

ОСЕСИМЕТРИЧНІ РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ І ВІБРОРОЗІГРІВ ПОДАТЛИВОЇ ДО ЗСУВУ НЕПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З П'ЄЗОАКТУАТОРАМИ ПРИ ЖОРСТКОМУ ЗАКРІПЛЕННІ ЇЇ ТОРЦІВ

Розглядається задача про осесиметричні резонансні коливання податливої до зсуву непружної циліндричної оболонки з п'єзоактуаторами при електромеханічному моногармонічному навантаженні. Враховуються деформації поперечного зсуву, інерція повороту нормального елемента та температурна залежність комплексних модулів п'єзопасивного та п'єзоактивного матеріалів. Нелінійна задача розв'язується за допомогою ітераційного підходу, в рамках якого система звичайних диференціальних рівнянь, до яких зводиться задача коливань, розв'язується із залученням ітераційної процедури за часом, а інтегрування нестационарного рівняння теплопровідності здійснюється методом скінченних різниць. Досліджується вплив врахування деформації зсуву і температури вібророзігріву на амплітудно- і температурно-частотні характеристики та активне демпфування резонансних коливань оболонки за допомогою п'єзоактуаторів.

Ключові слова: резонансні коливання, дисипативний розігрів, циліндрична оболонка, п'єзоактуатор, зсув.

Вступ. У сучасній техніці для гасіння вимушених коливань тонкостінних елементів конструкцій поряд з пасивними широко застосовують також і методи активного демпфування за допомогою п'єзоелектричних актуаторів [11, 15, 16]. На електроди таких актуаторів подається різниця електричних потенціалів відповідної амплітуди і фази з частотою механічного навантаження з метою підсилення або зменшення амплітуди механічних коливань найбільш енергоємних мод. Коливні процеси при експлуатації тонкостінних елементів, зокрема виготовлених із в'язкопружних полімерних і композитних матеріалів із низькою зсувною жорсткістю, супроводжуються дисипативним розігрівом, спричиненим гістерезисними втратами.

Важливими факторами, які можуть істотно вплинути на демпфування коливань тонкостінного елемента, є чутливість конструкційних матеріалів до деформацій поперечного зсуву, температурна залежність їхніх в'язкопружних характеристик, умови механічного закріплення і теплообміну.

Побудова електротермомеханічних моделей в неklasичній та уточненій постановках і розв'язки конкретних задач про вимушені коливання і дисипативний розігрів коливань тонкостінних шаруватих балок, пластинок і оболонок та їх демпфування п'єзоактивними складовими містяться в оригінальних монографіях [3, 6] і багатьох журнальних статтях [7–10, 14, 15 та ін.]. Результати більшості з цих робіт знайшли відображення в оглядах [4, 5, 13]. Зокрема, в класичній постановці задачі про осесиметричні резонансні коливання в'язкопружних циліндричних оболонок з п'єзоактуаторами розглядаються у статтях [7–9].

У цій статті в рамках уточненої постановки розв'язується задача про вимушені коливання і дисипативний розігрів податливої до зсуву в'язкопружної оболонки з п'єзоактивними актуаторами при жорсткому закріпленні її торців. Досліджується вплив деформацій поперечного зсуву, температурних залежностей електромеханічних властивостей пасивного і п'єзоактивного матеріалів, розмірів актуатора на амплітудні і температурні частотні характеристики коливань оболонки.

1. Постановка задачі. Основні рівняння. Розглянемо тришарову циліндричну оболонку, складену з пасивного (без п'єзо ефекту) трансверсаль-

✉ y.zhuk@i.ua

но-ізотропного в'язкопружного шару товщини h_0 і жорстко скріплених з його поверхнею п'єзоелектричних шарів товщини h_1 . Оболонка довжини ℓ віднесена до ортогональної системи координат α, θ, z з координатою $z = 0$ на серединній поверхні радіуса R пасивного шару. П'єзошари (актуатори) виготовлені із протилежно поляризованої по товщині в'язкопружної п'єзо-кераміки з однаковими властивостями, за винятком п'єзомодулів, які мають протилежні знаки. Вважаємо, що внутрішній п'єзошар $z \leq -h_0/2$ характеризується п'єзомодулем $+d_{31}$, а зовнішній п'єзошар $z \geq -h_0/2$ – п'єзомодулем $-d_{31}$. На поверхнях п'єзошарів нанесено суцільні електроди, які нескінченно тонкими коловими розрізами з повздовжніми координатами α_1, α_2 розділені на ділянки. Електроди, що контактують з поверхнями пасивного шару, підтримуються при нульовому електричному потенціалі $\phi(\pm h_0/2) = 0$.

