

## ПЛОСКЕ ПОТЕНЦІАЛЬНЕ ПОЛЕ ЗОВНІ СИМЕТРИЧНОГО Т-ПОДІБНОГО ПРОФІЛЮ

*Розглянуто нову плоску задачу теорії потенціалу зовні симетричного Т-подібного профілю. З використанням симетричності профілю задачу зведено до змішаної крайової задачі у півплощині з перпендикулярним розрізом, розв'язок якої будується методом часткових областей із застосуванням полярних координат та інтегрального перетворення Мелліна. Вихідну задачу зведено до системи двох рівнянь Вінера – Гопфа, розв'язання якої зводиться до цілком регулярної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язок нескінченної системи будується наближено методом редукції. Отримані явні вирази для шуканої гармонічної функції дозволяють ефективно обчислювати її значення при всіх можливих значеннях аргументів.*

**Ключові слова:** плоска теорія потенціалу, змішана крайова задача, система Вінера – Гопфа.

**Вступ.** При спробах математичного моделювання різноманітних природних явищ, описі технологічних процесів, розв'язанні технічних задач доволі часто доводиться мати справу із крайовими задачами математичної фізики в необмежених областях зі змішаними крайовими умовами. Однією з найбільш розповсюджених методик розв'язування таких задач є застосування методу інтегральних перетворень із подальшим зведенням задачі до рівняння або системи рівнянь Вінера – Гопфа, які розв'язуються однойменним методом [6, 7, 14]. Такий підхід дозволяє ефективно будувати точні [2, 5] і наближені [17] розв'язки плоских змішаних задач, розв'язувати динамічні задачі [10], а також визначати просторові особливості фізичних і механічних полів у нерегулярних точках [4]. Історичний екскурс і різнобічний аналіз методу Вінера – Гопфа, перспективи його подальшого розвитку відображено у оглядовій роботі [16].

Незважаючи на значну кількість робіт, присвячених методу Вінера – Гопфа, інтерес до цього методу не зменшується. Останнім часом активно розвиваються підходи, які дозволяють розв'язувати векторні рівняння (системи рівнянь). Основним кроком методу Вінера – Гопфа є факторизація коефіцієнта рівняння. У випадку скалярного рівняння коефіцієнтом буде аналітична в деякій смузі комплексної площини функція. Для таких функцій добре розвинені методи факторизації [6, 7, 14]. Крім того, є загальна теорема [6], яка гарантує можливість факторизації таких функцій. У випадку ж векторного рівняння (системи рівнянь) коефіцієнтом рівняння є матрична функція (матриця, елементами якої є аналітичні в смузі функції). На жаль, для матричних функцій загальної теореми про факторизацію немає. Тому факторизацію таких коефіцієнтів доводиться проводити в кожному окремому випадку. На сьогодні розроблено підходи до факторизації матриць спеціального вигляду (матриці типу Храпкова – Khrapkov type matrix) [9, 13] і їх узагальнень [11, 19]. Також розробляються підходи наближеної факторизації матриць [15, 17, 18] для тих випадків, коли точну факторизацію провести не вдається. Останнім часом у літературі появились підходи до розв'язування рівнянь Вінера – Гопфа, які не використовують факторизації коефіцієнтів рівняння [12].

У пропонованій роботі розглядається задача про розподіл плоского потенціального поля зовні Т-подібного симетричного профілю. Основною метою роботи є побудова точного розв'язку задачі, а також розробка ефективного підходу до розв'язання системи Вінера – Гопфа, яка виникає в ході

<sup>✉</sup> anlov1974@gmail.com

побудови розв'язку, без використання матричної факторизації.

**1. Формулювання задачі.** У площині  $Oxy$  розглядається Т-подібний профіль, який складається з двох взаємно-перпендикулярних відрізків  $L_1$  і  $L_2$ , довжинами 2 та  $a > 0$  відповідно, причому відрізок  $L_2$  виходить із середини відрізка  $L_1$  (рис. 1). Зовні цього профілю розв'язується задача теорії потенціалу про відшукування гармонічної функції, яка на самому профілі приймає наперед задані значення.

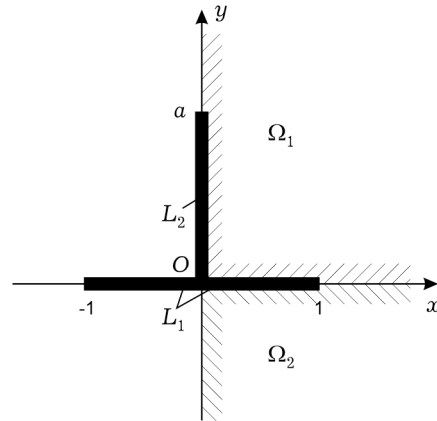


Рис. 1

Сформульована задача відноситься до зовнішніх задач Діріхле для рівняння Лапласа [1]. Тому на нескінченості (при  $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty$ ) шукана гармонічна функція має бути обмеженою.

Використовуючи симетрію профілю відносно осі  $Oy$  (див. рис. 1), задачу можемо розбити на дві – симетричну (парну) та антисиметричну (непарну) за координатою  $x$  задачі. Обмежимося розглядом лише першої з них, яка викликає більший інтерес. Оскільки розглядувана задача є симетричною (парною) за координатою  $x$ , то її розв'язок достатньо шукати лише при  $x \geq 0$ . Враховуючи особливість геометрії Т-подібного профілю, формулювання задачі і її подальше розв'язання будемо проводити в полярних координатах  $(\rho, \varphi)$  [8] із використанням методу окремих (часткових) областей. Розіб'ємо півплощину  $x > 0$  на дві підобласті –  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  (див. рис. 1), які в полярних координатах визначатимуться такими нерівностями:

$$\Omega_1 : \quad \rho > 0, \quad 0 < \varphi < \pi/2,$$

$$\Omega_2 : \quad \rho > 0, \quad -\pi/2 < \varphi < 0.$$

Тоді для розв'язання сформульованої задачі необхідно знайти гармонічну в областях  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$  функцію  $u$ , яка задовольняє такі умови:

– крайова умова на  $L_2$ :

$$u|_{\varphi=\pi/2} = g_2(\rho), \quad 0 < \rho \leq a; \quad (1)$$

– умова парності за координатою  $x$  на продовженні  $L_2$ :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pi/2} = 0, \quad \rho > a; \quad (2)$$

