

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН КОНТАКТУЮЧИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ПІВПРОСТОРУ ТА ШАРУ ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Розв'язано нестационарну задачу теплопровідності для контактуючих термочутливих півпростору та шару за умов складного теплообміну з середовищем сталої температури. Для побудови розв'язку використано аналітично-числовий підхід, особливістю якого є застосування варіанта методу послідовних наближень, лінеаризувальних параметрів, інтегрального перетворення Лапласа та його числового обернення за допомогою адаптованої до задач теплопровідності формули Пруднікова. З використанням розробленого алгоритму досліджено термопружний стан такої термочутливої кусково-однорідної структури.

Ключові слова: термопружний стан, нелінійна задача теплопровідності, термочутливі півпростір і шар, метод лінеаризувальних параметрів, числове обернення перетворення Лапласа, метод послідовних наближень.

Дослідження термопружної поведінки елементів конструкцій, що експлуатуються в умовах складного теплообміну або піддаються іншим тепловим чи силовим навантаженням, а також мають різні залежності від температури фізико-механічних характеристик їх матеріалів, є актуальними в багатьох галузях техніки та промисловості з огляду на необхідність розрахунків їхньої міцності та надійності. Математичні моделі для визначення нестационарних температурних полів, що враховують зазначені чинники, є нелінійними крайовими задачами математичної фізики, для розв'язування яких в основному використовують числові або аналітично-числові підходи. Детальний огляд запропонованих моделей і методів обчислень наведено у праці [6]. Як продовження розвитку наявних і розробку нових підходів до розв'язування такого класу задач у новіших дослідженнях відмітимо, зокрема, роботи [2, 4, 10, 12–14, 16].

У статті [1] з використанням аналітично-числового підходу, особливістю якого є застосування методу лінеаризувальних параметрів і числового обернення перетворення Лапласа на основі адаптованої до розглядуваного класу задач формули Пруднікова для безпосереднього обчислення оригіналу, для ідеально контактуючих півпростору і шару за конвективного теплообміну та у припущенні простої нелінійності матеріалів було розв'язано задачу термопружності, а також досліджено розподіл температури і викликані нею напруження, коли на поверхні поділу задано сталу температуру.

У цій роботі розв'язано аналогічну задачу за умов складного теплообміну через поверхню шару, наявності на межі дотику діючих упродовж певного проміжку часу джерел тепла та відсутності обмежень на характер зміни теплових характеристик матеріалів.

1. Формулювання задачі теплопровідності. Визначимо нестационарні температурні поля t_1 , t_2 ідеально контактуючих термочутливих шару $0 < z < z_0$ і півпростору $z < 0$ з однаковою початковою температурою t_p за умов конвективно-променевого теплообміну з середовищем сталої температури t_c і діючими впродовж проміжку часу τ_k тепловиділеннями на межі контакту потужності q_0 .

Нестационарні температурні поля визначаємо з рівнянь теплопровідності

[✉]t_solyar@ukr.net

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_t^{(1)}(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial z}\right) &= c_v^{(1)}(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial \tau}, & 0 < z < z_0, \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_t^{(2)}(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial z}\right) &= c_v^{(2)}(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial \tau}, & z < 0,\end{aligned}\quad (1)$$

за початкових умов

$$t_j\Big|_{\tau=0} = t_p, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

крайових умов

$$\left[\lambda_t(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial z} + \alpha(t_1 - t_c) + \sigma\varepsilon(t^4 - t_c^4)\right]\Big|_{z=z_0} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial z}\Big|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad t_2\Big|_{z \rightarrow -\infty} = t_p \quad (4)$$

і контактних умов

$$t_1\Big|_{z=0} = t_2\Big|_{z=0}, \quad \left[\lambda_t^{(2)}(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial z} - \lambda_t^{(1)}(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial z}\right]\Big|_{z=0} = q(\tau), \quad (5)$$

де α – коефіцієнт теплообміну через поверхню $z = z_0$; $\lambda_t^{(j)}(t_j)$, $c_v^{(j)}(t_j)$, $j = 1, 2$, – коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплоємності матеріалів шару і півпростору відповідно; σ – стала Стефана – Больцмана; ε – ступінь чорноти; $q(\tau) = q_0 S_+(\tau_k - \tau)$ – діюче впродовж часу τ_k джерело тепла,

$$S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau \leq 0. \end{cases}$$

2. Побудова розв'язку задачі теплопровідності. Алгоритм розв'язування задачі теплопровідності складається з таких кроків.

