

**ІНТЕНСИВНІСТЬ ДИНАМІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ
У ПЕРІОДИЧНО ШАРУВАТОМУ КОМПОЗИТІ З КРУГОВИМИ ТРІЩИНАМИ**

Розглянуто задачу про гармонічне навантаження скруту безмежного пружного композита з чергуванням плоских шарів із двох різних матеріалів за наявності кругової тріщини в одній із компонент періодичної структури. Шляхом задоволення інтегральними поданнями переміщень і напружень у частотній області умов періодичності та ідеального контакту на міжфазних поверхнях виведено систему незв'язаних граничних інтегральних рівнянь стосовно функцій тангенціального динамічного розкриття тріщини у двошаровому репрезентативному елементі композита. Чисельно проаналізовано динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень поздовжнього зсуву в околі тріщини залежно від хвильового числа, товщин складових шарів та властивостей їхніх матеріалів.

Ключові слова: пружний композит, періодична структура, кругові тріщини, крутне гармонічне навантаження, динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень поздовжнього зсуву, метод граничних інтегральних рівнянь.

Вступ. Пружні шаруваті або ламіновані композити широко використовують у багатьох галузях сучасної інженерії завдяки їхній міцності та деформативності [4, 6]. Особливої уваги заслуговують функціональні композити – метаматеріали та фононні кристали, пружні та хвильові властивості яких зумовлені впорядкованістю компонент, зокрема періодичним структуруванням. За динамічних навантажень у них виникають інтерференційні ефекти внаслідок множинного накладання відбитих та перенесених через періодичні міжфазні та внутрішні поверхні хвиль [5, 8, 15, 16].

У більшості випадків дослідження реакції пружних періодичних композитів на динамічні навантаження ґрунтується на розгляді їхнього репрезентативного елемента та врахуванні умов періодичності на його межі [11, 12, 19, 21, 23]. Особливості хвильового процесу, зокрема виникнення резонансних явищ від перевідбиття хвиль, описують дисперсійними співвідношеннями, отриманими шляхом задоволення крайових умов. За великої кількості періодичних компонент композитів дисперсійні співвідношення виводили за допомогою методу передавальних [7, 22] та глобальної [9, 10] матриць. Для періодично-шаруватого композита використовували теорему Флоке про структуру періодичних розв'язків у частотній області [1].

З точки зору механіки руйнування важливими є динамічні задачі для структурованих композитів за наявності дефектів типу тріщин. У [24] розглянуто сендвіч-композит із площиною дзеркальної симетрії, що містить поодинокую кругову тріщину. Для дослідження біматеріалів з тріщинами у частотній області ефективно застосовано метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР) [2, 5, 13, 14, 18] із поширенням аналізу [17] на випадок кругової тріщини у пружному шарі, розташованому між двома пружними півпросторами. Однак багатошарові композити з множинними тріщинами за гармонічного навантаження досі не вивчалися.

1. Постановка задачі. Розглянемо безмежний композит, складений із періодично повторюваних плоских пружних шарів A та B товщини h_D , $D = A, B$, за наявності у серединній площині кожного з шарів A плоскої кругової тріщини радіуса a по області S та розташуванням центрів всієї системи тріщин на одній осі (рис. 1). Матеріали шарів характеризуються модулями зсуву G_D , коефіцієнтами Пуассона ν_D і густинами ρ_D . На поверхнях поділу шарів виконуються умови ідеального механічного контак-

[✉] stan_volodja@yahoo.com

ту. Протилежні поверхні S^\pm усіх дефектів зазнають дії однакових самозрівноважених крутних зусиль, які змінюються в часі t за гармонічним законом $N_j^+(\mathbf{x}, t) = -N_j^-(\mathbf{x}, t) = (-1)^{j+1} N_0 x_{3-j} \exp(-i\omega t) / a$, $j = 1, 2$, $N_3^\pm(\mathbf{x}, t) = 0$ із циклічною частотою ω та сталою амплітудою N_0 , де $i^2 = -1$.