– крайова умова на  $L_1$ :

$$u|_{\varphi=0+} = u|_{\varphi=0-} = g_1(\rho), \quad 0 < \rho \leq 1; \quad (3)$$

– умови зшивання на продовженні  $L_1$ :

$$u|_{\varphi=0+} = u|_{\varphi=0-}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0+} = \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0-}, \quad \rho > 1; \quad (4)$$

– умова парності за координатою  $x$  на від'ємній частині осі  $Oy$ :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=-\pi/2} = 0, \quad \rho > 0, \quad (5)$$

де  $g_{1,2}$  – задані функції, які визначають значення шуканої гармонічної функції  $u$  на  $T$ -подібному профілі. У подальшому, для спрощення міркувань, вважатимемо, що

$$g_1(\rho) = G_1 \cdot \rho^\gamma, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad g_2(\rho) = G_2 \cdot \left(\frac{\rho}{a}\right)^\gamma, \quad 0 \leq \rho \leq a,$$

де  $G_{1,2} = \text{const}$ ,  $\gamma = \text{const} > 0$ .

**2. Побудова розв'язку задачі.** Для розв'язання задачі використаємо інтегральне перетворення Мелліна [8] за координатою  $\rho$ . Для цього спочатку проаналізуємо поведінку шуканої гармонічної функції  $u$  при  $\rho \rightarrow 0$  і при  $\rho \rightarrow +\infty$ . Оскільки, за постановкою задачі, функція  $u$  є обмеженою на нескінченності, то можемо записати, що  $u|_{\rho \rightarrow +\infty} = O(1)$ . Використовуючи крайові умови (1) і (3), а також (3) і (5), можна показати, що при  $\rho \rightarrow 0$  гармонічна функція  $u$  поводить себе, як  $O(\rho^{\gamma_1})$ ,  $\gamma_1 = \min\{2, \gamma\} > 0$ , якщо  $0 < \varphi < \pi/2$  (в області  $\Omega_1$ ), та, як  $O(\rho^{\gamma_2})$ ,  $\gamma_2 = \min\{1, \gamma\} > 0$ , якщо  $-\pi/2 < \varphi < 0$  (в області  $\Omega_2$ ). Таким чином, можемо стверджувати [8], що для функції  $u$  існують інтегральні перетворення Мелліна за координатою  $\rho$  в обох областях  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$ . Перетворення Мелліна функції  $u$  одночасно будуть визначеними і аналітичними у вертикальній смужці  $-\min\{1, \gamma\} < \text{Re } \lambda < 0$  комплексної площини. Тому подамо шукану гармонічну функцію  $u$  в областях  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$  через інтеграли Мелліна [8], які запишемо у вигляді

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-\lambda} \left[ A(\lambda) \sin(\lambda\varphi) + B(\lambda) \sin\left(\lambda\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) \right] d\lambda,$$

$$\rho > 0, \quad 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{в області } \Omega_1),$$

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-\lambda} D(\lambda) \cos\left(\lambda\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right) d\lambda,$$

$$\rho > 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0 \quad (\text{в області } \Omega_2), \quad (6)$$

де  $A$ ,  $B$ ,  $D$  – невідомі коефіцієнти,  $-\min\{1, \gamma\} < c < 0$ .

Відмітимо, що зображення функції  $u$  в області  $\Omega_2$  вибране так, що умова парності (5) вже виконується. Переходимо до виконання умов (1)–(4).

З крайової умови (3) і першої з умов зшивання (4) випливає рівність

$$u|_{\varphi=0+} = u|_{\varphi=0-}, \quad \rho > 0,$$

підставляючи в яку зображення (6), отримаємо

$$B(\lambda) = D(\lambda) \frac{\cos \frac{\pi\lambda}{2}}{\sin \frac{\pi\lambda}{2}}, \quad -\min\{1, \gamma\} < \text{Re } \lambda < 0. \quad (7)$$

Тепер розглянемо умови (1) і (3). Доозначивши ці умови відповідно при  $\rho > a$  та при  $\rho > 1$  невідомими функціями і підставивши в отримані рівності зображення (6) з урахуванням (7), запишемо

$$u|_{\varphi=\pi/2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-\lambda} A(\lambda) \sin \frac{\pi\lambda}{2} d\lambda = \begin{cases} g_2(\rho) = G_2 \cdot \left(\frac{\rho}{a}\right)^\gamma, & 0 < \rho \leq a, \\ u_2\left(\frac{\rho}{a}\right), & \rho > a, \end{cases}$$

$$u|_{\varphi=0+} = u|_{\varphi=0-} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-\lambda} D(\lambda) \cos \frac{\pi\lambda}{2} d\lambda = \begin{cases} g_1(\rho) = G_1 \cdot \rho^\gamma, & 0 < \rho \leq 1, \\ u_1(\rho), & \rho > 1, \end{cases} \quad (8)$$

де  $u_{1,2}$  – невідомі функції, які фактично визначають значення шуканої гармонічної функції  $u$  на продовженнях відрізків  $L_{1,2}$  (див. рис. 1). Використовуючи властивості гармонічних функцій, для  $u_{1,2}$  можемо встановити:

$$u_{1,2} \in C^{(\infty)}(1, +\infty) \cap C[1, +\infty),$$

$$u_{1,2}(r)|_{r \rightarrow +\infty} = O(1), \quad u_{1,2}(1) = G_{1,2},$$

$$u'_{1,2}(r)|_{r \rightarrow +\infty} = O(r^{-2}), \quad u'_{1,2}(r)|_{r \rightarrow 1+} \sim \text{const} \cdot (r-1)^{-1/2}. \quad (9)$$