1. Зведемо задачу (1)–(5) до безрозмірного вигляду. Нехай t_0 – відлікове значення температури, а z_0 (товщина шару) – характерний розмір.

Введемо безрозмірні температури $T_j = \frac{t_j}{t_0}$, $j = 1, 2$, координату $\bar{z} = \frac{z}{z_0}$ і запишемо характеристики матеріалів у вигляді добутку розмірної величини і безрозмірної функції відповідної характеристики від безрозмірної температури: $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$. Задача (1)–(5) у безрозмірному вигляді набуде вигляду

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\lambda_t^{(1)*}(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}}\right) &= c_v^{(1)*}(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}}, & 0 < \bar{z} < 1, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\lambda_t^{(2)*}(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}}\right) &= c_v^{(2)*}(T_2)K_a\frac{\partial T_2}{\partial \text{Fo}}, & \bar{z} < 0,\end{aligned}\quad (6)$$

$$T_j\Big|_{\text{Fo}=0} = T_p, \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

$$\left[\lambda_t^{(1)*}(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}} + \text{Bi}(T_1 - T_c) + \text{Sk}(T^4 - T_c^4)\right]\Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}}\Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad T_2\Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = T_p, \quad (9)$$

$$T_1|_{\bar{z}=0} = T_2|_{\bar{z}=0}, \quad \left[K_\lambda \lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}} - \lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}} \right] \Big|_{\bar{z}=0} = q(\text{Fo}), \quad (10)$$

$$\text{де } T_c = \frac{t_c}{t_0}, \quad T_p = \frac{t_p}{t_0}, \quad \text{Fo} = \frac{a_0^{(1)} \tau}{z_0^2}, \quad \text{Fo}_k = \frac{a_0^{(1)} \tau_k}{z_0^2}, \quad K_a = \frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(2)}}, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_{t_0}^{(2)}}{\lambda_{t_0}^{(1)}},$$

$$a_0^{(j)} = \frac{\lambda_{t_0}^{(j)}}{c_{v_0}^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \quad \text{Bi} = \frac{\alpha z_0}{\lambda_{t_0}^{(1)}}, \quad \text{Sk} = \frac{\sigma \varepsilon t_0^3}{\lambda_{t_0}^{(1)}} \quad - \quad \text{критерій Старка},$$

$$q(\text{Fo}) = \text{Ki} S_+ (\text{Fo}_k - \text{Fo}), \quad \text{Ki} = \frac{z_0 q_0}{\lambda_{t_0}^{(1)} t_0} \quad - \quad \text{критерій Кірпічова}.$$

2. До задачі (6)–(10) застосуємо інтегральні перетворення Кірхгофа

$$\theta_j = \int_{T_p}^{T_j} \lambda_t^{(j)*}(T) dT. \quad (11)$$

В результаті отримуємо крайову задачу відносно змінних θ_j :

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \bar{z}^2} = a_1^*(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial \text{Fo}}, \quad \bar{z} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \bar{z}^2} = K_a a_2^*(\theta_2) \frac{\partial \theta_2}{\partial \text{Fo}}, \quad \bar{z} < 0, \quad (12)$$

$$\theta_j|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (13)$$

$$\left[\frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} + \text{Bi}(T(\theta_1) - T_c) + \text{Sk}(T^4(\theta_1) - T_c^4) \right] \Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad \theta_2 \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad (15)$$

$$T_1(\theta_1) \Big|_{\bar{z}=0} = T_2(\theta_2) \Big|_{\bar{z}=0}, \quad \left[K_\lambda \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} \right] \Big|_{\bar{z}=0} = q(\text{Fo}), \quad (16)$$

де

$$a_j^*(T_j(\theta_j)) = \frac{c_v^{(j)*}(T_j(\theta_j))}{\lambda_t^{(j)*}(T_j(\theta_j))}, \quad j = 1, 2.$$

