УДК 539.3

В. П. Ревенко[✉]

РОЗВ’ЯЗКИ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОРТОТРОПНИХ ТІЛ

Розроблено методику інтегрування рівнянь рівноваги в переміщеннях для ортотропних тіл за певних обмежень на пружні модулі матеріалу. Компоненти вектора пружних переміщень визначено через дві функції, одна з яких задовольняє рівняння другого, а інша – четвертого порядку. Запропоновано алгоритм розв’язування крайових задач для ортотропної прямокутної призми, який ґрунтується на виокремленні основного та збуреного напружено-деформованих станів, використанні повних не ортогональних систем власних функцій та мінімізації узагальненої квадратичної форми, утвореної для задоволення крайових умов на торці призми. Знайдено переміщення і напруження для довгої ортотропної прямокутної призми за локального нормального силового навантаження на торці.

***Ключові слова*:** *ортотропні матеріали, інтегрування рівнянь рівноваги, переміщення, напруження, модулі зсуву.*

Вступ. Ортотропні тіла широко використовують у будівельних, інженерних та технологічних конструкціях. Прогнозування їхньої механічної поведінки, міцності та надійності передбачає визначення напружено-деформованого стану відповідних елементів конструкції. Розробка методів розрахунку пружної рівноваги призматичних ортотропних тіл бере початок із середини XIX століття [4, 12], коли вивчали згин і скручування призматичних стержнів без використання загальних розв’язків рівнянь теорії пружності. Аналітичні методи розрахунку ортотропних тіл за допомогою символьних обчислень розглянуто в [10]. У роботі [2] розроблено метод розрахунку напруженого стану циліндричної ортотропної оболонки з прямокутним отвором. В [1] розв’язок рівнянь теорії пружності анізотропного тіла подано через три функції, які задовольняють рівняння шостого порядку в частинних похідних, так що для його використання потрібно усунути дві зайві функції. В статті [11] знайдено розв’язки рівнянь рівноваги для широкого класу ортотропних матеріалів. У статтях [8, 9] досліджено пружну рівновагу трансверсально ізотропних тіл. Загальні розв’язки тривимірних задач для ізотропних тіл виражено [5, 6] через чотири гармонічні функції, а в роботі [7] – через три гармонічні функції в ортогональній криволінійній системі координат.

Метою цієї роботи є розвиток методу [11] для побудови розв’язку тривимірної задачі теорії пружності для ортотропних тіл для широкого спектру властивостей матеріалу.

1. Постановка задачі та подання розв’язку. Використаємо співвідношення закону Гука [3, 12] у декартовій системі координат (x_1, x_2, x_3) для ортотропного тіла

$$\sigma_j = \sum_{k=1}^{3} B_{jk}\varepsilon_k, \qquad j = 1,2,3,$$

$$\tau_{kj} = G_{kj}\gamma_{kj}, \qquad j,k = 1,2,3, \qquad k \neq j, \tag{1}$$

де $B_{jk} = B_{kj}$ – значення коефіцієнтів ортотропної матриці жорсткості [2], G_{kj} – модулі зсуву ортотропного матеріалу. Компоненти деформацій ε_j, γ_{kj} виразимо за допомогою співвідношень Коші [4, 12]

[✉] viktorrev@ukr.net

$$\varepsilon_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \quad \gamma_{kj} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \qquad k,\, j = 1,2,3, \qquad k \neq j\,. \tag{2}$$

Напружено-деформований стан (НДС) ортотропного тіла з урахуванням рівнянь (1), (2) описується рівняннями рівноваги в переміщеннях

$$L_j u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1, k\neq j}^{3} D_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \qquad j = 1,2,3\,, \tag{3}$$

де оператори L_j мають вигляд [11]

$$L_j = \sum_{k=1}^{3} T_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad T_{jj} = B_{jj}, \quad T_{jk} = G_{jk}\,,$$

$$D_{jk} = B_{jk} + G_{jk}, \quad k \neq j, \;\; k, j = 1,2,3\,.$$

У рівняннях (1), (3) є дев'ять незалежних пружних сталих G_{kj}, $k \neq j$, B_{kj}, $k, j = 1,2,3$.