Оболонка навантажена поверхневим тиском $q_z = q_0(\alpha) \cos \omega t$, що гармонічно змінюється за часом t з коловою частотою ω , близькою до резонансної. Для нейтралізації дії цього навантаження до електродованих колових ділянок на поверхнях $z = \pm(h_1 + h_0/2)$ ширини $\Delta_\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ з тою самою частотою ω і протилежною фазою підводиться різниця потенціалів з амплітудою $\pm V_\alpha$. На ділянках $\alpha < \alpha_1$ і $\alpha > \alpha_2$ електроди закорочені ($V_\alpha = 0$). Торці оболонки вільні в тангенціальному напрямку і жорстко закріплені в поперечному. На її граничних поверхнях реалізуються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем температури T_c . В'язкопружну поведінку пасивного та п'єзоактивного матеріалів моделюємо з використанням концепції комплексних модулів, складові яких залежать від температури вібророзігріву.

Електромеханічну поведінку розглядуваної оболонки описуємо на основі теорії шаруватих оболонок типу С. П. Тимошенка, що враховує деформації поперечного зсуву та інерцію повороту нормального елемента. Щодо електричних величин в п'єзошарах вважаємо, що складовими вектора індукції D_α і D_θ можна знехтувати. При цьому з рівнянь електростатики випливає, що нормальна складова $D_z = \text{const}$ у п'єзошарах не залежить від товщинної координати z [3]. Складові E_α і E_θ вектора електричної напруженості знаходимо з тривіальних визначальних рівнянь $D_\alpha = 0, D_\theta = 0$ для поляризованої по товщині п'єзокераміки. Температуру дисипативного розігріву оболонки вважаємо постійною по товщині пакету шарів.

На основі прийнятих припущень відносно комплексних електромеханічних величин постановка задачі про вимушені гармонічні коливання розглядуваної оболонки зводиться до

– *рівнянь руху* (множник $e^{i\omega t}$ опускаємо):

$$\begin{aligned} \frac{dN_\alpha}{d\alpha} + \rho_\bullet \omega^2 u = 0, \quad \frac{dQ_\alpha}{d\alpha} - \frac{N_\theta}{R} + \rho_{\bullet\bullet} \omega^2 w + q_z = 0, \\ \frac{dM_\alpha}{d\alpha} - Q_\alpha + \rho_{\bullet\bullet} \omega^2 \psi_\alpha = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

– *визначальних співвідношень для зусиль і моментів*:

$$\begin{aligned} N_\alpha = C_{11}\varepsilon_\alpha + C_{12}\varepsilon_\theta, \quad N_\theta = C_{12}\varepsilon_\alpha + C_{11}\varepsilon_\theta, \quad Q_\alpha = k_s C_{44}\varepsilon_{\alpha z}, \\ M_\alpha = D_{11}\chi_\alpha + M_E, \quad M_\theta = D_{12}\chi_\alpha + M_E; \end{aligned} \quad (2)$$

– *залежностей між амплітудними значеннями деформацій і переміщень*:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{du}{d\alpha}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}, \quad x_\alpha = \frac{d\psi_\alpha}{d\alpha}, \quad \vartheta_\alpha = -\frac{dw}{d\alpha}, \quad \varepsilon_{\alpha z} = \psi_\alpha - \vartheta_\alpha; \quad (3)$$

– виразів для електричної індукції відповідно у внутрішньому і зовнішньому п'єзошарах:

$${}^{1,2}D_z = -b_{33} \frac{V_\alpha}{h_1} \pm b_{31}(\varepsilon \mp h_1 x_\alpha), \quad z \leq -h_0/2, \quad z \geq h_0/2; \quad (4)$$