3. Використаємо методи послідовних наближень і лінеаризувальних параметрів. Згідно з методом лінеаризувальних параметрів першу з умов (16) запишемо у вигляді

$$\theta_1 \Big|_{\bar{z}=0} = (1 + \alpha) \theta_2 \Big|_{\bar{z}=0}, \quad (17)$$

де α – невідомий поки що лінеаризувальний параметр. Для знаходження розв'язку крайової задачі (12)–(17) відносно змінних θ_j застосуємо варіант методу послідовних наближень [8]. За m -те, $m = 1, 2, \dots$, наближення розв'язку візьмемо розв'язок такої лінійної задачі спряження:

$$\frac{\partial^2 \theta_{1,m}}{\partial \bar{z}^2} = K_{m-1}^{(1)} \frac{\partial \theta_{1,m}}{\partial \text{Fo}}, \quad \bar{z} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{2,m}}{\partial \bar{z}^2} = K_{m-1}^{(2)} \frac{\partial \theta_{2,m}}{\partial \text{Fo}}, \quad \bar{z} < 0, \quad (18)$$

$$\theta_{j,m} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (19)$$

$$\left[\frac{\partial \theta_{1,m}}{\partial \rho} + \text{Bi}_m (\theta_{1,m} - \theta_c) \right] \Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \theta_{j,m}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad \theta_{j,m} \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (21)$$

$$\theta_{1,m} \Big|_{\bar{z}=0} = (1 + \alpha) \theta_{2,m} \Big|_{\bar{z}=0}, \quad K_\lambda \frac{\partial \theta_{2,m}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \theta_{1,m}}{\partial \bar{z}} = q(\text{Fo}), \quad (22)$$

де

$$K_{m-1}^{(1)} = \alpha_1^* (T_{1,m-1}(\theta_{1,m-1})), \quad K_{m-1}^{(2)} = K_a \alpha_2^* (T_{2,m-1}(\theta_{2,m-1})),$$

$$\text{Bi}_m = [\theta_{1,m-1}(\text{Fo}, 1) - \theta_c]^{-1} \left\{ \text{Bi} [T(\theta_{1,m-1}(\text{Fo}, 1)) - T_c] + \right. \\ \left. + \text{Sk} [(T(\theta_{1,m-1}(\text{Fo}, 1)))^4 - T_c^4] \right\}, \quad m \geq 2,$$

$$\text{Bi}_1 = \text{Bi}, \quad \theta_c = \int_{T_p}^{T_c} \lambda_t^*(T) dT.$$

Зазначимо, що на кожному кроці ітераційного процесу змінні Кірхгофа визначаються для певних значень координати у фіксовані моменти часу. За початкове наближення виберемо розв'язок задачі відносно змінних Кірхгофа, коли $K_1^{(1)} = 1$, $K_1^{(2)} = K_a$, $\text{Bi}_1 = \text{Bi}$ (враховуємо лише конвективний теплообмін).

Застосування методів лінеаризувальних параметрів і послідовних наближень приводить до розв'язування на кожному кроці ітераційного процесу лінійної задачі теплопровідності.

4. Застосувавши інтегральне перетворення Лапласа за часом до лінеаризованої задачі (18)–(22), отримуємо задачу стосовно трансформант змінних Кірхгофа:

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_{1,m}}{d\bar{z}^2} = K_{m-1}^{(1)} s \tilde{\theta}_{1,m}, \quad 0 < \bar{z} < 1,$$

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_{2,m}}{d\bar{z}^2} = K_{m-1}^{(2)} s \tilde{\theta}_{2,m}, \quad \bar{z} < 0, \quad (23)$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{\theta}_{1,m}}{\partial \bar{z}} + \text{Bi}_m \left(\tilde{\theta}_{1,m} - \frac{\theta_c}{s} \right) \right] \Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{d \tilde{\theta}_{2,m}}{d\bar{z}} \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad \tilde{\theta}_{2,m} \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad (25)$$

$$\tilde{\theta}_{1,m} \Big|_{\bar{z}=0} = (1 + \alpha) \tilde{\theta}_{2,m} \Big|_{\bar{z}=0}, \quad K_\lambda \frac{\partial \tilde{\theta}_{2,m}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \tilde{\theta}_{1,m}}{\partial \bar{z}} = \tilde{q}, \quad (26)$$