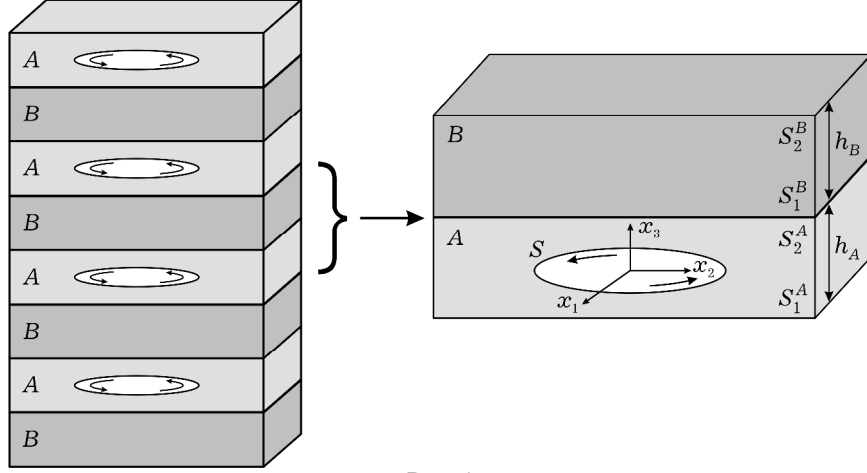


Рис. 1

Для врахування періодичності напружено-деформованого стану розглянутого композита виділено його репрезентативний двошаровий елемент (рис. 1) і сформульовано задачу в зайнятій ним області, обмеженій зовнішніми поверхнями S_1^A та S_2^B з міжфазною поверхнею $S_2^A = S_1^B$. Початок відліку пов'язаної з цим елементом системи координат $Ox_1x_2x_3$ розташовано у центрі тріщини, серединна площина шару A збігається з координатною площиною $x_3 = 0$.

За вказаного розташування тріщин і способу навантаження внаслідок відсутності дилатації в композиті генеруються лише поперечні горизонтально поляризовані або SH -хвилі, вертикальні компоненти u_3^D переміщень і нормальні напруження σ_{33}^D у кожному з шарів відсутні. Тоді після мультиплікативного введення у розв'язок гармонічної часової залежності задача зводиться до визначення в обох шарах амплітуд зсувних переміщень u_j^D , які задовольняють диференціальні рівняння Гельмгольца

$$\Delta_3 u_j^D + k_D^2 u_j^D = 0, \quad j = 1, 2, \quad D = A, B, \quad (1)$$

де $k_D = \omega / c_{2D}$ – хвильове число матеріалу шару D , $c_{2D} = \sqrt{G_D / \rho_D}$ – швидкість поширення поперечної пружної хвилі, $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – тривимірний оператор Лапласа.

Умови ідеального контакту на поверхні поділу шарів щодо зсувних компонент переміщень і дотичних напружень мають вигляд

$$\left. \begin{matrix} u_j^A(\mathbf{x}) \\ \sigma_{3j}^A(\mathbf{x}) \end{matrix} \right|_{x_3=h_A/2} = \left. \begin{matrix} u_j^B(\mathbf{x}) \\ \sigma_{3j}^B(\mathbf{x}) \end{matrix} \right|_{x_3=h_A/2}, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

умови періодичності на зовнішніх поверхнях репрезентативного елемента –

$$\left. \begin{matrix} u_j^A(\mathbf{x}) \\ \sigma_{3j}^A(\mathbf{x}) \end{matrix} \right|_{x_3=-h_A/2} = \left. \begin{matrix} u_j^B(\mathbf{x}) \\ \sigma_{3j}^B(\mathbf{x}) \end{matrix} \right|_{x_3=h_A/2+h_B}, \quad j=1,2, \quad (3)$$

а крутне навантаження на поверхнях тріщини описано умовами

$$\sigma_{3j}^A(x_1, x_2, x_3=0) = \frac{(-1)^{j+1}}{a} N_0 x_{3-j}, \quad j=1,2, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (4)$$

2. Побудова розв'язку. Розв'язки рівнянь (1) будемо як комбінації потенціалів Гельмгольца

$$u_j^D(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sum_{k=1}^2 \iint_{S_k^D} \alpha_{jk}^D(\mathbf{y}) U_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \delta_{AD} \bar{u}_j^A(\mathbf{x}) \right),$$

$$\bar{u}_j^A(\mathbf{x}) = \iint_S \Delta u_j(\mathbf{y}) U_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}, \quad j=1,2, \quad D=A,B. \quad (5)$$