Застосовуючи до рівностей (8) інтегральне перетворення Мелліна [8], отримаємо

$$D(\lambda) \cos \frac{\pi\lambda}{2} = G_1 \int_0^1 \rho^{\gamma+\lambda-1} d\rho + \int_1^{+\infty} \rho^{\lambda-1} u_1(\rho) d\rho =$$

$$= \frac{G_1}{\lambda + \gamma} + \int_1^{+\infty} \rho^{\lambda-1} u_1(\rho) d\rho =: X_1^{(-)}(\lambda),$$

$$A(\lambda) \sin \frac{\pi\lambda}{2} = G_2 \int_0^a \left(\frac{\rho}{a}\right)^\gamma \rho^{\lambda-1} d\rho + \int_a^{+\infty} \rho^{\lambda-1} u_2\left(\frac{\rho}{a}\right) d\rho =$$

$$= a^\lambda \left( \frac{G_2}{\lambda + \gamma} + \int_1^{+\infty} r^{\lambda-1} u_2(r) dr \right) =: a^\lambda X_2^{(-)}(\lambda),$$

$$- \min\{1, \gamma\} < \text{Re } \lambda < 0, \quad (10)$$

де  $X_{1,2}^{(-)}(\lambda)$  – невідомі функції комплексного аргументу  $\lambda$ , які з урахуванням властивостей (9) функції  $u_{1,2}$  допускають аналітичні продовження в півплощину  $\text{Re } \lambda < 1$ , у якій мають прості полюси в точках  $\lambda = -\gamma$  та  $\lambda = 0$ , при цьому  $X_{1,2}^{(-)}(-\lambda) \sim \text{const} \cdot (-\lambda)^{-3/2}$ , якщо  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Аналогічним чином розглянемо умову парності (2) і другу з умов зшивання (4), яку переписемо у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0+} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0-} = 0, \quad \rho > 1. \quad (11)$$

Доозначивши записану рівність (11) та умову (2) на проміжках відповідно  $0 < \rho < 1$  та  $0 < \rho < a$  невідомими функціями і підставивши в отримані рівності зображення (6) з урахуванням (7), матимемо

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0+} - \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0-} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-\lambda} \lambda \left( A(\lambda) - D(\lambda) \frac{\cos(\pi\lambda)}{\sin \frac{\pi\lambda}{2}} \right) d\lambda = \\
&= \begin{cases} q_1(\rho), & 0 < \rho < 1, \\ 0, & \rho > 1, \end{cases} \\
\left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pi/2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-\lambda} \lambda \left( A(\lambda) - \frac{D(\lambda)}{\sin \frac{\pi\lambda}{2}} \right) \cos \frac{\pi\lambda}{2} d\lambda = \\
&= \begin{cases} q_2\left(\frac{\rho}{a}\right), & 0 < \rho < a, \\ 0, & \rho > a, \end{cases} \quad (12)
\end{aligned}$$

де  $q_{1,2}$  – невідомі функції, для яких можемо записати

$$\begin{aligned}
q_{1,2} \in C(0,1), \quad q_{1,2}(r) \Big|_{r \rightarrow 0+} &= O(r^{\min\{1, \gamma\}}), \\
q_{1,2}(r) \Big|_{r \rightarrow 1-} &\sim \text{const} \cdot (1-r)^{-1/2}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Після застосування інтегрального перетворення Мелліна рівності (12) набудуть вигляду

$$\begin{aligned}
\lambda \left( A(\lambda) - D(\lambda) \frac{\cos(\pi\lambda)}{\sin \frac{\pi\lambda}{2}} \right) &= \int_0^1 \rho^{\lambda-1} q_1(\rho) d\rho =: Y_1^{(+)}(\lambda), \\
\lambda \left( A(\lambda) - \frac{D(\lambda)}{\sin \frac{\pi\lambda}{2}} \right) \cos \frac{\pi\lambda}{2} &= \int_0^a \rho^{\lambda-1} q_2\left(\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \\
&= a^\lambda \int_0^1 r^{\lambda-1} q_2(r) dr =: a^\lambda Y_2^{(+)}(\lambda), \quad -\min\{1, \gamma\} < \text{Re } \lambda < 0, \quad (14)
\end{aligned}$$

де  $Y_{1,2}^{(+)}(\lambda)$  – невідомі функції комплексного аргументу  $\lambda$ , які з урахуванням властивостей (13) є аналітичними в півплощині  $\text{Re } \lambda > -\min\{1, \gamma\}$ , і при цьому  $Y_{1,2}^{(+)}(\lambda) \sim \text{const} \cdot \lambda^{-1/2}$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

З отриманих рівностей (10) та (14) вилучаємо невідомі  $A$ ,  $B$ ,  $D$  і приходимо до системи Вінера – Гопфа відносно функцій  $X_{1,2}^{(-)}$  та  $Y_{1,2}^{(+)}$ :

$$\lambda X_2^{(-)}(\lambda) - \frac{a^{-\lambda} \lambda X_1^{(-)}(\lambda)}{\cos \frac{\pi\lambda}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi\lambda}{2}}{\cos \frac{\pi\lambda}{2}} Y_2^{(+)}(\lambda), \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\cos \frac{\pi\lambda}{2}}{\cos(\pi\lambda)} a^\lambda \lambda X_2^{(-)}(\lambda) - \lambda X_1^{(-)}(\lambda) &= \frac{1}{2} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\cos(\pi\lambda)} Y_1^{(+)}(\lambda), \\
-\min\left\{\frac{1}{2}, \gamma\right\} &< \text{Re } \lambda < 0. \quad (16)
\end{aligned}$$

### 3. Розв'язання системи рівнянь Вінера – Гопфа (15), (16) при $a \geq 1$ .

Аналізуючи отриману систему (15), (16), можемо зробити висновок, що її розв'язання із використанням факторизації матричного коефіцієнта не-ефективне. По-перше, матричний коефіцієнт системи не підпадає під жоден

тип матриць, для яких розроблено методи факторизації. По-друге, навіть якщо вдасться його факторизувати, то при застосуванні техніки Вінера – Гопфа [5] наявність множників  $a^{\pm\lambda}$ , швидше за все, призведе до побудови двох цілих функцій комплексного аргументу  $\lambda$ , які на нескінченності матимуть істотно особливі точки. Для таких функцій, нажаль, немає аналога теореми Ліувілля [5] про загальний вигляд. Як наслідок, розв'язати систему Вінера – Гопфа (15), (16) до кінця не вдасться. Тому для розв'язання системи (15), (16) спробуємо застосувати техніку Вінера – Гопфа окремо до кожного з рівнянь.

Детально розглянемо побудову розв'язку системи Вінера – Гопфа (15), (16) і задачі в цілому у випадку  $a \geq 1$ . Випадок, коли  $0 < a \leq 1$ , цілком аналогічний.