де s – параметр перетворення Лапласа, $\tilde{\theta}_j = \int_0^{\infty} \theta_j e^{-sF_0} dF_0$,

$$\tilde{q} = \frac{\text{Ki}(1 - e^{-sF_{0k}})}{s}.$$

Розв'язки рівнянь (23) мають вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{1,m} &= C_1^1 e^{\bar{z}\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} + C_2^1 e^{-\bar{z}\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}}, & 0 < \bar{z} < 1, \\ \tilde{\theta}_{2,m} &= C_1^2 e^{\bar{z}\sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}}, & \bar{z} < 0.\end{aligned}$$

(З умови (25) випливає, що $C_2^2 = 0$).

Сталі інтегрування, визначені з умов (24), (26), матимуть вигляд

$$\begin{aligned}C_{1,m}^1 &= \left[\tilde{q}_j(1 + \alpha) - C_{2,m}^1 \left(K_\lambda \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}} + (1 + \alpha)\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left[K_\lambda \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}} - (1 + \alpha)\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} \right]^{-1}, \\ C_{2,m}^1 &= \left[\tilde{q}_j(1 + \alpha) \left(\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} + \text{Bi}_m \right) e^{\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} - \right. \\ &\quad \left. - \text{Bi}_m \theta_c \left(K_\lambda \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}} - (1 + \alpha)\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left[\left(\sqrt{sK_{m-1}^{(2)}} - \text{Bi}_m \right) e^{-\sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} \left(K_\lambda \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}} - (1 + \alpha)\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} + \text{Bi}_m \right) e^{\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} \left(K_\lambda \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}} + (1 + \alpha)\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} \right) \right]^{-1}, \\ C_{1,m}^2 &= \frac{C_{1,m}^1 + C_{2,m}^1}{1 + \alpha}.\end{aligned}$$

5. Застосуємо числове обернення перетворення Лапласа. Для визначення оригіналів за отриманими трансформантами використаємо формулу Пруднікова [3], адаптовану до розв'язування розглядуваного класу задач [5, 11, 15].

6. Обчислимо температуру за відомими змінними Кірхгофа для конкретних залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури зі співвідношень (11). За лінійних залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури ($\lambda_t^{(j)*}(T_j) = 1 + k_j(T_j - T_p)$) формули для обчислення просторово-часових розподілів температур півпростору та шару мають вигляд

$$T_{j,m}(F_0, \bar{z}, \alpha) = k_j^{-1} \left(\sqrt{1 + 2k_j \theta_{j,m}(F_0, \bar{z}, \alpha)} - 1 \right) + T_p \quad k_j = \text{const}.$$

7. Визначимо невідомий лінеаризувальний параметр α з нелінійного рівняння (17), отриманого з умови рівності температур на межі контакту $\bar{z} = 0$. Для його розв'язання можна скористатися одним із числових методів, зокрема методом Ньютона:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} - \frac{F_m(\alpha_{n-1})}{F'_m(\alpha_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \alpha_0 = 0,$$

де $F_m(\alpha) = [T_{1,m} - T_{2,m}]|_{\bar{z}=0}$, $F'_m(\alpha) = [T'_{1,m} - T'_{2,m}]|_{\bar{z}=0}$.

3. Визначення термопружного стану півпростору та шару, коли температура змінюється лише за однією координатою, не викликає труднощів і здійснюється за відомими в літературі співвідношеннями [7]. Формули для

визначення безрозмірних напружень за відсутності навантажень на поверхні кусково-однорідного півпростору та обмеженості напружень на безмежності наведено в праці [1].

4. Числові дослідження проведемо для безрозмірних величин, використовуючи подання теплофізичних характеристик окису цирконію (матеріал шару) і титанового сплаву (матеріал півпростору) у вигляді добутку розмірної величини і функції від безрозмірної температури [9] у діапазоні [0.273, 1], що відповідає реальним значенням температури від 300 до 1100 К.

