wiley, 1995. – P. 1–22.
77. *Lam D. C. C., Yang F., Chong A. C. M., Wang J., Tong P.* Experiments and theory in strain gradient elasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2003. – **51**, No. 8. – P. 1477–1508. – [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00053-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00053-X).
78. *Liebold C., Müller W. H.* Applications of strain gradient theories to the size effect in submicro-structures incl. experimental analysis of elastic material parameters // *Bulletin of TICMI.* – 2015. – **19**, No. 1. – P. 45–55.
79. *Liew K. M., Zhang Yang, Zhang L. W.* Nonlocal elasticity theory for graphene modeling and simulation: prospects and challenges // *J. Model. Mech. Mater.* – 2017. – **1**, No. 1. – Art. 20160159. – 9 p. – <https://doi.org/10.1515/jmmm-2016-0159>.
80. *Lim C. W., Zhang G., Reddy J. N.* A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2015. – **78**. – P. 298–313. – <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2015.02.001>.
81. *Lu P., Zhang P. Q., Lee H. P., Wang C. M., Reddy J. N.* Non-local elastic plate theories // *Proc. R. Soc. A.* – 2007. – **463**, No. 2088. – P. 3225–3240. – <https://doi.org/10.1098/rspa.2007.1903>.
82. *Ma H. M., Gao X.-L., Reddy J. N.* A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2008. – **56**, No. 12. – P. 3379–3391. – <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.09.007>.
83. *Maranganti R., Sharma P.* A novel atomistic approach to determine strain gradient elasticity constants: tabulation and comparison for various metals, semiconductors, silica, polymers and the (ir)relevance for nanotechnologies // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2007. – **55**, No. 9. – P. 1823–1852. – <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2007.02.011>.
84. *Maugin G. A.* Generalized continuum mechanics: What do we mean by that? // In: G. Maugin, A. Metrikine (eds). *Mechanics of Generalized Continua. Advances in Mechanics and Mathematics.* – Springer, 2010. – Vol. 21. – P. 3–13. – https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5695-8_1.
85. *McFarland A. W., Colton J. S.* Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors // *J. Micromech. Microeng.* – 2005. – **15**, No. 5. – P. 1060–1067. – <https://doi.org/10.1088/0960-1317/15/5/024>.
86. *Mindlin R. D.* Micro-structure in linear elasticity // *Arch. Ration. Mech. Anal.* – 1964. – **16**, No 1. – P. 51–78. – <https://doi.org/10.1007/BF00248490>.
87. *Mindlin R. D.* Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // *Int. J. Solids Struct.* – 1965. – **1**, No. 4. – P. 417–438. – [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(65\)90006-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(65)90006-5).
88. *Mindlin R. D.* Theories of elastic continua and crystal lattice theories // In: *Mechanics of Generalized Continua. Proc of IUTAM Symposia (Stuttgart, 1967)* / E. Kröner (ed.). – Berlin: Springer-Verlag, 1968. – P. 312–320. – https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6_38.
89. *Mindlin R. D.* Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics // *J. Elasticity.* – 1972. – **2**, No. 4. – P. 217–282. – <https://doi.org/10.1007/BF00045712>.
90. *Mindlin R. D., Tiersten H. F.* Effects of couple-stresses in linear elasticity // *Arch. Ration. Mech. Anal.* – 1962. – **11**, No. 1. – P. 415–448. – <https://doi.org/10.1007/BF00253946>.
91. *Naderi A., Saidi A. R.* Common nonlocal elastic constitutive relation and material-behavior modeling of nanostructures // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part N: Journal of Nanomaterials, Nanoengineering and Nanosystems.* – 2017. – **231**, No 2. – P. 83–87. – <https://doi.org/10.1177/2397791417712870>.
92. *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Mathematical modeling of structural and near-surface non-homogeneities in thermoelastic thin films // *Int. J. Engng. Sci.* – 2015. – **91**. – P. 49–62. – <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.02.001>.
93. *Niiranen J., Balabanov V., Kiendl J., Hosseini S. B.* Variational formulations, model comparisons and numerical methods for Euler – Bernoulli micro- and nano-beam models // *Math. Mech. Solids.* – 2019. – **24**, No 1. – P. 312–335. – <https://doi.org/10.1177/1081286517739669>.
94. *Nowacki W.* *Theory of micropolar elasticity.* – Wien: Springer-Verlag, 1970. – 286 p.
95. *Ojaghnezhad F., Shodja H. M.* A combined first principles and analytical determination of the modulus of cohesion, surface energy, and the additional constants