Розглянувши кожне з рівнянь системи (15), (16), можемо стверджувати, що при  $a \geq 1$  методику Вінера – Гопфа можна застосувати безпосередньо до рівняння (16), а до (15) – не можна (перешкоджає множник  $a^{-\lambda}$  у лівій частині рівняння). Для того щоб позбутись доданка з множником  $a^{-\lambda}$ , визначимо  $X_1^{(-)}(\lambda)$  з рівняння (16) і підставимо отриманий вираз у (15). Після певних перетворень перепишемо рівняння (15) у вигляді

$$\frac{\sin(\pi\lambda)}{\cos(\pi\lambda)} \lambda X_2^{(-)}(\lambda) = -Y_2^{(+)}(\lambda) + \frac{\cos \frac{\pi\lambda}{2}}{\cos(\pi\lambda)} a^{-\lambda} Y_1^{(+)}(\lambda),$$

$$- \min \left\{ \frac{1}{2}, \gamma \right\} < \operatorname{Re} \lambda < 0. \quad (17)$$

Отримане рівняння (17) доповнюємо рівнянням (16) і матимемо нову систему Вінера – Гопфа (16), (17), яка еквівалентна системі (15), (16), але тепер техніку Вінера – Гопфа можна застосувати до кожного з рівнянь (16) і (17). Основним кроком при розв'язанні цих рівнянь є факторизація коефіцієнта

$$\frac{\sin(\pi\lambda)}{\cos(\pi\lambda)} = \lambda \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{\Gamma(1 + \lambda) \Gamma(1 - \lambda)},$$

де  $\Gamma(z)$  –  $\Gamma$ -функція [3]. Підставляючи записану факторизацію у рівняння (16), (17), перепишемо їх таким чином:

$$\frac{\Gamma(1 - \lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)} \left( \frac{\cos \frac{\pi\lambda}{2}}{\cos(\pi\lambda)} a^\lambda X_2^{(-)}(\lambda) - X_1^{(-)}(\lambda) \right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)}{\Gamma(1 + \lambda)} Y_1^{(+)}(\lambda), \quad (18)$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{\Gamma(1 - \lambda)} \lambda X_2^{(-)}(\lambda) = \frac{\Gamma(1 + \lambda)}{\lambda \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)} \left( \frac{\cos \frac{\pi\lambda}{2}}{\cos(\pi\lambda)} a^{-\lambda} Y_1^{(+)}(\lambda) - Y_2^{(+)}(\lambda) \right),$$

$$- \min \left\{ \frac{1}{2}, \gamma \right\} < \operatorname{Re} \lambda < 0. \quad (19)$$

Проаналізуємо отримані рівняння (18), (19). Використовуючи аналітичність  $\Gamma$ -функції [3] і функцій  $X_{1,2}^{(-)}$  і  $Y_1^{(+)}$ , неважко встановити, що права частина (18) є аналітичною у півплощині  $\operatorname{Re} \lambda > -\min\{1/2, \gamma\}$ , а ліва – в півплощині  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , за винятком особливих точок  $\lambda = -\gamma$  (полюси  $X_{1,2}^{(-)}(\lambda)$ )

та  $\lambda = -1/2 - k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  (нулі  $\cos(\pi\lambda)$ ). Надалі вважаємо, що  $\lambda \neq 1/2 + k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . У цьому випадку всі особливі точки лівої частини (18) будуть простими полюсами, позбавляючись яких, перепишемо (18) у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)} \left( \frac{\cos \frac{\pi\lambda}{2}}{\cos(\pi\lambda)} a^\lambda X_2^{(-)}(\lambda) - X_1^{(-)}(\lambda) \right) - \frac{G_{12}^*}{\lambda + \gamma} - \\ & - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} x_k}{\lambda + \frac{1}{2} + k} = \\ & = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)}{\Gamma(1 + \lambda)} Y_1^{(+)}(\lambda) - \frac{G_{12}^*}{\lambda + \gamma} - \\ & - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} x_k}{\lambda + \frac{1}{2} + k}, \quad -\min\left\{\frac{1}{2}, \gamma\right\} < \operatorname{Re} \lambda < 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Тут використано такі позначення:

$$\begin{aligned} G_{12}^* &= \frac{\Gamma(1 + \gamma)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)} \left( \frac{\cos \frac{\pi\gamma}{2}}{\cos(\pi\gamma)} a^{-\gamma} G_2 - G_1 \right), \\ x_k &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + k\right)}{\Gamma(1 + k)} X_2^{(-)}\left(-\frac{1}{2} - k\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Взявши до уваги поведінку функції  $X_2^{(-)}$  та  $\Gamma$ -функції [3] на нескінченності, для невідомих величин  $x_k$  отримаємо

$$x_k \sim \frac{\text{const}}{k+1}, \quad k \rightarrow +\infty.$$

В результаті перетворень права частина рівності (20) є аналітичною в півплощині  $\operatorname{Re} \lambda > -\min\{1/2, \gamma\}$ , а ліва – в півплощині  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , при цьому обидві частини (20) прямують до нуля, як  $\text{const} \cdot \lambda^{-1}$ , якщо  $\lambda \rightarrow \infty$ . Тоді, застосовуючи принцип аналітичного продовження [6], отримуємо, що ліва і права частини рівності (20) визначають функцію від комплексного аргументу  $\lambda$ , яка є аналітичною в усій комплексній площині і перетворюється в нуль у нескінченно віддаленій точці. За теоремою Ліувілля [6] такою функцією може бути лише тотожно нульова функція. Тоді з (20) отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)} \left( \frac{\cos \frac{\pi\lambda}{2}}{\cos(\pi\lambda)} a^\lambda X_2^{(-)}(\lambda) - X_1^{(-)}(\lambda) \right) - \frac{G_{12}^*}{\lambda + \gamma} - \\ & - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} x_k}{\lambda + \frac{1}{2} + k} = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda < 0, \quad (22) \\ & \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)}{\Gamma(1 + \lambda)} Y_1^{(+)}(\lambda) - \frac{G_{12}^*}{\lambda + \gamma} - \end{aligned}$$

$$-\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} x_k}{\lambda + \frac{1}{2} + k} = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda > -\min\left\{\frac{1}{2}, \gamma\right\}. \quad (23)$$