Подамо рівняння (3) у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial x_j} L_k^1 u_k = \frac{\partial}{\partial x_k} L_j^1 u_j = 0, \quad k \neq j, \;\; k, j = 1,2,3\,, \tag{4}$$

де оператори L_j^1 визначено формулами [11]

$$L_j^1 = D_{km} L_j - D_{jk} D_{jm} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \qquad k \neq j \neq m, \qquad k, j, m = 1,2,3\,. \tag{5}$$

Показано [11], що якщо всі оператори (5) не є попарно еквівалентними ($L_j^1 \neq c L_m^1$, $j \neq m$, $c \in \mathbb{R}$), то розв'язок системи (3) можна подати у вигляді

$$u_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \prod_{k \neq j} L_k^1 \Phi\,,$$

де Φ − невідома функція переміщень, яка задовольняє рівняння в частинних похідних шостого порядку.

Розглянемо випадок, коли для операторів (5) виконується залежність

$$L_2^1 = s_1 L_1^1, \quad L_3^1 \neq s_2 L_1^1\,, \tag{6}$$

де $s_k \in \mathbb{R}$ − невідомі параметри. Поділимо (6) на коефіцієнт біля похідної $\partial^2 / \partial x_3^2$ і прирівняємо вирази біля однакових похідних, звідки одержимо

$$\frac{G_{12}}{a_2} = B_{11} - \frac{D_{12}}{a_1}, \quad G_{12} a_2 = B_{22} - D_{12} a_1, \qquad s_1 = \frac{a_2}{a_1}\,. \tag{7}$$

Тут $a_1 = D_{23} / D_{13}$, $a_2 = G_{23} / G_{13}$. Рівняння (7) дозволяють визначити параметри a_1, a_2 і s_1. Із рівнянь (7) випливає квадратне рівняння для a_1:

$$B_{11} D_{12} a_1^2 - (B_{11} B_{22} + D_{12}^2 - G_{12}^2) a_1 + D_{12} B_{22} = 0\,. \tag{8}$$

Розв'язавши рівняння (7), (8), знаходимо

$$a_1^{\pm} = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2 B_{11} D_{12}}, \quad a_2 = \frac{B_{22} - a_1 D_{12}}{G_{12}}, \quad s_1 = \frac{D_{13} G_{23}}{D_{23} G_{13}}\,, \tag{9}$$

де $b = B_{11} B_{22} + D_{12}^2 - G_{12}^2$, $D = (G_{12}^2 - B_{11} B_{22} - D_{12}^2)^2 - 4 B_{11} B_{22} D_{12}^2$.

Зауважимо, що при $a_1 = 1$ досліджуваний матеріал є трансверсально ізотропним.

Отже a_1, a_2, G_{13}, B_{13}, s_1 є залежними параметрами, які визначено з рівнянь (7)–(9). Незалежними залишаються сім коефіцієнтів B_{11}, B_{12}, G_{12}, B_{22}, G_{23}, B_{23}, B_{33}, визначених через модулі ортотропії. Таким чином, операторна залежність (6) виконується, якщо справджуються умови (7).

З урахуванням (7), (9) перші два оператори у рівнянні (4) набувають вигляду

$$L_1^1 = \frac{G_{12} D_{23} G_{13}}{G_{23}} \Delta_1, \quad L_2^1 = D_{13} G_{12} \Delta_1, \tag{10}$$

де $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{G_{23}}{G_{13}} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{G_{23}}{G_{12}} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. Тоді з (4) отримаємо рівняння

$$\Delta_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - s_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0, \tag{11}$$

розв'язок якого має вигляд:

$$u_1 = s_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \varphi_1, \quad u_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \varphi_2, \tag{12}$$

де Ψ – невідома функція, а φ_j задовольняють рівняння $\Delta \varphi_j = 0$, $j = 1, 2$.