Тут $U_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\exp(ik_D |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$ – фундаментальні розв'язки, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ – відстань між точкою спостереження \mathbf{x} і точкою інтегрування \mathbf{y} , δ_{AD} – символ Кронекера, невідомі густини α_{jk}^D характеризують зсувні переміщення точок міжфазної поверхні S_k^D , невідомі густини Δu_j визначають взаємне зміщення протилежних поверхонь S^\pm тріщини в напрямку координатних осей Ox_j :

$$\Delta u_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} (u_j(x_1, x_2, -0) - u_j(x_1, x_2, +0)), \quad j=1,2, \quad \mathbf{x} \in S.$$

Підставивши (5) у закон Гука, отримуємо інтегральні подання для напружень у шарах репрезентативного елемента:

$$\sigma_{3j}^D(\mathbf{x}) = (\Delta_2 + k_D^2) \left(\sum_{k=1}^2 \iint_{S_k^D} \alpha_{jk}^D(\mathbf{y}) U_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \delta_{AD} \bar{u}_j^A(\mathbf{x}) \right), \quad (6)$$

де $j=1,2$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – двовимірний оператор Лапласа.

Задовольнивши крайові умови ідеального контакту та періодичності (2), (3) інтегральними поданнями (5), (6), прийдемо до системи восьми ГІР типу згортки відносно невідомих функцій α_{jk}^D , Δu_j , $j, k=1,2$, $D=A,B$, в безмежній області $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Застосувавши до цих ГІР двовимірне інтегральне перетворення Фур'є за змінними x_1 та x_2 , отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно трансформант невідомих густин

$$\left\{ \begin{matrix} -1 \\ G_A R_A(\tau) \\ -H_A(\tau) \\ G_A R_A(\tau) H_A(\tau) \end{matrix} \right\} \tilde{\alpha}_{j1}^A(\tau) + \left\{ \begin{matrix} H_A(\tau) \\ G_A R_A(\tau) H_A(\tau) \\ 1 \\ G_A R_A(\tau) \end{matrix} \right\} \tilde{\alpha}_{j2}^A(\tau) +$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} H_B(\tau) \\ -G_B R_B(\tau) H_B(\tau) \\ 1 \\ -G_B R_B(\tau) \end{matrix} \right\} \tilde{\alpha}_{j1}^B(\tau) + \left\{ \begin{matrix} -1 \\ -G_B R_B(\tau) \\ -H_B(\tau) \\ -G_B R_B(\tau) H_B(\tau) \end{matrix} \right\} \tilde{\alpha}_{j2}^B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \begin{matrix} \tilde{f}_{1j} \\ \tilde{f}_{2j} \\ \tilde{f}_{3j} \\ \tilde{f}_{4j} \end{matrix} \right\}. \quad (7)$$

Тут хвилькою позначено трансформанту відповідної функції,

$$f_{\{3j\}^{(1j)}} = -\frac{\partial}{\partial x_3} \bar{u}_j^A(\mathbf{x}), \quad f_{\{4j\}^{(2j)}} = -G_A R_A^2(\tau) \bar{u}_j^A(\mathbf{x}), \quad x_3 = \mp \frac{h_A}{2},$$

$$R_D(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - k_D^2}, & \tau \geq k_D, \\ -i\sqrt{k_D^2 - \tau^2}, & k_D < \tau, \end{cases} \quad H_D(\tau) = \exp(-h_D R_D(\tau)),$$

$$j = 1, 2, \quad D = A, B.$$

Застосувавши до розв'язків системи рівнянь (7) обернене двовимірне інтегральне перетворення Фур'є, отримали інтегральне зображення густин α_{jk}^A через невідомі функції Δu_j динамічного розкриття тріщини у вигляді

$$\alpha_{jk}^A(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{nj}(\mathbf{y}) \int_0^{\tau} \frac{\tau}{\Delta(\tau)} c_{kn}(\tau) J_0(\tau |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\tau dS_{\mathbf{y}}, \quad (8)$$