Тепер розглянемо рівняння (19). Зазначимо, що це рівняння допускає аналітичне продовження на більш широку смугу. За побудовою функція  $X_2^{(-)}(\lambda)$  є аналітичною при  $\operatorname{Re} \lambda < 1$ , за винятком простих полюсів в точках  $\lambda = 0$  та  $\lambda = -\gamma$ . Тоді добуток  $\lambda X_2^{(-)}(\lambda)$  є аналітичною функцією в півплощині  $\operatorname{Re} \lambda < 1$  з простим полюсом лише в точці  $\lambda = -\gamma$ . Коефіцієнт у лівій частині (19) (відношення  $\Gamma$ -функцій) є аналітичним при  $\operatorname{Re} \lambda < 1/2$  [3]. Тоді всю ліву частину рівняння (19) можна аналітично продовжити на смугу  $-\min\{1/2, \gamma\} < \operatorname{Re} \lambda < 1/2$ . Використовуючи аналітичність функцій  $Y_{1,2}^{(+)}$ , косинус-функції та  $\Gamma$ -функції [3], можемо встановити, що права частина (19) буде аналітичною у смузі  $-\min\{1/2, \gamma\} < \operatorname{Re} \lambda < 1/2$ , за винятком, можливо, точки  $\lambda = 0$ , у якій може мати простий полюс. Оскільки ліва частина рівняння (19) продовжується на вказану, більш широку смугу без особливих точок, то за теоремою про єдиність аналітичного продовження і права частина (19) має продовжуватись без особливих точок. Тому  $\lambda = 0$  не повинна бути полюсом правої частини рівняння (19), а це є можливим лише у випадку, коли

$$Y_1^{(+)}(0) - Y_2^{(+)}(0) = 0. \quad (24)$$

Зауважимо, що умова (24) відіграватиме важливу роль не тільки при розв'язанні рівняння (19), але і в подальшому при визначенні шуканої гармонічної функції  $u$ .

Враховуючи попередні міркування, отримаємо, що ліва частина рівняння (19) є аналітичною в півплощині  $\operatorname{Re} \lambda < 1/2$ , за винятком простого полюса в точці  $\lambda = -\gamma$  (полюс  $X_2^{(-)}(\lambda)$ ), а права – в півплощині  $\operatorname{Re} \lambda > -\min\{1/2, \gamma\}$ , за винятком простих полюсів у точках  $\lambda = 1/2 + k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  (нулі  $\cos(\pi\lambda)$ ). З огляду на умову (24) точка  $\lambda = 0$  є усупною особливою точкою правої частини (19), яку можна не розглядати як особливу взагалі. Позбавляючись вказаних особливих точок, перепишемо (19) таким чином:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{\Gamma(1 - \lambda)} \lambda X_2^{(-)}(\lambda) + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)}{\Gamma(\gamma)} \frac{G_2}{\lambda + \gamma} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} y_k}{\lambda - \frac{1}{2} - k} = \\ & = \frac{\Gamma(1 + \lambda)}{\lambda \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)} \left( \frac{\cos \frac{\pi \lambda}{2}}{\cos(\pi \lambda)} a^{-\lambda} Y_1^{(+)}(\lambda) - Y_2^{(+)}(\lambda) \right) + \\ & + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)}{\Gamma(\gamma)} \frac{G_2}{\lambda + \gamma} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} y_k}{\lambda - \frac{1}{2} - k} \\ & \quad - \min\left\{\frac{1}{2}, \gamma\right\} < \operatorname{Re} \lambda < \frac{1}{2}, \quad (25) \end{aligned}$$

де використано позначення



$$y_k = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)}{\Gamma(1 + k)} Y_1^{(+)}\left(\frac{1}{2} + k\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

Беручи до уваги поведінку на нескінченності  $\Gamma$ -функції [3] та функції  $Y_1^{(+)}$ , для невідомих  $y_k$  отримуємо таку асимптотику:

$$y_k \sim \frac{\text{const}}{k + 1}, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Аналізуючи окремі складові рівності (25), встановлюємо, що її ліва частина є аналітичною у півплощині  $\text{Re } \lambda < 1/2$ , а права – в півплощині  $\text{Re } \lambda > -\min\{1/2, \gamma\}$ , і при цьому обидві частини прямують до нуля на нескінченності, як  $\text{const} \cdot \lambda^{-1}$ . Тоді, використовуючи аналітичне продовження, отримуємо, що ліва та права частини рівності (25) визначають цілу функцію комплексного аргументу  $\lambda$ , яка на нескінченності прямуватиме до нуля. За теоремою Ліувілля [6], така ціла функція буде тотожно нульовою. Таким чином, з (25) отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{\Gamma(1 - \lambda)} \lambda X_2^{(-)}(\lambda) + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)}{\Gamma(\gamma)} \frac{G_2}{\lambda + \gamma} + \\ & + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} y_k}{\lambda - \frac{1}{2} - k} = 0, \quad \text{Re } \lambda < \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(1 + \lambda)}{\lambda \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)} \left( \frac{\cos \frac{\pi \lambda}{2}}{\cos(\pi \lambda)} a^{-\lambda} Y_1^{(+)}(\lambda) - Y_2^{(+)}(\lambda) \right) + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)}{\Gamma(\gamma)} \frac{G_2}{\lambda + \gamma} + \\ & + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} y_k}{\lambda - \frac{1}{2} - k} = 0, \\ & \text{Re } \lambda > -\min\left\{\frac{1}{2}, \gamma\right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Аналізуючи рівність (28), неважко встановити, що умова (24) виконується.

Отримані в результаті розв'язання системи (16), (17) рівності (22), (23), (27) і (28) визначають невідомі аналітичні функції  $X_{1,2}^{(-)}(\lambda)$  і  $Y_{1,2}^{(+)}(\lambda)$ . Але для їх повного визначення необхідно знайти ще невідомі величини  $x_k$  та  $y_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , що входять до цих рівностей. Враховуючи вирази (21) та (26) для цих невідомих, послідовно покладемо в (27)  $\lambda = -1/2 - m$ , а в (28) –  $\lambda = 1/2 + m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . В результаті отримуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $x_k$ ,  $y_k$ :

$$\begin{aligned} K_m x_m + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} y_k}{1 + m + k} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)}{\Gamma(\gamma)} \frac{G_2}{\gamma - m - \frac{1}{2}}, \\ K_m y_m - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} x_k}{1 + m + k} &= \frac{2G_{12}^*}{\gamma + \frac{1}{2} + m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (29)$$

де

$$K_m = \frac{\Gamma^2(1+m)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad K_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1.$$

Таким чином, застосовуючи техніку Вінера – Гопфа до кожного з рівнянь системи (16), (17), яка еквівалентна вихідній системі (15), (16), при  $a \geq 1$  прийшли до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (29), яка є цілком регулярною, якщо  $a > 1$ , а при  $a = 1$  зводиться до регулярної за допомогою заміни невідомих  $x_k^* = x_k \sqrt{k+1}$ ,  $y_k^* = y_k \sqrt{k+1}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Враховуючи регулярність системи (29), для її наближеного розв'язання можемо ефективно застосовувати метод редукції до скінченної.

