

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ В АНІЗОТРОПНІЙ СМУЗІ З ОТВОРАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА РОЗВ'ЯЗКУ ҐРІНА

З використанням методу послідовних наближень (алгоритм Шварца) та інтегрального перетворення Фур'є побудовано розв'язок типу Ґріна для анізотропної смуги з ненавантаженою межею, який виражено через потенціали Лехницького з виділеними полюсами. На основі побудованих розв'язків отримано сингулярні інтегральні рівняння для анізотропних пластинок з отворами за тотожного задоволення крайових умов на прямолінійних межах. Ці рівняння розв'язано чисельно з використанням методу механічних квадратур. Досліджено концентрацію напружень у композитних пластинах біля отворів різної форми.

**Ключові слова:** анізотропна смуга, отвори, напружений стан, розв'язки Ґріна, метод інтегральних рівнянь.

**Вступ.** Для дослідження напружень в анізотропних пластинках з отворами широко використовують метод граничних інтегральних рівнянь [6, 9], ефективність якого суттєво підвищується при побудові інтегральних рівнянь на основі розв'язків типу Ґріна. Такий підхід застосовано для півнескінченних областей, пластинок з еліптичним отвором, спаяних різнорідних півплощин та ін. [6–8, 12]. В [6, 11, 14] його використано для дослідження напружень в ортотропних смугах з прямолінійними тріщинами, переважно паралельними або перпендикулярними до межі. Однак у побудованих розв'язках Ґріна не було виділено сингулярних складових, тому інтеграли по необмеженій області, які входять у ці розв'язки, виявляли повільну збіжність. Розв'язок Ґріна для смуги у випадку загальної анізотропії побудовано в роботі [8], де виділено фундаментальний розв'язок для півплощини. Це покращило збіжність інтегралів, а також дало можливість спростити дослідження напружень для тріщин, розташованих поблизу однієї зі сторін смуги. Сам розв'язок Ґріна побудовано на основі формалізму Стро, але його не наведено у роботі через громіздкість. Вплив пружного включення на напружений стан в анізотропній смuzі досліджено в [4].

У цій статті потенціали Лехницького для розв'язку Ґріна в анізотропній смuzі з отворами побудовано у вигляді суми двох складових. Першу складову знайдено шляхом послідовного задоволення крайових умов на одній зі сторін смуги як для півплощини і записано у вигляді рекурентних співвідношень. Другу складову знайдено через інтеграли від експоненційно згасаючих функцій на нескінченності. Інтегральні рівняння для смуг з отворами записано на основі підходу, наведеного в [13], і побудованого розв'язку Ґріна, та розв'язано чисельно. Досліджено концентрацію напружень у смугах з отворами різної форми.

**1. Модифіковане інтегральне зображення.** Розглянемо пружну анізотропну пластину  $D$  з отворами та вільною від навантаження межею і побудуємо інтегральні рівняння для неї так, щоб умови на межі області  $D$  виконувались автоматично. Для цього потрібно побудувати [12] комплексні потенціали Лехницького  $\Phi_j^D$ ,  $\Psi_j^D$ ,  $j = 1, 2$ , які є розв'язком задачі теорії пружності для області  $D$  з однорідними крайовими умовами та мають особливості в довільній точці  $T = (x_0, y_0) \in D$ :

$$\Phi_j^D(z_1, T) \sim -\frac{A_j}{z_1 - z_{10}}, \quad \Psi_j^D(z_2, T) \sim -\frac{B_j}{z_2 - z_{20}}, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

<sup>✉</sup> kharchen@wp.pl

де  $z_{10} = x_0 + s_1 y_0$ ,  $z_{20} = x_0 + s_2 y_0$ ,  $z_j = x + s_j y$ ,  $s_j$  – корені характеристичного рівняння  $\alpha_{11}s^4 - 2\alpha_{16}s^3 + (2\alpha_{12} + \alpha_{66})s^2 - 2\alpha_{26}s + \alpha_{22} = 0$ ,  $\text{Im } s_j > 0$ ,  $\alpha_{jk}$  – пружні сталі в законі Гука анізотропного тіла [1],

$$A_1 = -\frac{is_1}{2\pi\Delta_1}, \quad A_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_1}, \quad B_1 = -\frac{is_2}{2\pi\Delta_2}, \quad B_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_2},$$

$$\Delta_j = (-1)^j \alpha_{11}(s_2 - s_1)(s_j - \bar{s}_1)(s_j - \bar{s}_2), \quad j = 1, 2.$$

Вважаючи точку  $T = (\xi, \eta)$  біжучою та здійснивши інтегрування, отримаємо загальний розв'язок задачі теорії пружності (потенціали Лехницького) для області  $D$  з вільними від навантаження отворами у вигляді [12]