де $j, k = 1, 2$, $J_0(\rho)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку, а ядра $c_{kn}(\tau)$ мають таку структуру:

$$c_{\{11\}^{(13)}}(\tau) = -c_{\{23\}^{(21)}}(\tau) = G_B R_B(\tau) \left(G_A R_A(\tau) L_{\{1\}^{(3)}}(\tau) \pm G_B R_B(\tau) L_2(\tau) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ H_A(\tau) \end{matrix} \right\} \right),$$

$$c_{\{12\}^{(14)}}(\tau) = c_{\{24\}^{(22)}}(\tau) = -G_B R_B(\tau) L_{\{1\}^{(3)}}(\tau) \mp G_A R_A(\tau) L_2(\tau) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ H_A(\tau) \end{matrix} \right\},$$

$$L_1(\tau) = 1 + H_B^2(\tau) - 2H_A(\tau)H_B(\tau), \quad L_2(\tau) = 1 - H_B^2(\tau),$$

$$L_3(\tau) = H_A(\tau) - 2H_B(\tau) + H_A(\tau)H_B^2(\tau), \quad \Delta(\tau) = -\Delta_1(\tau)\Delta_2(\tau),$$

$$\Delta_{\{1\}^{(2)}}(\tau) = G_A R_A(1 \pm H_A(\tau))(1 \mp H_B(\tau)) + G_B R_B(1 \mp H_A(\tau))(1 \pm H_B(\tau)).$$

Підставивши співвідношення (8) у формули (6), отримуємо інтегральні подання напружень σ_{3j}^A у шарі A лише через функції Δu_j . Скориставшись аналітичними значеннями наявних у цих поданнях інтегралів [3] і задовольнивши умови (4), виведемо систему двох незв'язаних ГІР в обмеженій області S для визначення тангенціальних розкриттів тріщини Δu_j

$$\iint_S \Delta u_j(\mathbf{y})(F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})) dS_{\mathbf{y}} = \frac{(-1)^{j+1} N_0 x_{3-j}}{G_A a}, \quad \mathbf{x} \in S, \quad j = 1, 2. \quad (9)$$

Тут

$$F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1 - ik_A |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \frac{\exp(ik_A |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3},$$

$$F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\tau R_A(\tau) H_A(\tau)}{\Delta_1(\tau)} \Omega(\tau) J_0(\tau |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\tau,$$

$$\Omega(\tau) = G_A R_A(\tau)(1 - H_B(\tau)) - G_B R_B(\tau)(1 + H_B(\tau)).$$

Ядро F_1 є таким самим, як для аналогічної задачі у частотній області для тріщини у безмежному пружному однорідному середовищі, а ядро F_2 інтегрально описує динамічну взаємодію відлікової тріщини як з періодичними міжфазними поверхнями, так і з тріщинами поза репрезентативним елементом, виконуючи роль періодичної функції Гріна задачі. Дисперсійна

функція $\Delta_1(\tau)$ відображає резонансний характер хвильового процесу внаслідок суперпозиції поперечно-поляризованих хвиль, перевідбитих на множинних міжфазних поверхнях і тріщинах у періодичній системі.

Для регуляризації ГІР (9) із сингулярностями в ядрі F_1 та їх пристосування до числового розрахунку розкриття тріщини $\Delta u_j(\mathbf{x})$ подамо у формі

$$\Delta u_j(\mathbf{x}) = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \beta_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2,$$

де $\beta_j(\mathbf{x})$ – невідомі функції. Цим забезпечується як природне змикання протилежних поверхонь тріщини на її контурі, так і диференційованість нових шуканих розв'язків $\beta_j(\mathbf{x})$ в області S . На цій основі через розвинення в ряд експоненційної функції у ядрі F_1 в околі точки джерела $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ система (9) з явно виділеними особливостями записується таким чином:

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - y_1^2 - y_2^2}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \beta_j(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \frac{k_A^2}{2} \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - y_1^2 - y_2^2}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \beta_j(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \\ & + \iint_S \sqrt{a^2 - y_1^2 - y_2^2} \beta_j(\mathbf{y}) \left(F_1(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} + \frac{k_A^2}{2|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \right. \\ & \left. + F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) dS_{\mathbf{y}} = \frac{(-1)^{j+1} N_0 x_{3-j}}{G_A a}, \quad \mathbf{x} \in S, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

ГІР (10) містять інтеграли з гіперсингулярністю порядку $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-3}$ і слабкою сингулярністю порядку $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}$ у формі статичних потенціалів, процедура регуляризації яких є відомою [18].