Підставивши (12) в (3), з урахуванням (6), (7) одержимо

$$L_4 \Psi + D_{23} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{D_{12}}{D_{13}} \left(D_{13} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + D_{23} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(s_1 D_{13} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + D_{23} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \Psi + L_3 u_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3} \left(D_{13} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + D_{23} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right), \tag{13}$$

де $L_4 = \frac{G_{23}}{G_{13}} B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + G_{23} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$.

Якщо вважати функції Ψ та φ_j незалежними, то праві частини рівнянь (13) мають дорівнювати нулю, звідки

$$\varphi_1 = D_{23} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \varphi_2 = -D_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \Delta_1 \varphi = 0. \tag{14}$$

З умови рівності нулю лівих частин рівнянь (13) випливає визначальне рівняння в частинних похідних четвертого порядку на шукану функцію Ψ

$$\left(L_3 L_4 - D_{23} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left(s_1 D_{13} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + D_{23} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \right) \Psi \equiv \Omega \Psi = 0, \tag{15}$$

де

$$\Omega = d_1 \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + d_2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + d_3 \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + $$
$$+ d_4 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + d_5 \frac{\partial^4}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} + d_6 \frac{\partial^4}{\partial x_3^4}, \tag{16}$$

$$d_1 = B_{11}, \quad d_2 = \frac{G_{23}}{G_{13}} B_{11} + \frac{G_{13}}{G_{23}} B_{22}, \quad d_3 = B_{22}, \quad d_6 = B_{33},$$

$$d_4 = G_{13} + \frac{B_{33} B_{11} - D_{13}^2}{G_{13}}, \quad d_5 = G_{23} + \frac{B_{33} B_{22} - D_{23}^2}{G_{23}},$$

а всі похідні функції Ψ до четвертого порядку включно є неперервними. З використанням формул (12)–(14) запишемо

$$u_1 = s_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + D_{23} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} - D_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1},$$

$$u_3 = -\frac{1}{D_{23}} L_4 \Phi, \quad \Phi = \int \Psi \, dx_3 . \tag{17}$$

Встановивши переміщення (17), за формулами (2) можна визначити деформації, а за формулами (1) – напруження.

Якщо в рівняннях (7), (9), (10) покласти $B_{11} = B_{22}$, $D = 0$, то одержимо трансверсально ізотропний матеріал, для якого $D_{13} = D_{23}$, $G_{13} = G_{23}$, $L_2^1 \equiv L_1^1$, $G_{12} = B_{11} - D_{12} = (B_{11} - B_{12}) / 2$, а оператор Ω має вигляд:

$$\Omega = G_{13} B_{11} \Delta^2 + (B_{11} B_{33} + G_{13}^2 - D_{13}^2) \Delta \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + G_{13} B_{33} \frac{\partial^4}{\partial x_3^4} . \tag{18}$$

Оператор (18) можна розкласти на множники та спростити вираз для переміщень (17):

$$u_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad u_3 = m_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + m_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}, \tag{19}$$

де

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \Psi = \psi_1 + \psi_2, \quad \left(\Delta - \eta_j \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi_j = 0,$$

$$m_j = -\frac{1}{D_{13}} (\mathrm{B}_{11} \eta_j + G_{13}), \quad \eta_j = \eta^{\pm} = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2 B_{11} G_{13}}, \quad j = 1, 2,$$

$$D = b^2 - 4 B_{11} B_{33} G_{13}^2, \quad b = B_{11} B_{33} + G_{13}^2 - D_{13}^2 .$$

Подання переміщень (19) збігається з наведеними у працях [8, 9].

Важливо зауважити, що міняючи в рівнянні (6) індекси операторів, ми одержимо ще два класи ортотропних матеріалів, для яких переміщення будуть описуватися співвідношеннями, аналогічними до (17).