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \int_L (\Phi_1^D(z_1, T)u'(s) + \Phi_2^D(z_1, T)v'(s))ds + \Phi_D(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \int_L (\Psi_1^D(z_2, T)u'(s) + \Psi_2^D(z_2, T)v'(s))ds + \Psi_D(z_2), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\Phi_D(z_1) = \Phi_D^P(z_1) + \Phi_D^\infty(z_1)$ ,  $\Psi_D(z_2) = \Psi_D^P(z_2) + \Psi_D^\infty(z_2)$ ,  $L = \bigcup_{j=1}^J L_j$ ,  $L_j$  – межі отворів,  $u'$ ,  $v'$  – невідомі функції. За побудовою потенціали (2) тотожно задовольняють задані умови на межі області  $D$  для довільних функцій  $u'$ ,  $v'$ . Підставивши потенціали (2) в конкретні крайові умови, отримаємо сингулярні інтегральні рівняння для знаходження  $u'$ ,  $v'$ , алгоритм розв'язання яких наведено у праці [13].

**2. Розв'язок типу Гріна для смуги.** Розглянемо анізотропну смугу  $D = \{(x, y) : |x| < \infty, -H < y < 0\}$ , послаблену отворами з межами  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Смугу навантажено розподіленими на нескінченності  $|x| \rightarrow \infty$  силами та зосередженими силами на сторонах  $y = 0, -H$ .

Щоб побудувати розв'язок типу Гріна для смуги  $D$ , визначимо [12] потенціали  $\Phi(z_1)$ ,  $\Psi(z_2)$  з особливостями типу (1). Розв'язок шукатимемо методом послідовних наближень, побудувавши спочатку розв'язки двох допоміжних задач. Розглянемо потенціали  $\Phi_0(z_1)$ ,  $\Psi_0(z_2)$ , визначені для необмеженої пластини так, що їхні особливості потрапляють в область  $y < 0$ . Якщо цими особливостями володіють потенціали, визначені для півплощини  $y < 0$  з вільною від навантажень межею, то вони мають вигляд

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_0(z) + c_1 \bar{\Phi}_0(z) + c_2 \bar{\Psi}_0(z), \\ \Psi(z) &= \Psi_0(z) + d_1 \bar{\Phi}_0(z) + d_2 \bar{\Psi}_0(z), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $c_1 = \beta_3/\delta$ ,  $c_2 = \beta_4/\delta$ ,  $d_1 = -\beta_1/\delta$ ,  $d_2 = -\beta_2/\delta$ ,  $\delta = s_1 - s_2$ ,  $\beta_1 = s_1 - \bar{s}_1$ ,  $\beta_2 = s_1 - \bar{s}_2$ ,  $\beta_3 = s_2 - \bar{s}$ ,  $\beta_4 = s_2 - \bar{s}_2$ . Можна переконатись, що розв'язок (3) задовольняє умови відсутності напружень на границі  $y = 0$

$$\text{Re}(\Phi(x) + \Psi(x)) = 0, \quad \text{Re}(s_1\Phi(x) + s_2\Psi(x)) = 0.$$

Розглянемо тепер потенціали  $\Phi_0(z_1)$ ,  $\Psi_0(z_2)$  для нескінченної площини, що мають особливості при  $y > -H$ . Розв'язок задачі теорії пружності для півплощини  $y > -H$  можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \Phi_0(z_1) + c_1 \bar{\Phi}_0(z_1 + \beta_1 H) + c_2 \bar{\Psi}_0(z_1 + \beta_2 H), \\ \Psi(z_2) &= \Psi_0(z_2) + d_1 \bar{\Phi}_0(z_2 + \beta_3 H) + d_2 \bar{\Psi}_0(z_2 + \beta_4 H). \end{aligned} \quad (4)$$

Можна перекоонатись, що однорідні крайові умови при  $y = -H$  виконуються, оскільки

$$\Phi = \Phi_0(Z_1) + c_1 \bar{\Phi}_0(\bar{Z}_1) + c_2 \bar{\Psi}_0(\bar{Z}_2),$$

$$\Psi = \Psi_0(Z_2) + d_1 \bar{\Phi}_0(\bar{Z}_1) + d_2 \bar{\Psi}_0(\bar{Z}_2),$$

де  $Z_1 = x - s_1 H$ ,  $Z_2 = x - s_2 H$ .

Тепер подамо фундаментальний розв'язок для смуги  $D$  у вигляді

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \dots, \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \dots, \quad (5)$$

де  $\Phi_1(z)$ ,  $\Psi_1(z)$  – комплексні потенціали для півплощини  $y < 0$  з вільною межею.