Для числового розв'язання ГІР (10) кругова область S тріщини в полярній системі координат покривалась чотирикутними граничними елементами з кроком розбиття $\Delta r = a/10$ за радіальною координатою і $\Delta\varphi = \pi/12$ за кутовою координатою. В межах граничних елементів значення функцій β_j приймали кусково-сталими. Спосіб обчислення з достатньою точністю півбезмежного інтеграла у ядрі F_2 описано в роботі [17]. Колокаційним задоволенням ГІР (10) у вузлових точках посередині граничних елементів задача зводилась до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих дискретних значень функцій β_j . За їх допомогою визначались динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень (ДКІН) поздовжнього зсуву в околі відлікової тріщини за формулою

$$K_{III}(\varphi) = -2G_A \pi \sqrt{\pi a} (\beta_1(\mathbf{x}) \sin \varphi - \beta_2(\mathbf{x}) \cos \varphi) \Big|_{\substack{x_1 = a \cos \varphi \\ x_2 = a \sin \varphi}},$$

де φ – кутова координата точки контуру тріщини. Для розглянутої осесиметричної задачі у тривимірній постановці залежність від кутової координати є формальною і використовувалась у подальшому для верифікації числового розв'язку через спостереження відсутності зміни ДКІН вздовж контуру тріщини для введеної сітки граничних елементів.

3. Числові результати. Розглянемо композит із параметрами $\rho_A = \rho_B$, $\nu_A = \nu_B$. На рис. 2 наведено нормовані амплітуди ДКІН $\bar{K}_{III} = |K_{III}| / K_{III}^*$, де $K_{III}^* = (4/3)N_0 \sqrt{a/\pi}$ – КІН статичної задачі про тріщину скруту в безмежному просторі, на частотному спектрі $k_A a$ для різних значень контрастності $G = G_A/G_B$ модулів зсуву матеріалів шарів та за фіксації

їхніх товщин. Маркована крива відповідає випадку безмежного простору з поодинокую тріщиною скруту [20].

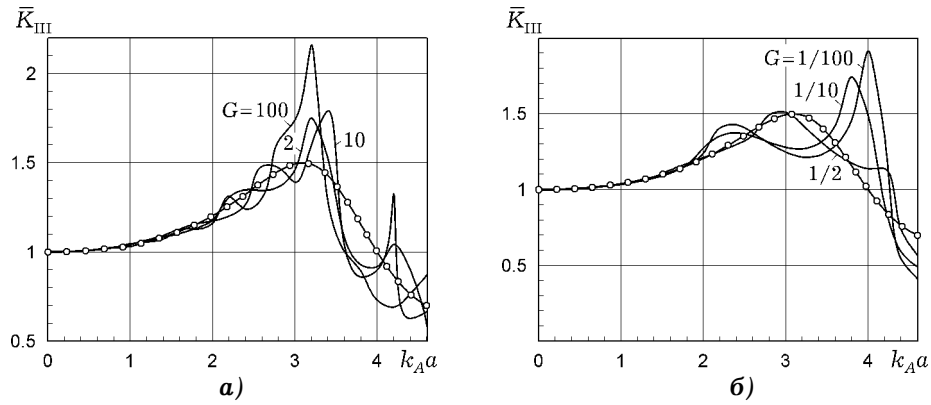


Рис. 2. Залежності нормованих амплітуд ДКІН \bar{K}_{III} від хвильового числа $k_A a$ для фіксованих товщин шарів $h_A = 3a$, $h_B = 2a$ при $G > 1$ (а), $G < 1$ (б).