Спочатку розглянемо частковий випадок однорідності півпростору та шару, коли за матеріал вибрано титановий сплав. Достовірність наближеного розв'язку задачі відносно змінної Кірхгофа, отриманого з використанням адаптованої формули Пруднікова обернення перетворення Лапласа, перевіряємо шляхом порівняння його з точним розв'язком:

$$\theta_m(\text{Fo}_m, \bar{z}) = \theta_c \left[\operatorname{erfc} \frac{1 - \bar{z}}{2\sqrt{\text{Fo}_m}} - e^{\text{Bi}_m(1-\bar{z})} e^{\text{Bi}_m^2 \text{Fo}_m} \operatorname{erfc} \left(\text{Bi}_m \sqrt{\text{Fo}_m} + \frac{1 - \bar{z}}{2\sqrt{\text{Fo}_m}} \right) \right], \quad \bar{z} \leq 1. \quad (27)$$

Обчислені розбіжності між точним і наближеним розв'язками для різних значень координати \bar{z} , часу Fo і параметрів ℓ , c адаптованої формули Пруднікова подано в табл. 1–4 (при цьому $\ell > 0$, $\text{Re}c > 0$ і $0 < \text{Fo} < \ell$). Сталу температуру середовища T_c приймали рівною одиниці. Питання вибору параметрів c і ℓ докладно проаналізовано у [5]. У табл. 1 подано залежності температурного поля півпростору ($\bar{z} < 0$) та шару ($0 < \bar{z} < 1$) від координати \bar{z} , обчислені при значеннях параметрів $\ell = 2.5$, $c = 6$ у момент часу $\text{Fo} = 0.5$, коли $\text{Bi} = 0.1$, $\text{Sk} = 0$ та $\text{Bi} = 0.5$, $\text{Sk} = 0.2$. Максимальна розбіжність між точними (T^{ex} , обчисленими за формулою (27)) і наближеними (T^{ap} , обчисленими за адаптованою формулою Пруднікова) значеннями температурного поля не перевищує 0.5%.

Таблиця 1

		\bar{z}	-0.05	0.0	0.25	0.35	0.65	0.85	1.0
Fo = 0.5, $\ell = 2.5$, $c = 6$	Bi = 0.1, Sk = 0	T^{ex}	0.2818	0.2827	0.2887	0.2917	0.3033	0.3131	0.3216
		T^{ap}	0.2819	0.2829	0.2888	0.2919	0.3035	0.3135	0.3222
	Bi = 0.5, Sk = 0.2	T^{ex}	0.3091	0.3136	0.3442	0.3597	0.4175	0.4639	0.502
		T^{ap}	0.3093	0.314	0.3443	0.3598	0.4177	0.4653	0.505

У табл. 2 наведено залежності температурного поля шару T_1 у точці $\bar{z} = 0.7$ і півпростору T_2 у точці $\bar{z} = -0.05$ від часу, обчислені для значень параметрів $\ell = 0.5$, $c = 7$ і моментів часу $\text{Fo} = 0.005, 0.015, 0.25, 0.35$ та параметрів $\ell = 3.5$, $c = 7$ для решти значень моментів часу. Обчислення виконано для параметрів $\text{Bi} = 0.5$, $\text{Sk} = 0.2$ конвективно-променевого теплообміну. Максимальна розбіжність не перевищує 2%.

Таблиця 2

		$\ell = 0.5, c = 7$				$\ell = 3.5, c = 7$				
		Fo		0.005	0.015	0.25	0.35	0.55	1.3	2.0
Bi = 0.5, Sk = 0.2	$\bar{z} = 0.7$	T_1^{ex}	0.273	0.2752	0.3754	0.3999	0.4367	0.518	0.5641	
		T_1^{ap}	0.2732	0.2753	0.3756	0.4001	0.4371	0.516	0.5596	
	$\bar{z} = -0.05$	T_2^{ex}	0.273	0.273	0.2823	0.2923	0.3148	0.3893	0.4251	
		T_2^{ap}	0.273	0.273	0.2824	0.2923	0.3152	0.3896	0.435	

Вплив параметра ℓ на точність обчислень температури ілюструють дані, наведені в табл. 3.

Наближені значення температур для шару T_1^{ap} і півпростору T_2^{ap} у табл. 3 отримано для фіксованого значення параметра $c = 5$ у точках $\bar{z} = 0.6$ та $\bar{z} = -0.15$ у момент часу $Fo = 0.7$ за конвективно-променевого теплообміну $Bi = 0.5$, $Sk = 0.2$. Максимальна похибка не перевищує 0.6%. Відповідні точні значення температури є такими: $T_1^{\text{ex}} = 0.4367$ і $T_2^{\text{ex}} = 0.321$.