Якщо потенціали мають особливості типу (1), з використанням (3) знаходимо [12]

$$\Phi_1(z) = \frac{A}{z - z_{10}} + c_1 \frac{\bar{A}}{z - \bar{z}_{10}} + c_2 \frac{\bar{B}}{z - \bar{z}_{20}},$$

$$\Psi_1(z) = \frac{B}{z - z_{20}} + d_1 \frac{\bar{A}}{z - \bar{z}_{10}} + d_2 \frac{\bar{B}}{z - \bar{z}_{20}}.$$

Потенціали з індексом 2 виберемо так, щоб сума перших двох членів у (5) задовольняла крайові умови при  $y = -H$ . Тоді з виразів (4) маємо

$$\Phi_2(z) = c_1 \bar{\Phi}_1(z + \beta_1 H) + c_2 \bar{\Psi}_1(z + \beta_2 H),$$

$$\Psi_2(z) = d_1 \bar{\Phi}_1(z + \beta_3 H) + d_2 \bar{\Psi}_1(z + \beta_4 H). \quad (6)$$

Вибір потенціалів з індексом 3 здійснимо так, щоб сума перших трьох членів задовольняла крайові умови при  $y = 0$ . Тоді з (3) випливає, що

$$\Phi_3(z) = c_1 \bar{\Phi}_2(z) + c_2 \bar{\Psi}_2, \quad \Psi_3(z) = d_1 \bar{\Phi}_2(z) + d_2 \bar{\Psi}_2. \quad (7)$$

Підставивши (6) у (7), отримаємо вирази

$$\begin{aligned} \Phi_3(z) = & c_1 \bar{c}_1 \Phi_1(z + \bar{\beta}_1 H) + c_2 \bar{d}_1 \Phi_1(z + \bar{\beta}_3 H) + \\ & + c_1 \bar{c}_2 \Psi_1(z + \bar{\beta}_2 H) + c_2 \bar{d}_2 \Psi_1(z + \bar{\beta}_4 H), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_3(z) = & d_1 \bar{c}_1 \Phi_1(z + \bar{\beta}_1 H) + d_2 \bar{d}_1 \Phi_1(z + \bar{\beta}_3 H) + \\ & + d_1 \bar{c}_2 \Psi_1(z + \bar{\beta}_2 H) + d_2 \bar{d}_2 \Psi_1(z + \bar{\beta}_4 H). \end{aligned}$$

Аналогічно встановимо рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} \Phi_{2k+1}(z) = & c_1 \bar{c}_1 \Phi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_1 H) + c_2 \bar{d}_1 \Phi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_3 H) + \\ & + c_1 \bar{c}_2 \Psi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_2 H) + c_2 \bar{d}_2 \Psi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_4 H), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{2k+1}(z) = & d_1 \bar{c}_1 \Phi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_1 H) + d_2 \bar{d}_1 \Phi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_3 H) + \\ & + d_1 \bar{c}_2 \Psi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_2 H) + d_2 \bar{d}_2 \Psi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_4 H). \end{aligned} \quad (8)$$

Функції з парними індексами на основі (7) можна визначити через функції з непарними індексами:

$$\Phi_{2k}(z) = c_1 \bar{\Phi}_{2k-1}(z + \beta_1 H) + c_2 \bar{\Psi}_{2k-1}(z + \beta_2 H),$$

$$\Psi_{2k}(z) = d_1 \bar{\Phi}_{2k-1}(z + \beta_3 H) + d_2 \bar{\Psi}_{2k-1}(z + \beta_4 H). \quad (9)$$

Запишемо отримані співвідношення в операторному вигляді [2] з урахуванням того, що для аналітичних функцій

$$f(z + \beta H) = \exp(\beta \mathcal{D})f(z),$$

де  $\mathcal{D} = Hd/dz$ . Тоді рекурентні формули (8) набудуть вигляду

$$\mathbf{F}_3(z) = \mathbf{M}\mathbf{F}_1(z), \quad \mathbf{F}_{2k+1}(z) = \mathbf{M}\mathbf{F}_{2k-1}(z) = \mathbf{M}^k\mathbf{F}_1(z), \quad (10)$$

де

$$\mathbf{F}(z) = \begin{pmatrix} \Phi(z) \\ \Psi(z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_k(z) = \begin{pmatrix} \Phi_k(z) \\ \Psi_k(z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

$$M_{11} = c_1 \bar{c}_1 \exp(\bar{\beta}_1 \mathcal{D}) + c_2 \bar{d}_1 \exp(\bar{\beta}_3 \mathcal{D}),$$

$$M_{12} = c_1 \bar{c}_2 \exp(\bar{\beta}_2 \mathcal{D}) + c_2 \bar{d}_2 \exp(\bar{\beta}_4 \mathcal{D}),$$

$$M_{21} = d_1 \bar{c}_1 \exp(\bar{\beta}_1 \mathcal{D}) + d_2 \bar{d}_1 \exp(\bar{\beta}_3 \mathcal{D}),$$

$$M_{22} = d_1 \bar{c}_2 \exp(\bar{\beta}_2 \mathcal{D}) + d_2 \bar{d}_2 \exp(\bar{\beta}_4 \mathcal{D}).$$