2. Визначення НДС довгої прямокутної призми. Розглянемо прямокутну пів-нескінченну призму $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in [-\alpha, \alpha] \times [-\beta, \beta] \times [0, \infty]\}$, навантажену лише локально прикладеною нормальною силою на торці $x_3 = 0$ симетрично за координатами x_1, x_2:

$$\sigma_3(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2) - \sigma_0, \quad \tau_{31}(x_1, x_2, 0) = \tau_{32}(x_1, x_2, 0) = 0, \tag{20}$$

де

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \sigma_M \dfrac{(\alpha_1^2 - x_1^2)(\beta_1^2 - x_2^2)}{\alpha_1^2 \beta_1^2}, & (x_1, x_2) \in [-\alpha_1, \alpha_1] \times [-\beta_1, \beta_2], \\ 0, & (x_1, x_2) \notin [-\alpha_1, \alpha_1] \times [-\beta_1, \beta_2], \end{cases}$$

$\sigma_M = \max f(x_1, x_2)$, σ_0 – напруження основного НДС. Із умов рівноваги визначимо стале напруження на нескінченності $\sigma_3^\infty = \sigma_0 = \dfrac{4}{9} \dfrac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha \beta} \sigma_M$, а інші компоненти основного НДС дорівнюють нулю. Таким чином, НДС призми подано як суперпозицію основного стану з однією відмінною від нуля компонентою $\sigma_0 = \sigma_3^\infty$ та збуреного стану, що характеризується нульовими головними векторами сил і моментів [2, 7].

Нехай $\alpha_1 \ll \alpha$, $\beta_1 \ll \beta$. Тоді на бічних гранях призми напруження збуреного стану наближено задовольняють задані однорідні крайові умови.

Залишається задовольнити умови (20). Розв'язок рівняння (11), який описує збурений НДС призми Π, шукаємо у вигляді ряду за функціями, які експоненційно згасають з віддаленням від торця $x_3 = 0$:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^3 \varphi_k^3 (x_1, x_2, x_3), \tag{21}$$

де d_k^3 – дійсні коефіцієнти, $\varphi_k^3 = \sin(k\omega_1 x_1)\sin(k\omega_2 x_2)\exp(-k\lambda_3 x_3)$, $\{\sin(k\omega_1 x_1)\sin(k\omega_2 x_2)\}$ – повна система непарних функцій, $\omega_1 = k_1/\alpha$, $\omega_2 = k_1/\beta$, $\lambda_3 = \sqrt{\mu_3} > 0$, $\mu_3 = G_{12}\omega_1^2 / G_{23} + G_{12}\omega_2^2 / G_{13}$, $2.8 < k_1 \le \pi$. Тоді розв'язок рівняння (15) визначимо у вигляді

$$\Psi = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} d_k^j \varphi_k^j (x_1, x_2, x_3), \tag{22}$$

де $\varphi_k^j = \cos(k\omega_1 x_1)\cos(k\omega_2 x_2)\exp(-k\lambda_j x_3)$, $j = 1, 2$, – власні функції, $\{\cos(k\omega_1 x_1)\cos(k\omega_2 x_2)\}$ – система парних функцій, d_k^j – дійсні коефіцієнти, $\lambda_j = \sqrt{\mu_j}$. Власні значення $\mu_j > 0$ визначимо за допомогою підстановки (22) у співвідношення (15), (16) як корені характеристичного рівняння

$$\mathrm{d}_6 \mu_j^2 - g_2 \mu_j + g_3 = 0, \tag{23}$$

де $g_2 = \omega_1^2 d_4 + \omega_2^2 d_5$, $g_3 = \omega_1^4 d_1 + \omega_1^2 \omega_2^2 d_2 + \omega_2^4 d_3$. Якщо рівняння (23) має два різні дійсні корені, то функція Ψ має вигляд (22). Якщо корені рівняння (23) є кратними $\mu_1 = \mu_2$, то у виразі для φ_k^j у формулі (22) замість функції $\exp(-k\lambda_j x_3)$ треба покласти $x_3 \exp(-k\lambda_j x_3)$. Якщо рівняння (23) має комплексно-спряжені корені $\lambda_1 = \lambda_r + i\lambda_i$, $\lambda_2 = \lambda_r - i\lambda_i$, $\lambda_r > 0$, то замість $\exp(-k\lambda_j x_3)$ покладемо $\psi_k^j(x_3) = \mathrm{Re}\big((b_{kr} + i b_{ki})\exp(-k(\lambda_r + i\lambda_i)x_3)\big)$, де i – уявна одиниця. Зазначимо, що функція $\psi_k^j(x_3)$ має два незалежні коефіцієнти b_{kr}, b_{ki}.