Таблиця 3

		ℓ						
		1.0	1.3	1.7	2.	2.5	3.0	3.5
$Bi = 0.5$, $Sk = 0.2$ $Fo = 0.7$	$T_1^{\text{ap}} _{\bar{z}=0.6}$	0.4389	0.439	0.4388	0.4388	0.439	0.4396	0.439
	$T_2^{\text{ap}} _{\bar{z}=-0.15}$	0.3221	0.3223	0.3226	0.3227	0.3228	0.323	0.3231

Про те, як вибір параметра c впливає на точність обчислень температури, свідчать результати, подані в табл. 4, які отримано при $\ell = 1.7$, $Fo = 0.7$ та $\bar{z} = -0.15$ і $\bar{z} = 0.6$ за конвективно-променевого теплообміну $Bi = 0.5$, $Sk = 0.2$. Максимальну похибку (порядку 14%) маємо при $c = 2$. Зауважимо, що отримані в табл. 3, табл. 4 результати відповідають рекомендаціям щодо вибору цих параметрів, які детально розглянуто в працях [11, 15].

Таблиця 4

		c						
		2	3	4	5	6	7	8
$Fo = 0.7$, $Bi = 0.5$, $Sk = 0.2$	$T_1^{\text{ap}} _{\bar{z}=0.6}$	0.4983	0.4543	0.4427	0.4388	0.4374	0.4368	0.4366
	$T_2^{\text{ap}} _{\bar{z}=-0.15}$	0.3615	0.333	0.3253	0.3226	0.3217	0.3214	0.3213

Вплив термочутливості матеріалів на розподіли температури та напружень продемонстровано на рис. 1. Суцільними лініями позначено розподіли T і $\bar{\sigma}$ з урахуванням термочутливості теплових характеристик матеріалу, а штриховими – за постійних значень (вибрано їхні значення у початковий момент часу). Графіки отримано для таких випадків: 1°) конвективно-променевий теплообмін $Bi = 0.2$, $Sk = 0.9$ і тепловиділення потужністю $Ki = 0.5$ упродовж $Fo_k = 0.7$ у момент часу $Fo = 0.1$ (криві 1, 2); 2°) конвективний теплообмін $Bi = 0.5$, $Sk = 0$ у моменти часу $Fo = 0.1, 0.3$ (криві 3, 4 відповідно). Зауважимо, що навіть незначні розбіжності в 1.15% для температури викликають розбіжності біля 5% для напружень. Для більших моментів часу ці розбіжності можуть зростати і досягати порядку 2% для температури та 10% для напружень.

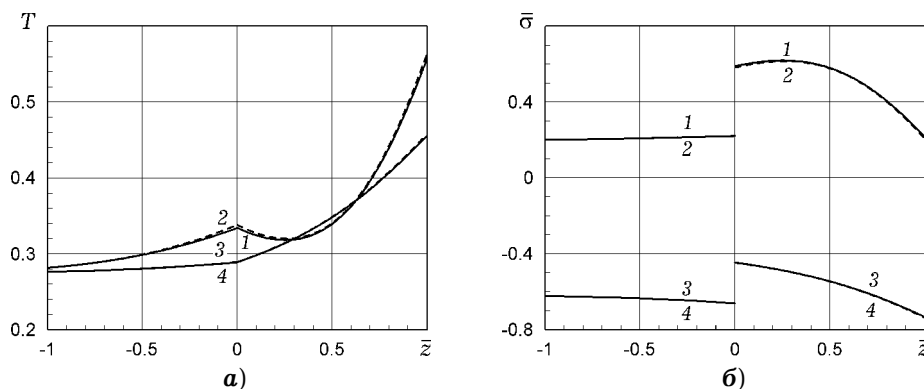


Рис. 1. Розподіли температури (а) та напружень (б) за врахування і неврахування термочутливості матеріалу.

Дослідження розподілів температури та напружень для півпростору та шару, виготовлених з титанового сплаву та окису цирконію, за різних комбінацій складного теплообміну через поверхню шару з довкіллям та наявності чи відсутності теплових джерел на межі контакту наведено на рис. 2.