Аналогічно формулу (9) подамо у вигляді

$$\mathbf{F}_{2k}(z) = \mathbf{C}\bar{\mathbf{F}}_{2k-1}(z), \quad (11)$$

де

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \exp(\beta_1 \mathcal{D}) & c_2 \exp(\beta_2 \mathcal{D}) \\ d_1 \exp(\beta_3 \mathcal{D}) & d_2 \exp(\beta_4 \mathcal{D}) \end{pmatrix}.$$

Подамо суму непарних складових у вигляді двох доданків

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_{2n+1} = \sum_{n=1}^N \mathbf{F}_{2n-1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbf{F}_{2n-1}.$$

На основі співвідношень (10) запишемо

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbf{F}_{2n-1} = (\mathbf{M}^N + \mathbf{M}^{N+1} + \dots)\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}^N \mathbf{F}_{\Delta},$$

де

$$\mathbf{F}_{\Delta} = (\mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \dots)\mathbf{F}_1, \quad (12)$$

$\mathbf{I}$  – одинична матриця. Помноживши формулу (12) на  $(\mathbf{I} - \mathbf{M})$ , отримаємо

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{F}_{\Delta} = \mathbf{F}_1,$$

звідки

$$\mathbf{F}_{\Delta} = \mathbf{M}'\mathbf{F}_1.$$

Тут

$$\mathbf{M}' = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} M_{22} - 1 & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} - 1 \end{pmatrix}$$

– матриця, обернена до  $(\mathbf{I} - \mathbf{M})$ ,  $\Delta = (M_{11} - 1)(M_{22} - 1) - M_{12}M_{21}$ .

Таким чином,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_{2n-1} = \sum_{n=1}^N \mathbf{F}_{2n-1} + \mathbf{M}^N \mathbf{M}'\mathbf{F}_1. \quad (13)$$

Знайдемо суму складових з парними індексами з використанням (11):

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbf{F}_{2n}(z) = \mathbf{C} \sum_{n=N+1}^{\infty} \bar{\mathbf{F}}_{2n-1}(z) = \mathbf{C}\bar{\mathbf{M}}^N \bar{\mathbf{M}}'\bar{\mathbf{F}}_1(z). \quad (14)$$

Додавши (13) і (14), отримаємо повний фундаментальний розв'язок

$$\mathbf{F}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n(z) = \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{F}_n(z) + \mathbf{M}^N \mathbf{M}' \mathbf{F}_1(z) + \mathbf{C} \bar{\mathbf{M}}^N \bar{\mathbf{M}}' \bar{\mathbf{F}}_1(z), \quad (15)$$

де  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathfrak{D})$ ,  $\mathbf{M}' = \mathbf{M}'(\mathfrak{D})$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathfrak{D})$ .

Подамо комплексні потенціали (4) для півплощини інтегралами Фур'є

$$\Phi_1(z) = \int_0^{\infty} A_1(\lambda) \exp(-i\zeta\lambda) d\lambda, \quad \Psi_1(z) = \int_0^{\infty} B_1(\lambda) \exp(-i\zeta\lambda) d\lambda,$$

де

$$A_1 = \frac{i}{H} (A \exp(i\zeta_{10}\lambda) + c_1 \bar{A} \exp(i\bar{\zeta}_{10}\lambda) + c_2 \bar{B} \exp(i\bar{\zeta}_{20}\lambda)),$$

$$B_1 = \frac{i}{H} (B \exp(i\zeta_{20}\lambda) + d_1 \bar{A} \exp(i\bar{\zeta}_{10}\lambda) + d_2 \bar{B} \exp(i\bar{\zeta}_{20}\lambda)),$$

$$\zeta = z/H, \quad \zeta_{j0} = z_{j0}/H, \quad (16)$$

Враховуючи рівність [2]

$$\mathfrak{D} \exp(-i\zeta\lambda) = H \frac{d}{dz} \exp(-i \frac{z}{H} \lambda) = -i\lambda \exp(-i\zeta\lambda),$$

з формули (15) отримаємо

$$\mathbf{F}(z) = \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{F}_n(z) + \int_0^{\infty} (\mathbf{g}_N(\lambda) \exp(-i\zeta\lambda) + \mathbf{C}(i\lambda) \bar{\mathbf{g}}_N(\lambda) \exp(i\zeta\lambda)) d\lambda, \quad (17)$$

де  $\mathbf{S}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_1(\lambda) \\ B_1(\lambda) \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{g}_N(\lambda) = \mathbf{M}^N(-i\lambda) \mathbf{M}'(-i\lambda) \mathbf{S}(\lambda)$ .