**4. Явний вигляд гармонічної функції  $u$  при  $a \geq 1$ .** Як результат розв'язання сформульованої задачі запишемо явні вирази, які дозволяють обчислювати значення шуканої гармонічної функції  $u$  при всіх можливих значеннях аргументів  $\rho$ ,  $\varphi$ . Для цього спочатку з рівностей (14) визначимо коефіцієнти  $A$  та  $D$  через аналітичні функції  $Y_{1,2}^{(+)}$  і підставимо отримані вирази з урахуванням (7) в інтеграли Мелліна (6) функції  $u$ . Отримаємо

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\rho^{-\lambda}}{\lambda \sin(\pi\lambda)} \left[ Y_1^{(+)}(\lambda) \cos \frac{\pi\lambda}{2} \cos \left( \lambda \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right) - a^{-\lambda} Y_2^{(+)}(\lambda) \cos \left( \lambda \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) \right) \right] d\lambda,$$

$$\rho > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{в області } \bar{\Omega}_1),$$

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\rho^{-\lambda}}{\lambda \sin(\pi\lambda)} \left[ Y_1^{(+)}(\lambda) \cos \frac{\pi\lambda}{2} - a^{-\lambda} Y_2^{(+)}(\lambda) \right] \cos \left( \lambda \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) \right) d\lambda,$$

$$\rho > 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \quad (\text{в області } \bar{\Omega}_2), \quad (30)$$

де  $c$  вибираємо з вузького проміжку:  $-\min\{1/2, \gamma\} < c < 0$ .

При  $\rho \geq a \geq 1$  отримані інтеграли можна обчислити із використанням теорії лишків, якщо замкнути контур інтегрування в півплощині  $\text{Re } \lambda > c$  (обхід контуру при цьому буде здійснюватись у від'ємному напрямку). Підінтегральні вирази мають у півплощині  $\text{Re } \lambda > c$  прості полюси в точках  $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ . Точка  $\lambda = 0$  буде простим полюсом з огляду на (24). Якби рівність (24) не виконувалась, то підінтегральні вирази в рівності (30) мали би в точці  $\lambda = 0$  полюси другого порядку. Обчислюючи лишки в таких полюсах, отримали б, що шукана функція  $u$  має логарифмічну поведінку при  $\rho \rightarrow +\infty$ , а це суперечить умові обмеженості  $u$  на нескінченності.

Суми лишків підінтегральних виразів (30) у вказаних простих полюсах обчислюємо із використанням рівності (28). В результаті отримаємо явні вирази для шуканої гармонічної функції  $u$  при  $\rho \geq a \geq 1$ , причому ці вирази будуть однаковими на обох проміжках  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  (в області  $\bar{\Omega}_1$ ) і  $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$  (в області  $\bar{\Omega}_2$ ):

$$\begin{aligned}
u(\rho, \varphi) = & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)}{\Gamma(\gamma + 1)} G_2 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} y_k}{\frac{1}{2} + k} \right] + \\
& + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{\pi} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{2j+1} \sin((2j+1)\varphi) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 2j\right)}{\Gamma(2+2j)} \times \\
& \times \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)}{\Gamma(\gamma)} \frac{G_2}{\gamma + 2j + 1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} y_k}{2j + \frac{1}{2} - k} \right] + \\
& + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{\pi} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{2j} \cos(2j\varphi) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 2j\right)}{\Gamma(1+2j)} \times \\
& \times \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)}{\Gamma(\gamma)} \frac{G_2}{\gamma + 2j} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} y_k}{2j - \frac{1}{2} - k} \right], \\
& \rho \geq a \geq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (31)
\end{aligned}$$

Для визначення  $u$  при  $1 \leq \rho \leq a$  (цей випадок можливий лише тоді, коли  $a > 1$ ) з рівностей (14), (15) виражаємо коефіцієнти  $A$  і  $D$  через аналітичні функції  $Y_1^{(+)}$  та  $X_2^{(-)}$  і підставляємо їх з урахуванням (7) в інтеграл Мелліна (6) функції  $u$ . Отримаємо

$$\begin{aligned}
u(\rho, \varphi) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^\lambda \frac{X_2^{(-)}(\lambda)}{\cos(\pi\lambda)} \cos\left(\lambda\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right) d\lambda - \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-\lambda} \frac{Y_1^{(+)}(\lambda)}{\lambda \cos(\pi\lambda)} \cos \frac{\pi\lambda}{2} \sin\left(\lambda\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) d\lambda, \\
& \rho > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{в області } \bar{\Omega}_1), \\
u(\rho, \varphi) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^\lambda \frac{X_2^{(-)}(\lambda)}{\cos(\pi\lambda)} \cos\left(\lambda\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right) d\lambda - \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-\lambda} \frac{Y_1^{(+)}(\lambda)}{\lambda \cos(\pi\lambda)} \sin \frac{\pi\lambda}{2} \cos\left(\lambda\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right) d\lambda, \\
& \rho > 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \quad (\text{в області } \bar{\Omega}_2), \quad (32)
\end{aligned}$$

де  $-\min\{1/2, \gamma\} < c < 0$ .

При  $1 \leq \rho \leq a$  інтеграли, що входять у рівності (32), можна обчислити за допомогою теорії лишків. Інтеграл, які є першими доданками (в обох рівностях вони однакові), можна порахувати, якщо замкнути контур інтегрування в півплощині  $\operatorname{Re} \lambda < c$  (обхід контуру буде здійснюватись у додатному напрямку), в якій підінтегральні вирази мають прості полюси в точках  $\lambda = -\gamma$  і  $\lambda = -1/2 - k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  ( $\gamma \neq 1/2 + k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Інтеграл, що є другими доданками в (32), обчислюємо за теорією лишків, якщо контур інтегрування замкнути в півплощині  $\operatorname{Re} \lambda > c$  (обхід контуру буде здійснюва-