- in the second strain gradient elasticity // *Int. J. Solids Struct.* – 2013. – **50**, No. 24. – P. 3967–3974. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.08.004>.
96. *Papargyri-Beskou S., Beskos D. E.* Static, stability and dynamic analysis of gradient elastic flexural Kirchhoff plates // *Arch. Appl. Mech.* – 2008. – **78**, No. 8. – P. 625–635. – <https://doi.org/10.1007/s00419-007-0166-5>.
 97. *Papenfuss C., Forest S.* Thermodynamical frameworks for higher grade material theories with internal variables or additional degrees of freedom // *J. Non-Equilib. Thermodyn.* – 2006. – **31**, No. 4. – P. 319–353. – <https://doi.org/10.1515/jnetdy.2006.014>.
 98. *Park S. K., Gao X.-L.* Bernoulli – Euler beam model based on a modified couple stress theory // *J. Micromech. Microeng.* – 2006 – **16**, No. 11. – P. 2355–2359. – <https://doi.org/10.1088/0960-1317/16/11/015>.
 99. *Polizzotto C.* Nonlocal elasticity and related variational principles // *Int. J. Solids Struct.* – 2001. – **38**, No. 42–43. – P. 7359–7380. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00039-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00039-7).
 100. *Polizzotto C.* A unifying variational framework for stress gradient and strain gradient elasticity theories // *Eur. J. Mech. A-Solids.* – 2015. – **49**. – P. 430–440. – <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.08.013>.
 101. *Polizzotto C.* A hierarchy of simplified constitutive models within isotropic strain gradient elasticity // *Eur. J. Mech. A-Solids.* – 2017. – **61**. – P. 92–109. – <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.09.006>.
 102. *Povstenko Yu. Z.* Straight disclinations in nonlocal elasticity // *Int. J. Engng. Sci.* – 1995. – **33**, No. 4. – P. 575–582. – [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)00070-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)00070-0).
 103. *Reddy J. N.* Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams // *Int. J. Engng. Sci.* – 2007. – **45**, No. 2–8. – P. 288–307. – <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.04.004>.
 104. *Repka M., Sladek V., Sladek J.* Gradient elasticity theory enrichment of plate bending theories // *Compos. Struct.* – 2018. – **202**. – P. 447–457. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.02.065>.
 105. *Romano G., Barretta R.* Nonlocal elasticity in nanobeams: the stress-driven integral model // *Int. J. Engng. Sci.* – 2017. – **115**. – P. 14–27. – <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.03.002>.
 106. *Rubin M. B.* Cosserat theories: shells, rods and points. – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000. – xv+488 p. – Ser. Solid mechanics and its applications / G. M. L. Gladwell (ed.) – Vol. 79. – <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9379-3>.
 107. *Shokrieh M. M., Zibaei I.* Determination of the appropriate gradient elasticity theory for bending analysis of nano-beams by considering boundary conditions effect // *Lat. Am. J. Solids Struct.* – 2015. – **12**, No. 12. – P. 2208–2230. – <https://doi.org/10.1590/1679-78251589>.
 108. *Sladek J., Sladek V., Repka M., Schmauder S.* Gradient theory for crack problems in quasicrystals // *Eur. J. Mech. A-Solids.* – **77**. – Art. 103813. – <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103813>.
 109. *Suhubi E. S., Eringen A. C.* Nonlinear theory of simple microelastic solids – II // *Int. J. Engng. Sci.* – 1964. – **2**, No. 4. – P. 389–404. – [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(64\)90017-5](https://doi.org/10.1016/0020-7225(64)90017-5).
 110. *Sundararaghavan V., Waas A.* Non-local continuum modeling of carbon nanotubes: Physical interpretation of non-local kernels using atomistic simulations // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2011. – **59**, No. 6. – P. 1191–1203. – <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2011.03.009>.
 111. *Tang C., Alici G.* Evaluation of length-scale effects for mechanical behaviour of micro- and nanocantilevers: I. Experimental determination of length-scale factors // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2011. – **44**, No. 33. – Art. 335501. – <https://doi.org/10.1088/0022-3727/44/33/335501>.
 112. *Tekoğlu C., Onck P. R.* Size effects in two-dimensional Voronoi foams: A comparison between generalized continua and discrete models // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2008. – **56**, No. 12. – P. 3541–3564. – <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.06.007>.
 113. *Thai H.-T., Vo T. P., Nguyen T.-K., Kim S.-E.* A review of continuum mechanics models for size-dependent analysis of beams and plates // *Composite Structures.* – 2017. – **177**. – P. 196–219. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.06.040>.
 114. *Toupin R. A.* Elastic materials with couple-stresses // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1962. – **11**, No. 1. – P. 385–414. – <https://doi.org/10.1007/BF00253945>.