З використанням (21), (22) запишемо вираз для переміщень

$$u_m = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} K_m^j d_k^j \frac{\partial \varphi_k^j}{\partial x_m}, \qquad m = 1, 2, 3, \tag{24}$$

де

$$K_1^j = s_1, \quad K_2^j = 1, \quad K_3^j = -\frac{\chi_j}{\lambda_j D_{23}}, \quad j = 1, 2,$$

$$K_1^3 = -D_{23}\frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad K_2^3 = D_{13}\frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad K_3^3 = 0,$$

$$\chi_j = \frac{1}{\lambda_j}\left(G_{23}\lambda_j - \frac{G_{23}}{G_{13}} B_{11}\omega_1^2 + B_{22}\omega_2^2\right).$$

Знайшовши переміщення (24), за формулами (1), (2) визначимо напруження:

$$\sigma_n = \sum_{m=1}^{3} B_{nm} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} \chi_{m,k}^j d_k^j \varphi_k^j, \qquad \tau_{12} = B_{12} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} S_{12,k}^j d_k^j \psi_k^j,$$

$$\tau_{m3} = B_{m3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} S_{m3,k}^{j} d_k^j \frac{\partial \varphi_k^j}{\partial x_m}, \tag{25}$$

де

$$\chi_{m,k}^j = -k^2 \omega_m^2 K_m^j, \quad S_{m3,k}^j = -k\lambda_j (K_{m,k}^j + K_{3,k}^j), \quad m = 1,2,$$

$$\chi_{3,k}^j = k^2 \mu_3 K_{3,k}^j, \quad S_{12,k}^j = k^2 \omega_1 \omega_2 (K_{1,k}^j + K_{2,k}^j), \quad j = 1,2,3.$$

Якщо для обчислень обмежитись першими N членами рядів по k у виразах (25), то матимемо $M = 3N$ невідомих коефіцієнтів. Для визначення збуреного НДС потрібно задовольнити отриманими виразами крайові умови (20), які після підстановки (25) зведено до компактної форми

$$\sum_{k=1}^{M} c_k A_{m,k}(x_1, x_2) = P_m(x_1, x_2), \quad x_1 \in [-\alpha, \alpha],\ x_2 \in [-\beta, \beta], \tag{26}$$

де $c_{k+jN-N} = d_k^m$, $m = 1,2,3$;

$$A_{1,k}(x_1, x_2) = a_{1,k} \cos(k\omega_1 x_1) \cos(k\omega_2 x_2),$$

$$A_{2,k}(x_1, x_2) = a_{2,k} \sin(k\omega_1 x_1) \cos(k\omega_2 x_2),$$

$$A_{3,k}(x_1, x_2) = a_{3,k} \cos(k\omega_1 x_1) \sin(k\omega_2 x_2)$$

– відомі функції, $k = 1,\ldots,N$, $P_1(x,y) = f(x,y) - \sigma_0$, $P_2(x,y) = P_3(x,y) = 0$.

Для задоволення умов (26) використаємо аналітично-числову методику [2, 7]. Тоді числовий розв'язок системи трьох рівнянь (26) побудуємо як мінімум $F(N)$ узагальненої квадратичної форми

$$\sum_{m=1}^{3} \left\| \sum_{k=1}^{M} c_k A_{m,k}(x_1, x_2) - P_m(x_1, x_2) \right\|^2 =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{M} c_k c_j W_{kj} - 2 \sum_{k=1}^{M} c_k V_k + P^2,$$

де

$$\| f(x_1, x_2) \| = \sqrt{(f(x_1, x_2), f(x_1, x_2))},$$

$$\big(f(x_1, x_2), g(x_1, x_2) \big) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\beta}^{\beta} f(\xi_1, \xi_2) g(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

$$W_{kj} = \sum_{m=1}^{3} (A_{m,k}, A_{m,j}), \quad V_k = \sum_{m=1}^{3} (A_{m,k}, P_m), \quad k,j = 1,\ldots,M,$$

$$P^2 = \sum_{m=1}^{3} \| P_m \|^2.$$

Умови існування розв'язку та оцінку точності визначення функції $F(N)$ наведено в [2, 7].