тись у від'ємному напрямку). Підінтегральні вирази в цих інтегралах мають при  $\text{Re } \lambda > c$  прості полюси в точках  $\lambda = 1/2 + k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Обчисливши лишки для всіх інтегралів у вказаних особливих точках, використавши позначення (21) та (26), отримаємо явні вирази для шуканої гармонічної функції  $u$  при  $1 \leq \rho \leq a$ , причому ці вирази будуть однаковими як для  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  (в області  $\bar{\Omega}_1$ ), так і для  $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$  (в області  $\bar{\Omega}_2$ ):

$$u(\rho, \varphi) = \frac{G_2}{\cos(\pi\gamma)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^\gamma \cos\left(\gamma\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right) - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)} \left[ \left(\frac{\rho}{a}\right)^{1/2+k} x_k + \rho^{-1/2-k} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) y_k \right] \times \cos\left(\left(\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right), \quad 1 \leq \rho \leq a, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (33)$$

Нарешті для останнього випадку  $0 < \rho \leq 1$  коефіцієнти  $A$  і  $D$  визначимо з рівностей (10) через аналітичні функції  $X_{1,2}^{(-)}$ , підставляємо отримані вирази в інтегралі Мелліна (6) з урахуванням (7). В результаті для шуканої функції  $u$  маємо

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\rho^{-\lambda}}{\sin \frac{\pi\lambda}{2}} \left[ a^\lambda X_2^{(-)}(\lambda) \sin(\lambda\varphi) + X_1^{(-)}(\lambda) \sin\left(\lambda\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) \right] d\lambda, \quad \rho > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{в області } \bar{\Omega}_1), \quad (34)$$

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-\lambda} \frac{X_1^{(-)}(\lambda)}{\cos \frac{\pi\lambda}{2}} \cos\left(\lambda\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right) d\lambda, \quad \rho > 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \quad (\text{в області } \bar{\Omega}_2), \quad (35)$$

де  $-\min\{1/2, \gamma\} < c < 0$ .

При  $0 < \rho \leq 1$  інтегралі в рівностях (34), (35) можна обчислити з використанням теорії лишків, якщо замкнути контур інтегрування в півплощині  $\text{Re } \lambda < c$ , в якій підінтегральний вираз у (34) має полюси в точках  $\lambda = -\gamma$  та  $\lambda = -2n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а підінтегральний вираз у (35) – в точках  $\lambda = -\gamma$  та  $\lambda = -1 - 2n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . При цьому, якщо  $\gamma \neq -1, -2, -3, \dots$ , то всі полюси будуть простими. Обчисливши суми лишків для інтегралів у (34), (35) у відповідних особливих точках, отримаємо явні вирази для шуканої гармонічної функції  $u$  при  $0 \leq \rho \leq 1$ :

$$u(\rho, \varphi) = \rho^\gamma \frac{G_1 \sin\left(\gamma\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) + a^{-\gamma} G_2 \sin(\gamma\varphi)}{\sin \frac{\pi\gamma}{2}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 2n\right)}{\Gamma(1 + 2n)} \times \rho^{2n} \sin(2n\varphi) \left[ \frac{G_{12}^*}{\gamma - 2n} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} x_k}{2n - \frac{1}{2} - k} \right], \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{в області } \bar{\Omega}_1), \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
u(\rho, \varphi) = G_1 \rho^\gamma & \frac{\cos\left(\gamma\left(\frac{1}{2} + \varphi\right)\right)}{\cos\frac{\pi\gamma}{2}} + \\
& + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 2n\right)}{\Gamma(2 + 2n)} \rho^{1+2n} \sin((1 + 2n)\varphi) \left[ \frac{G_{12}^*}{\gamma - 1 - 2n} - \right. \\
& \left. - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{a^{-1/2-k} x_k}{2n + \frac{1}{2} - k} \right], \\
0 \leq \rho \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 & \quad (\text{в області } \bar{\Omega}_2), \quad (37)
\end{aligned}$$

при цьому використовується рівність (22).

З аналізу отриманих явних виразів (31), (33), (36) і (37) для гармонічної функції  $u$  випливає, що значення функції  $u$  повністю визначаються через величини  $x_k, y_k$ , тобто через розв'язок нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (29). Також слід відмітити, що незважаючи на достатньо громіздкий вигляд формул (31), (33), (36) і (37), вони дозволяють ефективно обчислювати значення функції  $u$  при всіх можливих значеннях аргументів  $\rho, \varphi$ . Крім цього, з використанням асимптотичної поведінки величин  $x_k, y_k$  при  $k \rightarrow +\infty$  можемо підвищити швидкість збіжності рядів (31), (33), (36) і (37), виділивши їх повільно збіжні складові. Деякі особливості поведінки шуканої гармонічної функції  $u$  при різних значеннях параметрів задачі  $a, \gamma, G_{1,2}$  можна простежити на рис. 2 і рис. 3.

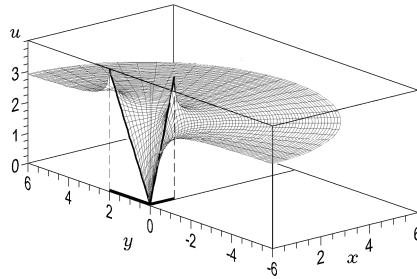


Рис. 2. «Графік» функції  $u$  при  $a = 2, \gamma = 1.01, G_1 = G_2 = 4$ .

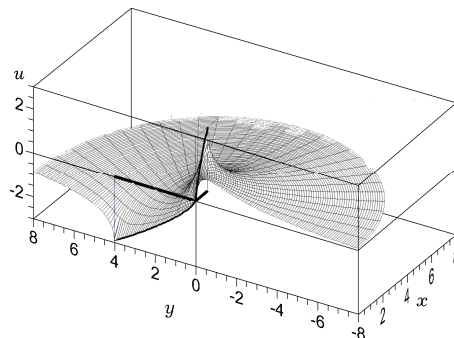


Рис. 3. «Графік» функції  $u$  при  $a = 4, \gamma = 0.75, G_1 = 3, G_2 = -3$ .

**Висновки.** У роботі отримано точний розв'язок плоскої задачі теорії потенціалу про відшукування гармонічної зовні Т-подібного профілю функції,

яка на самому профілі приймає задані значення. З використанням методу часткових областей та інтегрального перетворення Мелліна сформульовану задачу зведено до розв'язання системи двох функціональних рівнянь Вінера – Гопфа. Побудова розв'язку отриманої системи Вінера – Гопфа виявилась неможливою, якщо застосовувати матричну факторизацію її коефіцієнта. Тому для розв'язання цієї системи запропоновано підхід, який базується на застосуванні техніки Вінера – Гопфа до кожного з рівнянь системи окремо. Для цього систему слід перетворити належним чином залежно від її параметрів (параметрів задачі). Такий підхід дозволив звести розв'язання системи Вінера – Гопфа до цілком регулярної нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для наближеного розв'язку нескінченної системи рівнянь застосовано метод редукції.