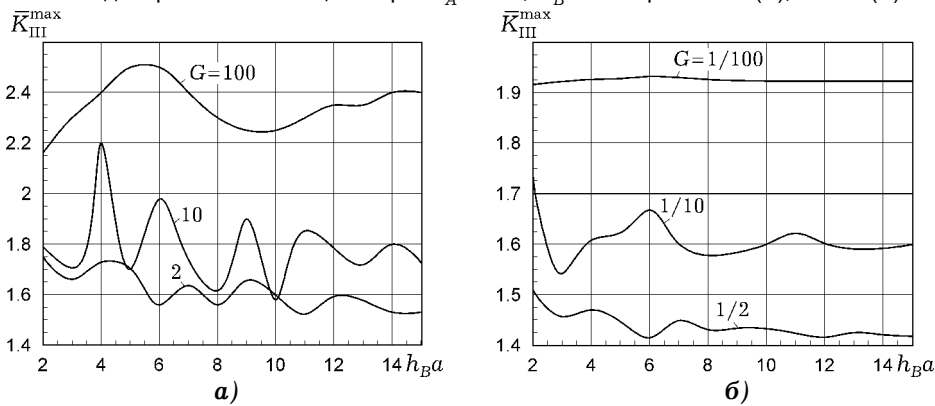


Рис. 3. Залежності максимумів нормованих амплітуд ДКІН \bar{K}_{III}^{\max} для тріщин у шарах із фіксованою товщиною $h_A = 3a$ від товщини h_B/a прилеглих шарів при $G > 1$ (а), $G < 1$ (б).

Аналіз графіків у розглянутому частотному діапазоні показує, що для тріщин у жорсткіших шарах поведінка амплітуд ДКІН характеризується множинністю пікових значень ДКІН (рис. 2а) від резонансного впливу прилеглих податливих компонент композита. У випадку тріщин у податливіших шарах (рис. 2б) спостережено два локальні максимуми \bar{K}_{III} . За збільшення контрастності матеріалів абсолютні пікові значення ДКІН зростають і перевищують аналоги для безмежного однорідного тіла з тріщиною, тоді ж для випадку $G < 1$ спостерігається домінування другого максимуму ДКІН над першим. Водночас існують частоти навантаження, за яких амплітуди ДКІН менші від аналогів для безмежного однорідного тіла з тріщиною (екрануючий ефект щодо тріщин міжфазних поверхонь).

На рис. 3 наведено залежності абсолютних максимумів \bar{K}_{III}^{\max} ДКІН на розглянутому спектрі частот від товщин h_B шарів B за фіксованого значення $h_A = 3a$ товщин шарів A з тріщинами. Ці залежності мають осцилюючий характер, осциляції є більш виразними для випадку жорсткіших шарів A з дефектами. За подальшого зростання товщин суміжних шарів B максимуми ДКІН прямують до аналогів для випадку тріщини в шарі A , обмеженому півпросторами B .

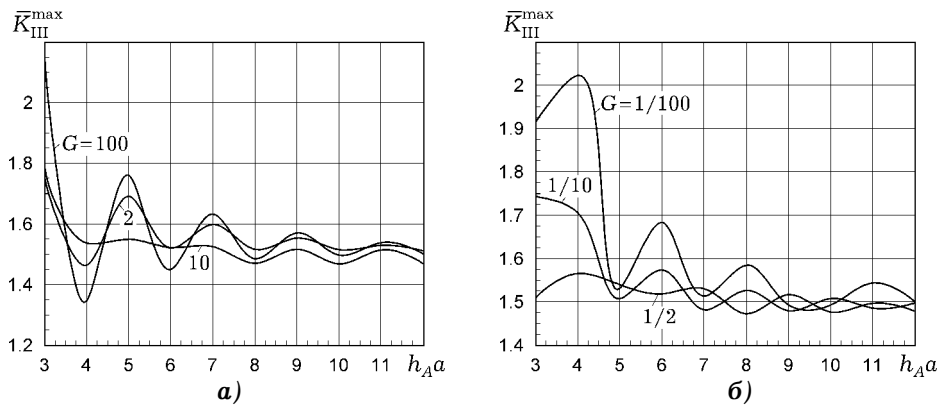


Рис. 4. Залежності максимумів нормованих амплітуд ДКІН \bar{K}_{III}^{\max} від товщини h_A/a шарів з тріщинами для фіксованої товщини $h_B = 2a$ прилеглих шарів при $G > 1$ (а), $G < 1$ (б).