Позначимо  $\beta_j = a_j + ib_j$ , де  $b_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Тоді при великих  $\lambda$   $M_{ij}(-i\lambda) = C_{ij}(\lambda) \exp(-\gamma_{ij}\lambda)$ , де  $\gamma_{11} = \gamma_{21} = \min(b_1, b_3)$ ,  $\gamma_{12} = \gamma_{22} = \min(b_2, b_4)$ ,  $C_{ij}(\lambda) = O(1)$ . Звідси випливає, що підінтегральні функції в інтегралах (17) експоненційно загасають при великих значеннях  $\lambda$ , причому коефіцієнти матриці  $\mathbf{M}^N(-i\lambda)$  мають порядок  $O(\exp(-\gamma N\lambda))$ , де  $\gamma = \min(\gamma_{13}, \gamma_{24})$ . Потенціали  $\Phi_j^D$ ,  $\Psi_j^D$  отримуємо зі співвідношень (17), поклавши  $A = -A_j$ ,  $B = -B_j$ ,  $j = 1, 2$ , у формулах (4) і (16).

**3. Напруження у смузі, навантаженій зосередженими силами.** Розглянемо випадок дії зрівноваженої системи зосереджених сил  $(X_j, Y_j)$  у точках  $(a_j, b_j)$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Комплексні потенціали в нескінченній площині мають вигляд [1, 13]

$$\Phi_P(z_1) = \sum_{j=1}^M \frac{A_j^P}{z_1 - z_{1j}}, \quad \Psi_P(z_2) = \sum_{j=1}^M \frac{B_j^P}{z_2 - z_{2j}},$$

де

$$A_j^P = i \frac{p_1 X_j + q_1 Y_j}{2\pi\Delta_1}, \quad B_j^P = i \frac{p_2 X_j + q_2 Y_j}{2\pi\Delta_2},$$

$$p_k = \alpha_{11} s_k^2 + \alpha_{12} - \alpha_{16} s_k, \quad q_k = \alpha_{12} s_k + \frac{\alpha_{22}}{s_k} - \alpha_{26},$$

$$z_{kj} = a_j + s_j b_j, \quad k = 1, 2.$$

Таким чином, задача визначення напружень від дії зосереджених сил звелася до підсумовування потенціалів вигляду (17), якщо у формулах (16) і (4) покласти  $A = A_j^P$ ,  $B = B_j^P$ . Можна стверджувати, що інтеграли (17) є збіжними. Напруження через комплексні потенціали Лехницького визначаються за формулами [1].

**4. Результати розрахунків.** Розрахунки виконано для ізотропного матеріалу (ІМ) та матеріалів, властивості яких наведено у таблиці 1.

Таблиця 1. Властивості матеріалів [10].

матеріал	$E_1$ , ГПа	$E_2$ , ГПа	$G$ , ГПа	$\nu_{12}$	$\nu_{21}$
скло-епоксид (СЕ)	18	54	9	0.25	0.0833
бор-епоксид (БЕ)	21	207	7	0.3	0.0304

Позначимо через  $\varphi$  кут між віссю  $Oy$  та напрямком, у якому модуль пружності є більшим. Смуга зазнає стиску двома силами  $P$ .

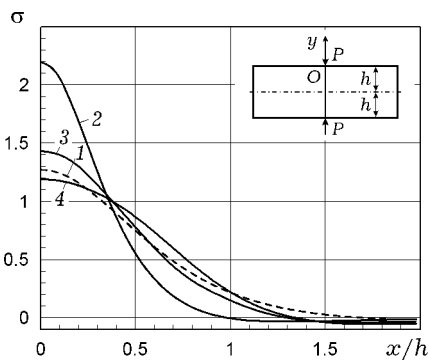


Рис. 1. Відносні напруження на середній лінії смуги.

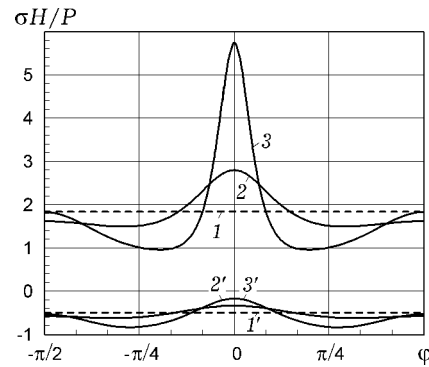


Рис. 2. Максимальні напруження в точці  $(0, -H/2)$  (центрі смуги) залежно від кута  $\varphi$ .