– усередненого за період коливань і по товщині оболонки рівняння теплопровідності:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} - \frac{2\tilde{\alpha}_s}{\lambda H} (T - T_c) + \frac{\omega}{2\lambda H} \langle W \rangle \quad (5)$$

з дисипативною функцією

$$\begin{aligned} \langle W \rangle = & N''_\alpha \varepsilon'_\alpha - N'_\alpha \varepsilon''_\alpha + N''_\theta \varepsilon'_\theta - N'_\theta \varepsilon''_\theta + M''_\alpha x'_\alpha - M'_\alpha x''_\alpha + \\ & + Q''_\alpha \varepsilon'_{\alpha z} - Q'_\alpha \varepsilon''_{\alpha z} + ({}^1D''_z + {}^2D''_z) V'_\alpha - ({}^1D'_z + {}^2D'_z) V''_\alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Механічні граничні умови мають вигляд

$$N_\alpha = 0, \quad w = 0, \quad \psi_\alpha = 0. \quad (7)$$

Граничні і початкові умови для рівняння теплопровідності запишемо так:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha} = & \pm \tilde{\alpha}_{0,\ell} (T - T_c), \quad \alpha = 0, \ell, \\ T = & T_0, \quad t = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

У співвідношеннях (1)–(8) введено такі позначення:

$$\begin{aligned} C_{1n} = & c_{1n} h_0 + 2c_{1n}^E h_1, \quad C_{44} = G_{\alpha z} h_0 + 2c_{44}^E h_1, \\ D_{1n} = & \frac{c_{1n} h_0^3 + 2c_{1n}^E \bar{h}_{13} + 2\gamma_{33} h_1^3}{12}, \quad c_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad c_{12} = \nu c_{11}, \\ c_{11}^E = & \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)}, \quad c_{12}^E = \nu_E c_{11}^E, \quad \nu_E = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}, \\ c_{44}^E = & \frac{1}{s_{44}^E - d_{15}^2 / \varepsilon_{11}^T}, \quad b_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu_E)}, \quad b_{33} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2), \\ k_p^2 = & \frac{2d_{31} b_{31}}{\varepsilon_{33}^T}, \quad \gamma_{33} = \frac{b_{31}^2}{b_{33}}, \quad \rho_\bullet = 2\rho_1 h_1 + \rho_0 h_0, \\ \rho_{\bullet\bullet} = & \frac{2\rho_1 \bar{h}_{13} + \rho_\bullet h_0^3}{12}, \quad \bar{h}_{13} = 4h_1^3 + 6h_1^2 h_0 + 3h_1 h_0^2, \quad \bar{h}_1 = \frac{h_0 + h_1}{2}, \\ H = & 2h_1 + h_0, \quad M_E = -2h_1 b_{31} V_\alpha, \quad \varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\theta. \end{aligned}$$

Тут $s_{kk}^E = s'_{kk} (1 - i\delta_{kk}^s)$, $d_{ik} = d'_{ik} (1 - i\delta_{ik}^d)$, $\varepsilon_{kk}^T = \varepsilon'_{kk} (1 - i\delta_{kk}^\varepsilon)$ – залежні від температури комплексні податливості, п'єзомодулі та діелектричні проникності п'єзокераміки; $\nu = \text{const}$ – коефіцієнт Пуассона, а $E = E' + iE''$ і $G_{\alpha z} = G'_{\alpha z} + iG''_{\alpha z}$ – температурозалежні комплексні модулі Юнга і поперечного зсуву пасивного матеріалу; k_s – коефіцієнт поперечного зсуву; $w = w' + iw''$, $u = u' + iu''$ і $\psi_\alpha = \psi'_\alpha + i\psi''_\alpha$ – комплексні амплітуди прогину, поздовжнього переміщення і кута повороту недеформованого нормального

елемента; N_α , N_0 , Q_α і M_α , M_0 – аналогічні амплітуди зусиль і згинальних моментів; ρ_0 і ρ_1 – питомі густини пасивного шару і п'єзоактуторів; λ і a – усереднені коефіцієнти тепло- і температуропровідності; $\tilde{\alpha}_s = \frac{\tilde{\alpha}_+ + \tilde{\alpha}_-}{2}$; $\tilde{\alpha}_\pm$, $\tilde{\alpha}_{0,\ell}$ – коефіцієнти теплообміну на відповідних поверхнях і торцях оболонки; T_0 – початкова температура оболонки. Тут і далі застосовуємо стандартні позначення комплексних величин: $a = a' + ia''$, $|a| = (a'^2 + a''^2)^{1/2}$, $i = \sqrt{-1}$.