На рис. 4 показано зміну максимумів \bar{K}_{III}^{\max} за збільшення товщин шарів A та фіксованого значення $h_B = 2a$. Вплив контрастності жорсткостей матеріалів на \bar{K}_{III}^{\max} є найбільш виразним для тріщин у податливіших шарах (рис. 4б). Для великих товщин шарів A значення \bar{K}_{III}^{\max} прямують до аналогів для безмежного однорідного простору з тріщиною скруту [20]. Аналогічні залежності ДКІН від товщини шару раніше зауважені для випадку тріщини у трьохкомпонентному композиті з пружного шару між двома півпросторами [17].

Висновки. Задачу дослідження впливу крутих гармонічних навантажень на динамічні напруження у безмежному періодичному двокомпонентно-шаруватому композиті з тріщинами в одній із компонент зведено до гранично-інтегрального формулювання для репрезентативного двошарового елемента з поодиноким дефектом. В отриманих ГРП відносно функцій тангенціального розкриття тріщин їхня динамічна взаємодія між собою та з періодичними міжфазними поверхнями описується регулярними ядрами в явній формі. Шляхом числового розв'язання ГРП проаналізовано ДКІН поздовжнього зсуву в околі тріщин та виявлено їхні осцилюючі залежності від частоти навантаження і товщин складових шарів та виразніший характер осциляцій зі збільшенням кількості резонансів у випадку розташування тріщин у жорсткіших шарах композита. Встановлено окремі частотні діапазони гармонічного навантаження, за яких ДКІН у композиті менші ніж в однорідному тілі з тріщиною, що можна інтерпретувати як ефект зміцнення структури композита.

Роботу виконано за підтримки бюджетної програми України «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

1. Роганов Ю. В., Роганов В. Ю. Распространение волн в периодических жидко-твердых слоистых средах // Геофиз. журнал. – 2016. – 38, № 6. – С. 101–117.
2. Станкевич В. З. Інтенсивність напружень біля тріщини в композиції півпростору і шару під гармонічним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – 44, № 2. – С. 27–32.
The same: Stankevych V. Z. Stress intensity near a crack in the composition of a half space and a layer under harmonic loading // Mater. Sci. – 2008. – 44, No. 2. – P. 175–182. – <https://doi.org/10.1007/s11003-008-9065-3>.
3. Станкевич В. З. Обчислення деяких двовимірних інтегралів, характерних для динамічних задач теорії тріщин в півбезмежному тілі // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1995. – 38. – С. 56–61.