1. *Байда Э. Н.* Некоторые пространственные задачи теории упругости. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. – 232 с.
2. *Бакулин В. Н., Ревенко В. П.* Аналитико-численный метод конечных тел для расчета цилиндрической ортотропной оболочки с прямоугольным отверстием // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 6. – С. 3–14.

   Те саме: *Bakulin V. N., Revenko V. P.* Analytical and numerical method of finite bodies for calculation of cylindrical orthotropic shell with rectangular hole

// Russ. Math. – 2016. – **60**, No. 6. – P. 1–11.
– https://doi.org/10.3103/S1066369X16060013.
3. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
Те саме: *Lekhnitskii S. G.* Theory of elasticity of an anisotropic elastic body. – San Francisco: Holden-Day, 1963. – 404 p.
4. *Ляв А. Е.* Математическая теория упругости. – Москва–Ленинград: ОНТИ НКТИ СССР, Глав. ред. общетехн. лит. и номогр., 1935. – 674 с.
Те саме: *Love A. E. H.* A Treatise on the mathematical theory of elasticity. – New York: Dover, 1944. – 644 p.
5. *Нейбер Г.* Концентрация напряжений. – Москва: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
6. *Папкович П. Ф.* Представление общего интеграла основных дифференциальных уравнений теории упругости через гармонические функции // Изв. АН СССР. Сер. 7. – 1932. – № 10. – С. 1425–1435.
7. *Ревенко В. П.* О решении трехмерных уравнений линейной теории упругости // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 7. – С. 52–65.
Те саме: Revenko V. P. Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 7. – P. 730–741.
– https://doi.org/10.1007/s10778-009-0225-4.
8. *Elliot H. A.* Axial symmetric stress distributions in aeolotropic hexagonal crystals. The problem of the plane and related problems // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1949. – **45**, No. 4. – P. 621–630. – https://doi.org/10.1017/S0305004100025305.
9. *Hu H. C.* On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body // Scientia Sinica. – 1953. – **2**, No. 2. – P. 145–151.
– http://dx.doi.org/10.7498/aps.9.130.
10. *Rand O., Rovenski V.* Analytical methods in anisotropic elasticity with symbolic computational tools. – Basel: Birkhäuser, 2005. – xviii+451 p.
11. *Revenko V.* Presentation of a general 3D solution of equations of elasticity theory for a wide class of orthotropic materials // Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2019. – **95**, № 3. – P. 49–54. – https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2019.03.049.
12. *Sadd M. H.* Elasticity: theory, applications, and numerics. – Burlington: Academic Press, 2009. – xv+536 p.

SOLUTIONS OF THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY PROBLEMS FOR ORTHOTROPIC SOLIDS

A technique for integrating the equilibrium equations in terms of displacements is developed for orthotropic bodies under certain constraints on the elastic moduli of a material. The components of the vector of elastic displacements are determined through two functions, one of which satisfies the equation of the second order, while the other one satisfies the fourth-order equation. An algorithm for solving boundary value problems for an orthotropic rectangular prism is proposed basing on the superposition of the basic and perturbed stress-strain states, the use of complete systems of eigenfunctions, and the minimization of the generalized quadratic form derived for satisfaction of boundary conditions at the end face of the prism. The displacement and stresses are found for a long orthotropic rectangular prism under local normal force load on the end face.

Keywords: *orthotropic materials, integration of equations equilibrium, displacement, stress, shear moduli.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.10.19