2. Побудова розв'язку задачі. Після деяких перетворень рівняння гармонічних коливань (1)–(3) для чисельного розв'язання поставленої задачі подамо у формі звичайних диференціальних рівнянь нормального вигляду відносно комплексних величин N_α , Q_α , M_α , u , w , ψ_α :

$$\begin{aligned} \frac{dN_\alpha}{d\alpha} &= -\rho_s \omega^2 u, & \frac{dQ_\alpha}{d\alpha} &= \frac{1}{R} \left(\tilde{C}_{12} N_\alpha - \tilde{C}_{11} \frac{W}{R} \right) - q_z - \rho_s \omega^2 w, \\ \frac{dM_\alpha}{d\alpha} &= Q_\alpha - \rho_s \omega^2 \psi_\alpha, & \frac{du}{d\alpha} &= J_C N_\alpha - \tilde{C}_{12} \frac{W}{R}, \\ \frac{d\psi_\alpha}{d\alpha} &= J_D (M_\alpha - M_E), & \frac{dw}{d\alpha} &= -\psi_\alpha + J_{SD} Q_\alpha, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$J_C = \frac{1}{C_{11}}, \quad J_D = \frac{1}{D_{11}}, \quad \nu_C = \frac{C_{12}}{C_{11}}, \quad \tilde{C}_{11} = C(1 - \nu^2), \quad J_{SD} = \frac{1}{k_s C_{44}}.$$

При врахуванні залежності електромеханічних властивостей матеріалів від температури дисипативного розігріву рівняння (9) вимушених коливань оболонки і теплопровідності (5), (6) будуть взаємозв'язаними і нелінійними. Для їх розв'язання використовуємо метод покрокового інтегрування за часом [3, 6]. При цьому на кожному кроці Δt за часом комплекснозначну систему рівнянь електромеханіки (9) з граничними умовами (7) інтегруємо чисельним методом дискретної ортогоналізації [2] з використанням типової програми розв'язування звичайних диференціальних рівнянь. На першому кроці розв'язуємо задачу при ізотермічних характеристиках матеріалів ($T = T_0$). На другому кроці обчислюємо дисипативну функцію (6) і задачу теплопровідності (5), (8) розв'язуємо методом скінченних різниць з використанням явної схеми. Далі, на основі отриманого розподілу температури обчислюємо жорсткісні характеристики і процес повторюємо на наступному кроці за часом. При чисельній реалізації такого підходу використовуємо безрозмірні просторову $x = \alpha/\ell$ і часову $\tau = at/\ell^2$ координати, а також параметри теплообміну Біо $(\gamma_s)_{0,\ell} = (\tilde{\alpha}_s)_{0,\ell}/\lambda$.

3. Результати числових розрахунків та їх аналіз. При чисельних розрахунках обмежимося випадком гармонічного навантаження оболонки постійним тиском амплітуди $q_z(\alpha) = q_0$. Амплітуда електричного потенціалу для компенсації тиску q_0 визначається залежністю [7]

$$V_\alpha = x_\alpha(\Delta_\alpha) q_0, \quad (10)$$

в якій x_α – коефіцієнт керування.

Значення x_α , що відповідає максимальному значенню амплітуди механічних коливань, визначається формулою $x_\alpha = \frac{|w_{q \max}^1|}{|w_{E \max}^1|}$, в якій $|w_{q \max}^1|$ і $|w_{E \max}^1|$ – розраховані на частоті лінійного резонансу максимальні амплітуди прогину, отримані на основі розв’язання еталонних задач при $q_0 = 1$ Па, $V_\alpha = 0$ і $q_0 = 0$, $V_\alpha = 1$ В відповідно. Протифазність електричного потенціалу, що підводиться до електродів актуатора, враховується за формулою $V_\alpha \cos(\omega t + \pi) = -V_\alpha \cos \omega t$. Оскільки при розглядуваному навантаженні реалізуються переважно згинні коливання, чисельні розрахунки проведено в околі першої частоти найбільш енергоємної згинної моди коливань оболонки. Пасивний шар виготовлено з полімерного композиту [8], а п’єзоактуатори – з в’язкопружної п’єзокераміки ЦТСтБС-2 [1]. Експериментальні залежності їх електромеханічних характеристик від температури апроксимуються такими виразами:

$$E' = (1672 - 118.6 T) \cdot 10^6 \text{ [Па]}, \quad E'' = (15.01 - 1.205 T) \cdot 10^6 \text{ [Па]},$$

$$G_{az} = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \bar{T} = T - T_0, \quad \nu_E = 0.37, \quad \nu = 0.3636,$$

$$s'_{11} = 12.5(1 + 0.377 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-12} \text{ [м}^2\text{/Н]},$$

$$s'_{44} = 39.7(1 + 0.5458 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-12} \text{ [м}^2\text{/Н]},$$

$$\delta_{11}^s = 0.16(1 + 0.6155 \cdot 10^{-3} \bar{T} + 0.4158 \cdot 10^{-4} \bar{T}^2),$$

$$\delta_{44}^s = 0.14(1 + 8.33 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-2},$$

$$d'_{31} = -1.6(1 + 0.219 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-10} \text{ [Кл/м]},$$

$$\delta_{31}^d = 0.4(1 + 1.198 \cdot 10^2 \bar{T} + 1.823 \cdot 10^{-4} \bar{T}^2) \cdot 10^{-2},$$

$$d'_{15} = 4.5(1 + 0.9722 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-10} \text{ [Кл/м]},$$

$$\delta_{15}^d = 0.35(1 + 0.3571 \cdot 10^{-2} \bar{T}) \cdot 10^{-2},$$

$$\epsilon'_{11} = 18.5\epsilon_0(1 + 0.4505 \cdot 10^{-2} \bar{T}) \cdot 10^2,$$

$$\delta_{11}^\epsilon = 0.5(1 + 0.015 \bar{T}) \cdot 10^{-2},$$

$$\epsilon'_{33} = 21\epsilon_0(1 + 0.111 \cdot 10^{-3} \bar{T} + 0.8426 \cdot 10^{-4} \bar{T}^2) \cdot 10^2,$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м},$$

$$\delta'_{33} = 0.35(1 + 0.0119 \cdot \bar{T} + 0.119 \cdot 10^{-3} \bar{T}^2) \cdot 10^{-2},$$

$$\rho_0 = 929 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_1 = 7520 \text{ кг/м}^3, \quad \lambda = 0.45 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}.$$

Коефіцієнт поперечного зсуву $k_s = 5/6$ [2]. Геометричні параметри оболонки такі: $R = \ell = 0.2$ м, $h_0 = 0.04$ м, $h_1 = 0.1 \cdot 10^{-4}$ м.

На рис. 1 кривими **1**, **2** показано залежності максимальних амплітуд прогину від параметра ширини $\Delta = \Delta_x / \ell$ кільцевого актуатора. Штрих-

пунктирні лінії відповідають прогину $\tilde{w}_q = |w_q^1(0.5)| \cdot 10^8$ м при механічному навантаженні з амплітудою $q_0 = 1$ Па при $V_\alpha = 0$, а штрихові лінії відповідають прогину $\tilde{w}_E = w_E^1(0.5) \cdot 10^6$ м при підведенні до актуатора електричного потенціалу $V'_\alpha = 1$ В, $V''_\alpha = 0$ при $q_0 = 0$ (штрихові лінії). Суцільними лініями показано криві при значенні коефіцієнта керування $\tilde{\alpha}_\alpha = 10\alpha_\alpha$. Криві **1** обчислено для резонансної частоти $\omega_p = 0.132 \cdot 10^5$ с⁻¹ у випадку класичної постановки задачі, а криві **2** – на частоті $\omega_p = 0.113 \cdot 10^5$ с⁻¹ при врахуванні деформації поперечного зсуву. Ширину Δ актуатора вибирали так, щоб його середина співпадала з координатою $x = 0.5$ максимальних нормальних прогинів оболонки.