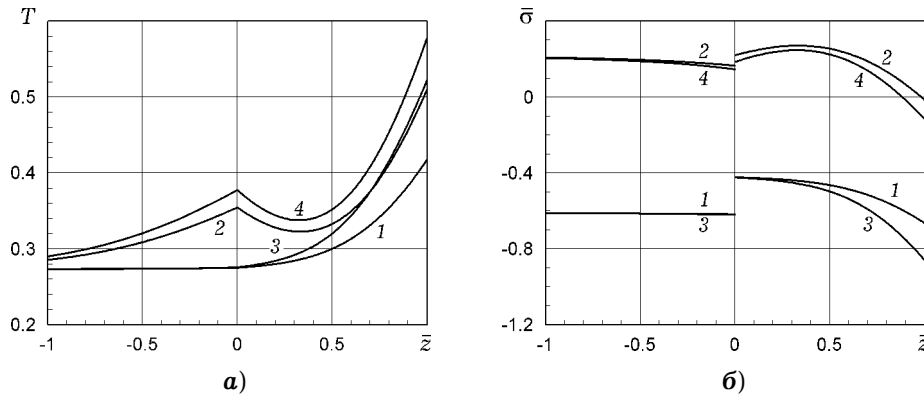


Рис. 2. Залежності від координати розподілів температури (а) та напружень (б) за складного теплообміну.

На рис. 2 зображено графіки залежностей зміни температури (рис. 2а) і напружень (рис. 2б) від координати \bar{z} у момент часу $Fo = 0.1$ за різних комбінацій критеріїв Біо, Старка та Кірпичова. Криві 1–4 відповідають таким значенням: 1 – $Bi = 0.5$, $Sk = 0.1$, $Ki = 0$; 2 – $Bi = 1.0$, $Sk = 0.1$, $Ki = 0.7$, $Fo_k = 0.5$; 3 – $Bi = 0.1$, $Sk = 0.9$, $Ki = 0$; 4 – $Bi = 0.1$, $Sk = 1.0$, $Ki = 0.9$, $Fo_k = 0.5$. Зазначимо, що отримано фізично очікувані результати з неперервним за координатою температурним полем та стрибкоподібними в площині контакту напруженнями.

Висновки. Запропонований раніше та апробований на низці задач теплопровідності термочутливих кусково-однорідних тіл аналітично-числовий підхід доповнено застосуванням варіанта методу послідовних наближень. Це дозволило зняти обмеження щодо простої нелінійності матеріалів контактуючих термочутливих тіл і зменшити кількість невідомих лінеаризувальних параметрів. Підхід апробовано на задачі теплопровідності для термочутливих півпростору та шару за складного теплообміну через обмежувальну поверхню і діючих упродовж певного проміжку часу тепловиділень на межі контакту. Достовірність отриманих наближених розв'язків підтверджено порівнянням їх із точними розв'язками в частковому випадку, коли півпростір і шар виготовлені з одного матеріалу (максимальна розбіжність 2%).

Досліджено залежності від координати та часу розподілів температури та спричинених нею напружень кусково-однорідної структури, виготовленої з титанового сплаву та окису цирконію, коли на поверхні задано конвективний або конвективно-променевий теплообмін і за наявності чи відсутності тепловиділень упродовж певного часу. Розглянуто випадки, коли матеріали нетермочутливі та термочутливі, без накладання обмежень на характер зміни теплових характеристик.

1. Вовк О. М., Соляр Т. Я. Термопружний стан контактуючих термочутливих півпростору та шару // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 4. – С. 78–87.
2. Гарматій Г. Ю., Калиняк Б. М., Кутнів М. В. Незв'язана квазістатична задача термопружності для двошарового порожнистого термочутливого циліндра за умов конвективного теплообміну // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 4. – С. 66–77.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – Москва: Высш. шк., 1965. – 466 с.