В результаті розв'язання вихідної задачі теорії потенціалу отримано явні зображення шуканої гармонічної функції через розв'язок нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Ці зображення дозволяють ефективно і з достатньою точністю обчислювати значення гармонічної функції при всіх можливих значеннях її аргументів.

1. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. – Москва: Физматлит, 2004. – 400 с.
2. *Клімчук Т. В., Острик В. І.* Гладкий контакт напівнескінченного штампа із заокругленим краєм і пружної смуги // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – **59**, № 2. – С. 132–141.  
 The same: *Klimchuk T. V., Ostryk V. I.* Smooth contact of a semiinfinite punch with rounded edge and an elastic strip // *J. Math. Sci.* – 2018. – **231**, No. 5. – P. 650–664. – DOI 10.1007/s10958-018-3842-9.
3. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. – Москва: Физматгиз, 1963. – 358 с.
4. *Ловейкін А. В.* Особливість поведінки напружень у нестисливому півпросторі із внутрішньою V-подібною тріщиною, що лежить у площині, перпендикулярній поверхні півпростору, а її вершина виходить на поверхню // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2012. – **55**, № 2. – С. 93–106.  
 The same: *Loveikin A. V.* Specific features of the stress behavior in an incompressible half-space with internal V-shaped crack lying in a plane perpendicular to the surface of the half-space with a tip reaching the surface // *J. Math. Sci.* – 2013. – **192**, No. 5. – P. 593–607.
5. *Ловейкін А. В.* Рівновага пружної півплощини з жорстко закріпленою межею, яка послаблена похилим розрізом // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2019. – **62**, № 2. – С. 146–160.
6. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.  
 The same: *Noble B.* Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations. – London: Pergamon Press, 1958. – x+246 p.
7. *Острик В. И., Улитко А. Ф.* Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 2006. – 328 с.
8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.
9. *Храпков А. А.* Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил // *Прикл. математика и механика.* – 1971. – **35**, № 4. – С. 677–689.  
 The same: *Khrapkov A. A.* Certain cases of the elastic equilibrium of an infinite wedge with a nonsymmetric notch at the vertex, subjected to concentrated forces // *J. Appl. Math. Mech.* – 1971. – **35**, No. 1. – P. 625–637.  
 – [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(71\)90056-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(71)90056-6).
10. *Abrahams I. D.* On the application of the Wiener-Hopf technique to problems in dynamic elasticity // *Wave Motion.* – 2002. – **36**, No. 4. – P. 311–333.  
 – [https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(02\)00027-6](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(02)00027-6).
11. *Antipov Y. A.* The Baker-Akhiezer function and factorization of the Chebotarev-Khrapkov matrix // *Lett. Math. Phys.* – 2014. – **104**, No. 11. – P. 1365–1384. – <https://doi.org/10.1007/s11005-014-0721-2>.

12. *Crowdy D. G., Luca E.* Solving Wiener-Hopf problems without kernel factorization, // Proc. R. Soc. Lond. A. – 2014. – **470**: 20140304.  
– <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2014.0304>.
13. *Jones D. S.* Wiener-Hopf splitting of a 2x2 matrix // Proc. Roy. Soc. A. – 1991. – **434**, No. 1891. – P. 419–433. – <https://www.jstor.org/stable/51839>.
14. *Khrapkov A. A.* Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. – St. Petersburg: B. E. Vedeneev VNIIG Publ. House, 2001. – 144 p.
15. *Kisil A. V.* An iterative Wiener-Hopf method for triangular matrix functions with exponential factors // SIAM J. Appl. Math. –2018. – **78**, No. 1. – P. 45–62.  
– <https://doi.org/10.1137/17M1136304>.
16. *Lawrie J., Abrahams I. D.* A brief historical perspective of the Wiener-Hopf technique // J. Eng. Math. – 2007. – **59**, No. 4. – P. 351–358.
17. *Livasov P., Mishuris G.* Numerical factorization of a matrix-function with exponential factors in an anti-plane problem for a crack with process zone // Phil. Trans. R. Soc. A. – 2019. – **377**: 20190109.  
– <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2019.0109>.
18. *Mishuris G., Rogosin S.* Regular approximate factorization of a class of matrix-function with an unstable set of partial indices // Proc. R. Soc. A. – 2018. – **474**: 20170279. – <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2017.0279>.
19. *Veitch B. H., Abrahams I. D.* On the commutative factorization of  $n \times n$  matrix Wiener-Hopf kernels with distinct eigenvalues // Proc. R. Soc. A. – 2007. – **463**, No. 2078. – P. 613–639. – <https://doi.org/10.1098/rspa.2006.1780>.

### ПЛОСКОЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ ВНЕ СИММЕТРИЧНОГО Т-ОБРАЗНОГО ПРОФИЛЯ

Рассмотрена новая плоская задача теории потенциала вне симметричного Т-образного профиля. С использованием симметричности профиля задача сведена к смешанной краевой задаче в полуплоскости с перпендикулярным разрезом, решение которой строится методом частичных областей с использованием полярных координат и интегрального преобразования Меллина. Исходная задача сведена к системе двух уравнений Винера – Хопфа, решение которой сводится к вполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Решение бесконечной системы строится приближенно методом редукции. Получены явные выражения для искомой гармонической функции, позволяющие эффективно вычислять ее значения при всех возможных значениях аргументов.

**Ключевые слова:** плоская теория потенциала, смешанная краевая задача, система Винера – Хопфа.

### PLANE POTENTIAL FIELD OUTSIDE THE SYMMETRIC T-SHAPED CONTOUR

A new plane problem of the theory of potential outside a symmetric T-shaped contour is considered. Using the contour symmetry the problem is reduced to the mixed boundary value problem in the half-plane with the perpendicular cut. The solution of this problem is constructed by the method of partial domains using the polar coordinates, and the integral Mellin transform. The initial problem is reduced to a system of two Wiener – Hopf equations, the solving of which is transformed to the completely regular infinite system of linear algebraic equations. The solution of the infinite system is found approximately by the reduction method. The explicit expressions for the unknown harmonic function are obtained. These expressions make possible to efficiently calculate the harmonic function values for any arguments.

**Key words:** plane theory of potential, mixed boundary value problem, Wiener – Hopf system.