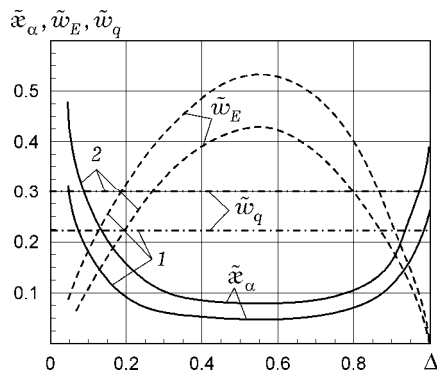


Рис. 1

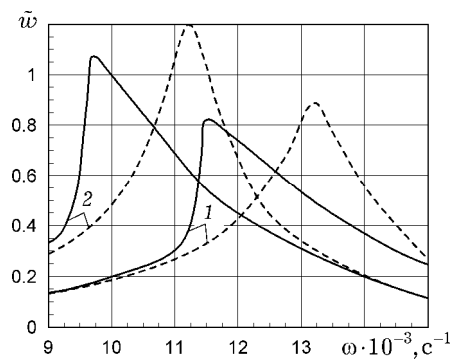


Рис. 2

Розраховані в околі резонансної частоти найбільш енергоємної моди згинних коливань оболонки частотні залежності максимальних значень амплітуд прогинів $\tilde{w} = w(0.5) \cdot 10^5$ м і температури вібророзігріву $T_m = T(0.5)$ (штрихові лінії) і при врахуванні температурної залежності властивостей матеріалів (суцільні лінії) представлені на рис. 2 і рис. 3 відповідно. Криві **1** відповідають розв'язку задачі в класичній постановці, а криві **2** – постановці з урахуванням деформації поперечного зсуву для механічно навантаженої оболонки з амплітудою $q_0 = 0.4 \cdot 10^4$ Па і коефіцієнтом теплопровідності $\gamma_3 = 0.4$.

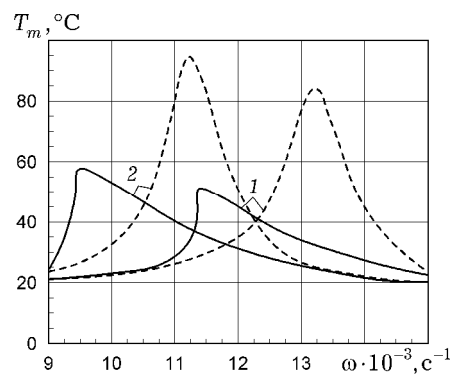


Рис. 3

Для вказаного навантаження на рис. 4а,б показано розподіл амплітуди прогинів $\tilde{w} = |w| \cdot 10^5$ м уздовж твірної оболонки при розв'язанні задачі в класичній (рис. 4а) та уточненій (рис. 4б) постановках. Тут штрихові криві

обчислено при ізотермічних електромеханічних характеристиках, а суцільні – при врахуванні їх температурної залежності. Штрихпунктирні криві розраховано при сумісній протифазній дії механічного навантаження $q_0 = 0.4 \times 10^4$ Па та електричних потенціалів $V_a = 16.7$ В (рис. 4а), $V_a = 28$ В (рис. 4б).