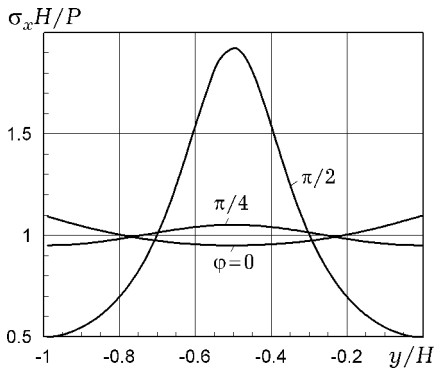


Рис. 3. Відносні напруження у вертикальному перерізі смуги.

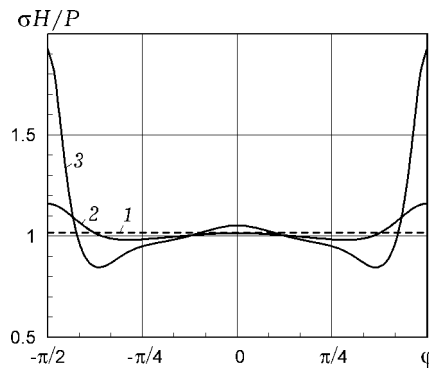


Рис. 4. Відносні напруження в центрі смуги за розтягу двома силами в горизонтальному напрямку.

Розраховані безрозмірні напруження  $\sigma = -\pi h \sigma_y / P$  наведено на рис. 1, де  $h$  – півширина смуги. Тут кривій 1 відповідає ІМ, а кривим 2–4 – СЕ при  $\varphi = 0, \pi/2, \pi/4$ . На рис. 2 наведено напруження в центрі смуги  $\sigma_y(0, -H/2)H/P$  для ІМ (крива 1), СЕ (крива 2) і БЕ (крива 3). Кривим 1'–3' відповідають напруження  $\sigma_x(0, -H/2)H/P$ . Видно, що максимальні

напруження виникають у випадку, коли сили співнаправлені з більшим модулем пружності. Розраховані напруження для ізотропного матеріалу добре узгоджуються результатами праці [5].

Розглянуто розтяг смуги в горизонтальному напрямку двома силами  $P$ , прикладеними в точках  $(-H, -H/2)$ ,  $(H, -H/2)$ . Напруження в перерізі  $x = 0$  для матеріалу бор-епоксид наведено на рис. 3. Біля кривих вказано значення кута  $\varphi$  між напрямком із максимальною жорсткістю матеріалу і віссю  $Ox$ .

На рис. 4 наведено напруження в центрі смуги залежно від кута між віссю  $Oy$  і напрямком, у якому модуль пружності є більшим. Тут кривій 1 відповідає ІМ, кривій 2 – СЕ, кривій 3 – БЕ.

Досліджено розтяг смуги з круговим центральним отвором радіуса  $R$  у горизонтальному напрямку зусиллями  $p$ . Досліджували випадки ІМ, СЕ та БЕ при різних радіусах отворів та кутах між напрямком з максимальним модулем пружності і віссю  $Ox$ . Розраховані коефіцієнти концентрації напружень (ККН) наведено в табл. 2. Для ізотропного матеріалу наведені результати узгоджуються з [3].

Таблиця 2. ККН для смуги з круговим отвором.

$R/H$	ІМ	СЕ			БЕ		
		$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$
0.0	3.000	3.994	3.035	2.729	6.937	4.114	2.891
0.1	3.153	4.152	3.209	2.884	7.133	4.493	3.065
0.2	3.747	4.759	3.761	3.499	7.864	5.026	3.704
0.3	5.318	6.375	5.173	5.080	9.760	5.21	5.277
0.4	10.350	11.620	10.022	10.074	15.879	9.462	10.318

Розподіл віднесених до  $p$  колових напружень на межі отвору для СЕ при радіусі кола  $R/H = 2/5$  та різних значеннях кута  $\psi$  між напрямком з більшим модулем пружності та віссю  $Ox$  наведено на рис. 5 (значення кутів вказано біля кривих). Видно, що найбільші напруження виникають за розтягу у напрямку, в якому жорсткість матеріалу є максимальною.

Нехай смугу з центральним круговим отвором радіуса  $R$  стиснуто двома зосередженими силами  $P$  (рис. 1). Максимальні  $\sigma_{\max} = \max(\sigma_\theta H/P)$  і мінімальні  $\sigma_{\min} = \min(\sigma_\theta H/P)$  колові напруження на межі отвору наведено в табл. 3 для ІМ та СЕ і БЕ смуг, армованих в напрямку осей  $Ox$  або  $Oy$ .