4. *Евтушенко О., Куцей М., Ох Е.* Моделювання температурного режиму гальмівної системи з урахуванням термочутливості матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 3. – С. 77–83.
Te same: *Evtushenko O., Kuciej M., Och E.* Modeling of temperature conditions for a braking system with regard for the heat sensitivity of materials // Mater. Sci. – 2014. – **50**, No. 3. – P. 397–405. – <https://doi.org/10.1007/s11003-014-9732-5>.
5. *Кушнір Р. М., Максимович В. М., Соляр Т. Я.* Визначення нестационарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 2. – С. 18–26.
Te same: *Kushnir R. M., Maksymovych V. M., Solyar T. Ya.* Determination of nonstationary temperatures with the help of improved formulas of the inverse Laplace transformation // Mater. Sci. – 2002. – **38**, No. 2. – P. 172–184. – <https://doi.org/10.1023/A:1020929818010>.
6. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Споллом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
7. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
8. *Попович В. С., Вовк О. М., Гарматій Г. Ю.* Дослідження статичного термопружного стану термочутливого порожнистого циліндра за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 4. – С. 151–158.
Te same: *Popovych V. S., Vovk O. M., Harmatii H. Yu.* Investigation of the static thermoelastic state of a thermosensitive hollow cylinder under convective-radiant heat exchange with environment // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, No. 6. – P. 726–736. – <https://doi.org/10.1007/s10958-012-1097-4>.
9. *Попович В., Вовк О.* Дослідження термопружного стану контактуючих термочутливих півпросторів з тепловиділеннями на межі дотику // Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2014. – **74**, № 2. – С. 38–47.
10. *Процюк Б. В.* Нестационарні нелінійні задачі теплопровідності для півпростору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 4. – С. 156–167.
11. *Соляр Т. Я.* Визначення нестационарних температурних полів і напружень у кусково-однорідних кільцевих пластинках на основі чисельно-аналітичної формули обернення перетворення Лапласа // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 3. – С. 201–208.
Te same: *Solyar T. Ya.* Determination of nonstationary temperature fields and stresses in piecewise homogeneous circular plates on the basis of a numerical-analytic Laplace inversion formula // J. Math. Sci. – 2010. – **171**, No. 5. – P. 673–681. – <https://doi.org/10.1007/s10958-010-0166-9>.
12. *Турчин І. М., Колодій Ю. О.* Плоска квазістатична задача термопружності для півпростору з покриттям за змішаних умов нагріву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 2. – С. 118–128.
Te same: *Turchyn I. M., Kolodiy Yu. O.* Quasistatic plane problem of thermoelasticity for the half space with coating under mixed conditions of heating // J. Math. Sci. – 2017. – **223**, No. 2. – P. 145–158. – <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3344-1>.
13. *Шевчук В. А., Гаврись О. П.* Термонапружений стан півпростору з багатошаровим покритвом за променево-конвективного теплообміну // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 171–179.
14. *Hachkevych O., Terlets'kyi R., Turii O.* The formulation and development of methods of solving thermomechanics problems for irradiated layered solids // Mathematical Modeling and Computing. – 2017. – **4**, No. 1. – P. 21–36. – <https://doi.org/10.23939/mmc2017.01.021>.
15. *Kushnir R., Solyar T.* A numerical-analytical approach to the analysis of non-stationary temperature fields in multiply-connected solids // Mechanics, Materials Science & Engineering Journal. – 2016. – **3**. – P. 90–106. – <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1167.0165>.
16. *Manthana V. R.* Uncoupled thermoelastic problem of a functionally graded thermosensitive rectangular plate with convective heating // Arch. Appl. Mech. – **89**, No. 8. – 2019. – P. 1627–1639. – <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01532-1>.

THERMOELASTIC STATE OF CONTACTING THERMOSENSITIVE SEMI-SPACE AND LAYER UNDER COMPLEX HEAT EXCHANGE

The nonstationary heat conduction problem for contacting thermosensitive half-spaces and layer under conditions of complex heat exchange with the constant temperature medium is solved. An analytical-numerical approach is used to construct the solution, the peculiarity of which is the application of a variant of the method of successive approximations, linearizing parameters, Laplace integral transformation and its numerical inversion using the Prudnikov formula adapted to heat conduction problems. The thermoelastic state of such thermosensitive piecewise homogeneous structure is studied using the developed algorithm.

Key words: *thermoelastic state, nonlinear heat conduction problem, thermosensitive half-space and layer, method of linearizing parameters, numerical inversion of the Laplace transform, the method of successive approximations.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.03.20