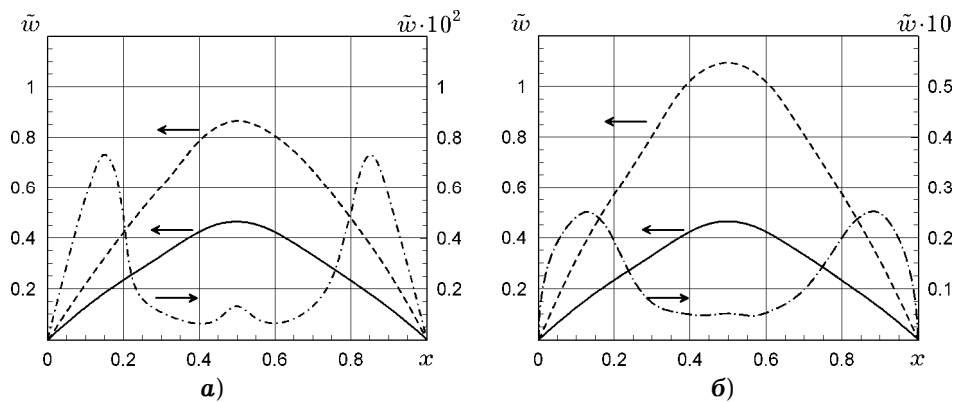


Рис. 4

Аналіз кривих на рис. 1–4 і проведені числові розрахунки дозволяють зробити висновок, що при жорсткому закріпленні країв досліджуваної оболонки існує актуатор оптимальних розмірів $\Delta = 0.5, \alpha_1 = 0.215\ell, \alpha_2 = 0.785\ell$, який реалізує максимальні прогини згинної моди коливань при мінімальній різниці електричних потенціалів на електродах актуатора. Такий актуатор є найефективнішим при компенсації вимушених механічних коливань оболонки. Врахування деформацій поперечного зсуву і температурної залежності електромеханічних характеристик пасивного і п'єзоактивного матеріалів (криві 2) призводить до зміщення амплітудних і температурних (рис. 3) частотних характеристик в сторону зменшення резонансної частоти, а також до збільшення прогинів і температури вібророзігріву на цій уточненій резонансній частоті згинних механічних коливань оболонки. В результаті сумісної протифазної дії поверхневого тиску і компенсуювальної для нього різниці електричних потенціалів на частотах класичного (рис. 4а) та уточненого (рис. 4б) резонансів амплітуди механічних прогинів недемпфованої оболонки зменшуються майже на два порядки. При цьому температура вібророзігріву залишається близькою до початкової.

Висновки. Розглянуто зв'язану задачу про вимушені осесиметричні коливання і дисипативний розігрів жорстко заземленої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоактуаторами при електромеханічному моногармонічному навантаженні. Враховуються деформації поперечного зсуву і температурна залежність комплексних характеристик пасивного і п'єзоактивного матеріалів. Нелінійна задача розв'язується методом покрокового за часом інтегрування з використанням методу дискретної ортогоналізації для інтегрування рівнянь механіки та явної схеми методу скінченних різниць при розв'язуванні рівняння теплопровідності. Досліджується вплив деформації поперечного зсуву, геометричних розмірів актуатора і температурної залежності властивостей матеріалів на частотні характеристики амплітуди прогинів і температури вібророзігріву і на активне демпфування вимушених коливань оболонки.

1. Болкисев А. М., Карлаш В. Л., Шульга Н. А. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 7. – С. 70–74.

Te same: Bolkisev A. M., Karlash V. L., Shul'ga N. A. Temperature dependence of the properties of piezoelectric ceramics // Int. Appl. Mech. – 1984. – 20, No. 7. – P. 650–653. – <https://doi.org/10.1007/BF00891725>.

2. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – Методы расчета оболочек: В 5 т. / Под ред. А. Н. Гузя. – Т. 4.
3. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
4. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Термомеханика неупругих тонкостенных элементов конструкций с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при гармоническом нагружении (обзор) // Прикл. механика. – 2017. – **53**, № 1. – С. 9–74.
Te same: *Karnaikhov V. G., Kyrychok I. F., Kozlov V. I.* Thermomechanics of inelastic thin-walled structural members with piezoelectric sensors and actuators under harmonic loading (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, No. 1. – P. 6–58. – <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0789-3>.
5. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом (обзор) // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 2. – С. 45–77.
Te same: *Karnaikhov V. G., Kyrychok I. F., Kozlov V. I.* Electromechanical vibrations and dissipative heating of viscoelastic thin-walled piezoelements // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, No. 2. – P. 182–212. – <https://doi.org/10.1023/A:1011333405458>.
6. Карнаузов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: Житомир. держ. технолог. ун-т, 2005. – 428 с.
7. Киричок И. Ф. Резонансные осесимметричные колебания и виброразогрев вязкоупругой цилиндрической оболочки с пьезослоями при электромеханическом возбуждении // Прикл. механика. – 2015. – **51**, № 5. – С. 99–106.
Te same: *Kirichok I. F.* Resonant axisymmetric vibrations and vibrational heating of a viscoelastic cylindrical shell with piezolayers subject to electromechanical excitation // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, No. 5. – P. 567–573. <https://doi.org/10.1007/s10778-015-0712-8>.
8. Киричок И. Ф., Жук Я. А. Влияние граничных условий и температуры виброразогрева на резонансные осесимметричные колебания вязкоупругих цилиндрических оболочек с пьезоактуаторами и сенсорами // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 149–156.
9. Киричок И. Ф., Карнаухова Т. В. Вынужденные осесимметричные колебания и разогрев термовязкоупругих цилиндрических оболочек с пьезоактуаторами // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 10. – С. 53–61.
Te same: *Kirichok I. F., Karnaikhova T. V.* Forced axisymmetric vibrations and self-heating of thermoviscoelastic cylindrical shells with piezoelectric actuators // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **46**, No. 10. – P. 1132–1138. – <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0405-x>.
10. Киричок И. Ф., Чернюшок О. А. Вынужденные колебания и виброразогрев гибкой вязкоупругой балки с пьезоэлектрическими сенсором и актуатором с учетом деформации сдвига // Прикл. механика. – 2018. – **54**, № 5. – С. 87–95.
Te same: *Kyrychok I. F., Chernyushok O. A.* Forced vibrations and self-heating of flexible viscoelastic beam with piezoelectric sensor and actuator with account of shear strain // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, No. 5. – P. 568–576. – <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0910-2>.
11. Киричок И. Ф., Жук Я. О., Карнаухова Т. В. Резонансні коливання і дисипативний розігрів гнучкої в'язкопружної балки з п'єзоактуаторами при врахуванні деформації зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 2. – С. 66–74.
Te same: *Kyrychok I. F., Zhuk Ya. O., Karnaikhova T. V.* Resonance vibration and dissipative heating of a flexible viscoelastic beam with piezoactuators in the presence of shear strains // *J. Math. Sci.* – 2019. – **243**, No. 1. – P. 73–84. – <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04527-z>.
12. Нестеренко Н. П., Червинко О. П., Сенченков И. К. Моделирование ультразвукового разогрева структурных элементов полимерных волокнистых композитов при нормальном нагружении // Вісн. Нац. техн. ун-ту «ХПІ». Сер. Динаміка і міцність машин. – 2002. – Вып. 9, т. 9. – С. 3–8.
13. *Katunin A.* Criticality of the self-heating effect in polymers and polymer matrix composites during fatigue, and their application in non-destructive testing // *Polymers.* – 2019. – **11**, No. 1. 19. – <https://doi.org/10.3390/polym11010019>.

14. Guz I. A., Zhuk Y. A., Sands C. M. Analysis of the vibrationally induced dissipative heating of thin-wall structures containing piezoactive layers // Int. J. Non-Linear Mech. – 2012. – 47, No. 2. – P. 105–116.
15. Tzou H. S. Piezoelectric shells (Distributed sensing and control of continua). – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 495 p.
16. Tzou H. S., Anderson G. L. (Eds) Intelligent structural systems. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1992. – 456 p.

AXISYMMETRIC RESONANT VIBRATION AND DISSIPATIVE HEATING OF THE SHEAR COMPLIANT INELASTIC CYLINDRICAL SHELL WITH PIEZOELECTRIC ACTUATORS WITH RIGIDLY FIXED EDGES

The coupled problem of forced axisymmetric vibrations and dissipative heating of a rigidly fixed viscoelastic cylindrical shell with piezoelectric actuators under an electromechanical monoharmonic loading is considered. Both transverse shear strain and temperature dependence of the complex characteristics of passive and piezoelectric materials are taken into account. The nonlinear problem is solved by the step-by-step integration method using the discrete orthogonalization technique to integrate the equations of mechanics along with the explicit scheme of the finite difference method to solve the heat equation. The effect of transverse shear strain, the geometric dimensions of the actuator and the temperature dependence of material properties on the frequency characteristics of the deflection amplitude and dissipative heating temperature and on the active damping of forced vibrations is studied.

Keywords: resonance vibration, dissipative heating, cylindrical shell, piezoactuator, shear strain.

¹ Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ,

² Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ,

³ Нац. ун-т харч. технологій, Київ

Одержано

15.01.20