Розглянуто чистий згин смуги прикладеними на нескінченності моментами. Відомо, що при згині смуг їхня центральна частина є мало навантаженою. Тому для зниження матеріалоемності таких елементів конструкцій у вказаних зонах утворюють отвори. Для такого випадку розглянуто отвори прямокутної форми з півсторонами  $a$ ,  $b$ ,  $a > b$ , заокругленими півколами

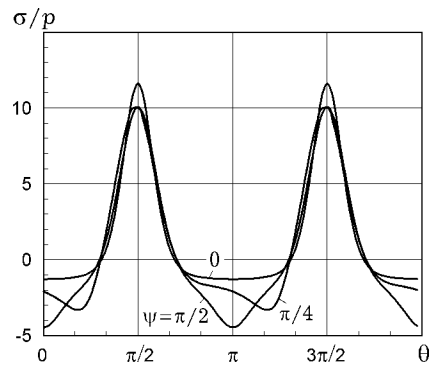


Рис. 5. Відносні колові напруження на межі кругового отвору в СЕ смугі.

радіуса  $b$ . Через  $\sigma_0$  позначено максимальні напруження, які виникають у суцільній смузі при чистому згині (досягаються на прямолінійних межах).

Розрахунки виконано при  $a = H$  для ІМ смуги при різних значеннях  $b$ . Розраховані колові напруження, віднесені до величини  $p = \sigma_0$  на верхній межі отвору залежно від горизонтальної координати  $x/H$ , зображено на рис. 6 штриховими лініями (біля кривих вказано значення  $b/H$ ). Суцільними лініями на рис. 6 зображено розраховані  $\sigma_x(x, 0)/\sigma_0$  на верхній межі смуги. Аналогічні результати для БЕ смуги, коли максимальною є жорсткість у горизонтальному напрямку, наведено на рис. 7.

Таблиця 3. Максимальні та мінімальні напруження в смузі, стиснутій двома силами.

	Ізотропія		СЕ				БЕ			
			$E_2 > E_1$		$E_1 > E_2$		$E_2 > E_1$		$E_1 > E_2$	
$R/H$	$\sigma_{\max}$	$\sigma_{\min}$	$\sigma_{\max}$	$\sigma_{\min}$	$\sigma_{\max}$	$\sigma_{\min}$	$\sigma_{\max}$	$\sigma_{\min}$	$\sigma_{\max}$	$\sigma_{\min}$
0.05	3.465	-5.995	2.68	-11.566	5.286	-4.715	2.632	-36.528	9.764	-5.380
0.1	3.891	-5.937	3.157	-11.113	5.839	-4.631	3.49	-31.089	10.804	-5.159
0.15	4.682	-5.885	4.032	-10.715	6.859	-4.531	4.827	-28.136	12.705	-4.884
0.2	5.994	-5.889	5.453	-10.575	8.538	-4.461	6.761	-27.077	15.784	-4.635
0.25	8.141	-6.035	7.739	-10.737	11.256	-4.593	9.674	-27.174	20.683	-4.465
0.3	11.836	-7.047	11.621	-11.163	15.853	-5.64	14.421	-28.057	28.797	-5.110
0.35	18.985	-9.571	19.067	-11.803	24.507	-8.035	22.809	-29.142	43.634	-7.409
0.4	36.318	-16.082	36.838	-16.324	44.706	-13.987	37.76	-28.065	76.624	-12.500

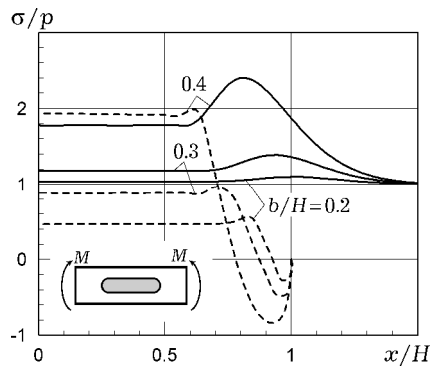


Рис. 6. Напруження в ізотропній смузі при чистому згині.

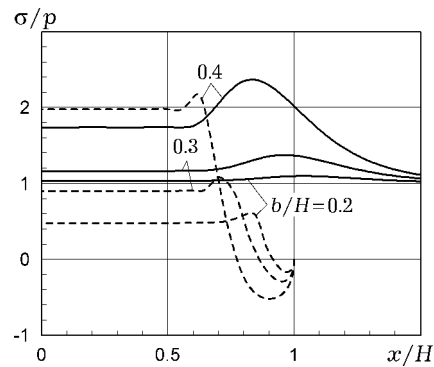


Рис. 7. Напруження в БЕ смузі при чистому згині.