- Te same: *Stankevich V. Z.* Computation of certain double integrals that are characteristic of dynamic problems of the theory of cracks in a semi-infinite body // *J. Math. Sci.* – 1996. – **81**, No. 6. – P. 3048–3052.
– <https://doi.org/10.1007/BF02362592>.
4. *Datta S. K., Shah A. H.* Elastic waves in composite media and structures with applications to ultrasonic nondestructive evaluation. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 336 p.
 5. *Golub M. V., Doroshenko O. V.* Boundary integral equation method for simulation scattering of elastic waves obliquely incident to a doubly periodic array of interface delaminations // *J. Comput. Phys.* – 2019. – **376**. – P. 675–693.
– <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.003>.
 6. *Gopalakrishnan S.* Wave propagation in materials and structures. – Boca Raton: CRC Press, 2016. – 971 p.
 7. *Haskell N. A.* The dispersion of surface waves on multilayered media // *Bull. Seism. Soc. Am.* – 1953. – **43**, No. 1. – P. 17–34.
 8. *Hu R., Oskay C.* Multiscale nonlocal effective medium model for in-plane elastic wave dispersion and attenuation in periodic composites // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2019. – **124**. – P. 220–243. – <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.10.014>.
 9. *Knopoff L.* A matrix method for elastic wave problems // *Bull. Seism. Soc. Am.* – 1964. – **54**, No. 1. – P. 431–438.
 10. *Mal A. K., Knopoff L.* A differential equations for surface waves in layers with varying thickness // *J. Math. Anal. App.* – 1968. – **21**, No. 2. – P. 431–444.
– [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(68\)90227-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(68)90227-8).
 11. *Maragoni L., Carraro P. A., Quaresimin M.* Periodic boundary conditions for FE analyses of a representative volume element for composite laminates with one cracked ply and delaminations // *Compos. Struct.* – 2018. – **201**. – P. 932–941.
– <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.06.058>.
 12. *Matysiak S. J., Perkowski D. M.* Crack normal to layered elastic periodically stratified space // *Theor. Appl. Fract. Mec.* – 2008. – **50**, No. 3. – P. 220–225.
– <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2008.07.009>.
 13. *Menshykova M. V., Menshykov O. V., Guz I. A.* Modelling crack closure for an interface crack under harmonic loading // *Int. J. Fract.* – 2010. – **165**. – P. 127–134.
– <https://doi.org/10.1007/s10704-010-9492-7>.
 14. *Mikucka M., Menshykov O.* Elastodynamic contact problem for an interface crack under an oblique harmonic loading // *Int. J. Mech. Sci.* – 2014. – **88**. – P. 300–308.
– <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.05.008>.
 15. *Morini L., Eyzat Y., Gei M.* Negative refraction in quasicrystalline multilayered metamaterials // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2019. – **124**. – P. 282–298.
– <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.10.016>.
 16. *Mykhas'kiv V. V., Zhabadynskiy I. Ya., Zhang Ch.* On propagation of time-harmonic elastic waves through a double-periodic array of penny-shaped cracks // *Eur. J. Mech. A-Solid.* – **73**. – P. 306–317.
– <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.09.009>.
 17. *Mykhas'kiv V., Stankevych V.* Elastodynamic problem for a layered composite with penny-shaped crack under harmonic torsion // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* – 2019. – **99**, No. 5. – Art. e201800193.
– <https://doi.org/10.1002/zamm.201800193>.
 18. *Mykhas'kiv V., Zhabadynskiy I., Zhang Ch.* Elastodynamic analysis of multiple crack problem in 3-D bi-materials by a BEM // *Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng.* – 2010. – **26**, No. 12. – P. 1934–1946. – <https://doi.org/10.1002/cnm.1285>.
 19. *Ryvkin M., Aboudi J.* Stress redistribution due to cracking in periodically layered composites // *Eng. Fract. Mech.* – 2012. – **93**. – P. 225–238.
– <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.07.013>.
 20. *Sih G. C., Loeber J. F.* Torsional vibration of an elastic solid containing a penny-shaped crack // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1968. – **44**, No. 5. – P. 1237–1245.
– <https://doi.org/10.1121/1.1911253>.
 21. *Thierry V., Brown L., Chronopoulos D.* Multi-scale wave propagation modelling for two-dimensional periodic textile composites // *Compos. Part B-Eng.* – 2018. – **150**. – P. 144–156. – <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.05.052>.
 22. *Thomson W. T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // *J. Appl. Phys.* – 1950. – **21**, No. 2. – P. 89–93.
– <https://doi.org/10.1063/1.1699629>.

23. Tian W., Qi L., Chao X., Liang J., Fu M. Periodic boundary condition and its numerical implementation algorithm for the evaluation of effective mechanical properties of the composites with complicated micro-structures // *Compos. Part B-Eng.* – 2019. – **162**. – P. 1–10. – <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.10.053>.
24. Yu H. Y., Cooper K. P. Dynamic penny-shaped cracks in multilayer sandwich composites // *Theor. Appl. Fract. Mec.* – 2009. – **51**, No. 3. – P. 181–188. – <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2009.05.003>.

INTENSITY OF DYNAMIC STRESSES OF LONGITUDINAL SHEAR MODE IN A PERIODICALLY-LAYERED COMPOSITE WITH PENNY-SHAPED CRACKS

A problem on the torsional harmonic loading of an infinite elastic composite formed by alternation of plane layers of two dissimilar materials is considered in the presence of a penny-shaped crack in one of the components of the periodic structure. By using the integral representations of displacements and stresses in the frequency domain and satisfying the periodicity conditions and ideal contact conditions at the interfaces, a system of uncoupled boundary integral equations is derived for to the tangential dynamic crack openings in a two-layered representative element of composite. The mode-III dynamic stress intensity factors in the crack vicinities are analyzed numerically depending on the wave number, the thicknesses of constituent layers, and combination of their materials.

Keywords: *elastic composite, periodic structure, penny-shaped cracks, torsional harmonic loading, mode-III dynamic stress intensity factor, boundary integral equation method.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.03.20