115. Vila J., Zaera R., Fernández-Sáez J. Axisymmetric free vibration of closed thin spherical nanoshells with bending effects // J. Vibr. Control. – 2016. – **22**, No. 18. – P. 3789–3806. – <https://doi.org/10.1177/1077546314565808>.
116. Wang Q., Liew K. M. Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro- and nano-structures // Phys. Lett. A. – 2007. – **363**, No. 3. – P. 236–242. – <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.10.093>.
117. Wang Q., Wang C. M. The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes // Nanotechnology. – 2007. – **18**, No. 7. – Art. 075702. – <https://doi.org/10.1088/0957-4484/18/7/075702>.
118. Wang K. F., Wang B. L., Kitamura T. A review on the application of modified continuum models in modeling and simulation of nanostructures // Acta Mech. Sinica. – 2016. – **32**, No. 1. – P. 83–100. – <https://doi.org/10.1007/s10409-015-0508-4>.
119. Wu C.-P., Yu J.-J. A review of mechanical analyses of rectangular nanobeams and single-, double-, and multi-walled carbon nanotubes using Eringen's nonlocal elasticity theory // Arch. Appl. Mech. – 2019. – **89**, No. 9. – P. 1761–1792. – <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01542-z>.
120. Yaghoubi S. T., Balobanov V., Mousavi S. M., Niiranen J. Variational formulations and isogeometric analysis for the dynamics of anisotropic gradient-elastic Euler – Bernoulli and shear-deformable beams // Eur. J. Mech. A-Solids. – 2018. – **69**. – P. 113–123. – <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.11.012>.
121. Yakaiah B., Srihari Rao A. Higher order nonlocal strain gradient approach for wave characteristics of carbon nanorod // Nonlin. Analysis Model. Control. – 2014. – **19**, No. 4. – P. 660–668. – <https://doi.org/10.15388/NA.2014.4.10>.
122. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity // Int. J. Solids Struct. – 2002. – **39**, No. 10. – P. 2731–2743. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X).

NONCLASSICAL LINEAR THEORIES OF CONTINUUM MECHANICS

A survey of the nonclassical linear theories of continuum mechanics is presented. A brief discussion addresses the nonlocal Eringen – Edelen theory of elasticity, the theories of polar and micropolar continua, the Tupin's theory of elasticity with couple-stresses, the Eringen – Suhubi – Mindlin theory of micromorphic materials, Mindlin's strain-gradient theory, as well as the local gradient theory of deformation of elastic medium, accounting for the local displacement of mass.

Key words: *linear elasticity, nonclassical theories, nonlocal elasticity, gradient-type theories, higher-order theories.*

Інститут будівництва та архітектури
Словацької академії наук, Братислава;
Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
22.10.19