Із наведених на рис. 6, рис. 7 результатів видно, що при  $b/H < 0.3$  відсутня концентрація напружень, причому максимальні напруження практично дорівнюють  $\sigma_0$ . При більших значеннях поперечних розмірів вирізів ( $b/H < 0.4$ ) виникає значна концентрація напружень, причому максимальні напруження виникають на прямолінійних межах смуги при  $x \approx \pm 0.9H$ , причому тут  $K_{KH} > 2$ .

**Висновки.** Розроблено підхід для дослідження напружень в анізотропній смузі з отворами, який базується на методі інтегральних рівнянь. Ядра рівнянь побудовано на розв'язках типу Гріна для смуги, внаслідок чого крайові умови на прямолінійних межах виконуються тотожно. Розв'язок Гріна зображено у вигляді суми полюсів та інтегралів від експоненційно загасаючих функцій на нескінченності. Досліджено напруження у композитних смугах, які виникають під дією зосереджених сил. Досліджено концентрацію напружень біля кругового отвору в композитних смугах залежно



від розміру отвору та орієнтації армувальних елементів відносно меж смуги. Встановлено випадки низької концентрації напружень біля видовжених отворів, призначених для зменшення матеріалосмності елементів композитних конструкцій, що перебувають в умовах згину.

1. *Лехницький С. Г.* Анизотропные пластинки. – Москва–Ленинград: ОГИЗ-Гостехиздат, 1947. – 352 с.  
Te same: *Lekhnitskii S. G.* Anisotropic plates. – New York, etc.: Gordon&Breach Sci. Pub., 1968. – 534 p.
2. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. – Москва: Гостехиздат, 1955. – 491 с.
3. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
4. *Суллим Г. Шевчук С.* Плоска задача для анизотропної смуги з тонким пружним анизотропним включенням // *Машинознавство*. – 2008. – № 3 (129). – С. 3–8.
5. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1979. – 560 с.  
Te same: *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1951. – 506 p.
6. *Baghestani A. M., Fotuhi A. R., Fariborz S. J.* Multiple interacting cracks in an orthotropic layer // *Arch. Appl. Mech.* – 2013. – **83**, No. 11. – P. 1549–1567.  
– <https://doi.org/10.1007/s00419-013-0761-6>.
7. *Brebbia C. A., Dominguez J.* Boundary elements: an introductory course. – Boston–Southampton: WIT Press, 1998. – 314 p.
8. *Huang H., Kardomateas G. A.* Stress intensity factors for a mixed mode center crack in an anisotropic strip // *Int. J. Fracture.* – 2001. – **108**, No. 4. – P. 367–381.  
– <https://doi.org/10.1023/A:1011006225367>.
9. *Hwu C.* Anisotropic elastic plates. – New York–Dordrecht–Heidelberg–London: Springer, 2010. – xvi+673 p.
10. *Jones R. M.* Mechanics of composite materials. – Philadelphia: Taylor&Francis, 1999. – xvi+519 p.
11. *Kaya A. C., Erdogan F.* Stress intensity factors and COD in an orthotropic strip // *Int. J. Fracture.* – 1980. – **16**, No. 2. – P. 171–190.  
– <https://doi.org/10.1007/BF00012620>.
12. *Maksymovych O. V., Dzyubyk A. R., Barvinska Kh. A., Dzyubyk L. V.* Determination of stress in composite plates with cracks on the basis of the method of integral equations and solutions by Green // *Наук. вісн. Нац. гірнич. ун-ту*. – 2019. – No. 5. – P. 65–73. – <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-5/9>.
13. *Maksymovych, O., Illiushyn O.* Stress calculation and optimization in composite plates with holes based on the modified integral equation method // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2017. – **83**. – P. 180–187.  
– <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2017.06.009>.
14. *Matbully M. S., Nassar M.* Elastostatic analysis of edge cracked orthotropic strips // *Acta Mech.* – 2003. – **165**, No. 1-2. – P. 17–25.  
– <https://doi.org/10.1007/s00707-003-0031-8>.

#### STRESS DETERMINATION IN AN ANISOTROPIC STRIP WITH HOLES USING SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS AND GREEN'S SOLUTION

*By making use of the successive approximation method (Schwartz algorithm) along with the Fourier integral transform, a Green-type solution is constructed for an anisotropic strip with a load-free boundary. The solution is expressed through the Lekhnitskii potentials with isolated poles. On the basis of the constructed solutions, singular integral equations are derived for anisotropic plates with holes in the manner that the boundary conditions on sides of the strip are fulfilled identically. These equations are solved numerically using the mechanical quadrature method. The stress concentration in composite plates in the vicinity of holes of different shape is analyzed.*

**Keywords:** anisotropic strip, holes, stress state, Green's solutions, method of integral equations.