УДК 512.813: 517.957.6

В. М. Федорчук[✉], В. І. Федорчук

ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ СИМЕТРІЙНИХ РЕДУКЦІЙ (1+3)-ВИМІРНОГО РІВНЯННЯ МОНЖА – АМПЕРА

Здійснено класифікацію симетрійних редукцій рівняння Монжа – Ампера в просторі $M(1,3)\times R(u)$*. Наведено деякі результати, отримані з використанням класифікації тривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре* $P(1,4)$*.*

Ключові слова: *класифікація симетрійних редукцій, рівняння Монжа – Ампера, класифікація алгебр Лі, неспряжені підалгебри алгебр Лі, група Пуанкаре* $P(1,4)$*.*

З часів Ньютона диференціальні рівняння є одним із основних інструментів для побудови математичних моделей процесів, які відбуваються в навколишньому світі. У багатьох випадках диференціальні рівняння цих моделей мають нетривіальну симетрію. Для дослідження таких рівнянь можна, зокрема, використовувати класичний метод Лі – Овсяннікова. Використання цього підходу, зокрема, дає можливість проводити симетрійну редукцію і будувати класи інваріантних розв’язків рівнянь, що досліджуються [1, 21, 23] (див. також цитовану там літературу).

При проведенні симетрійної редукції деяких важливих для теоретичної і математичної фізики диференціальних рівнянь виявилося, що в окремих випадках редуковані рівняння, отримані за допомогою неспряжених підалгебр заданих рангів алгебр Лі груп симетрії цих рівнянь, були різних типів (див., наприклад, [3, 9, 12, 14, 22] і цитовану там літературу). Зазначимо, що вивчення цього типу редукції започатковане ще в 1984 р. працею A. M. Grundland, J. Harnad, P. Winternitz [14].

Згідно з класичним груповим аналізом (див., наприклад, [1, 23]) інваріантні розв’язки диференціальних рівнянь слід класифікувати за їхніми рангами (рангами відповідних їм неспряжених підалгебр). При такому підході не вдається пояснити отримання різних типів редукованих рівнянь (інваріантних розв’язків) при використанні неспряжених підалгебр заданих рангів алгебр Лі груп симетрії цих рівнянь.

У роботі [11] для класифікації симетрійних редукцій (інваріантних розв’язків) згаданих вище диференціальних рівнянь авторами цієї статті запропоновано використовувати структурні властивості низькорозмірних неспряжених підалгебр того самого рангу алгебр Лі груп симетрії досліджуваних рівнянь.

На сьогодні здійснено класифікацію симетрійних редукцій та інваріантних розв’язків для рівнянь ейконала і Ойлера – Лагранжа – Борна – Інфельда в просторі $M(1,3)\times R(u)$ з використанням класифікації низькорозмірних ($\dim L \le 3$) неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ (детальніше див. [10–13] і цитовану там літературу). Тут і надалі $M(1,3)$ – (1+3)-вимірний простір Мінковського, $R(u)$ – дійсна вісь залежної змінної u.

Розв’язування багатьох задач геометрії, геометричного аналізу, теорії струн, космології, геометричної оптики, оптимального переносу, одновимірної газової динаміки, метеорології та океанографії пов’язане з вивченням рівнянь Монжа – Ампера в просторах різних вимірностей і різних типів. На даний час опубліковано дуже багато робіт, присвячених дослідженню цих рівнянь, зокрема [2, 7, 8, 15–20, 24–29] (див. також цитовану там літературу).

✉vasfed@gmail.com

Ця робота присвячена класифікації симетрійних редукцій та інваріантних розв'язків для рівняння Монжа − Ампера в просторі $M(1,3)\times R(u)$. Наведемо тільки окремі результати, отримані з використанням класифікації тривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. З цією метою спочатку розглянемо деякі результати, що стосуються алгебри Лі групи $P(1,4)$ та її неспряжених підалгебр.

1. Алгебра Лі групи $P(1,4)$ та її неспряжені підалгебри. Група Пуанкаре $P(1,4)$ є групою поворотів і зсувів п'ятивимірного простору Мінковського $M(1,4)$. Серед важливих для теоретичної і математичної фізики груп група $P(1,4)$ посідає особливе місце. Вона є найменшою групою, яка містить як підгрупи групи симетрії релятивістської фізики (група Пуанкаре $P(1,3)$) та нерелятивістської фізики (розширена група Галілея $\tilde{G}(1,3)$ [5]).

Алгебра Лі групи $P(1,4)$ задається 15-ма базисними елементами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$, $\mu,\nu = 0,1,2,3,4$, і P_μ, $\mu = 0,1,2,3,4$, які задовольняють комутаційні співвідношення

$$[P_\mu, P_\nu] = 0,$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = g_{\nu\sigma}P_\mu - g_{\mu\sigma}P_\nu,$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho},$$

де $g_{\mu\nu}$, $\mu,\nu = 0,1,2,3,4$, − метричний тензор з компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$ і $g_{\mu\nu} = 0$, якщо $\mu \neq \nu$.

У цій роботі розглядатимемо таке зображення [6] для алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad P_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$P_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad P_4 = -\frac{\partial}{\partial u}, \qquad M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, \qquad x_4 \equiv u.$$

Надалі перейдемо від $M_{\mu\nu}$ і P_μ до таких лінійних комбінацій:

$$G = M_{04}, \qquad L_1 = M_{23}, \qquad L_2 = -M_{13}, \qquad L_3 = M_{12},$$

$$P_a = M_{a4} - M_{0a}, \qquad C_a = M_{a4} + M_{0a}, \qquad a = 1,2,3,$$

$$X_0 = \frac{P_0 - P_4}{2}, \qquad X_k = P_k, \qquad k = 1,2,3, \qquad X_4 = \frac{P_0 + P_4}{2}.$$

У праці [4] проведено класифікацію всіх неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ (вимірності яких не перевищують 3) в класи ізоморфних підалгебр.

2. Про класифікацію симетрійних редукцій (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера. У цій роботі розглядаємо рівняння Монжа − Ампера вигляду

$$\det(u_{\mu\nu}) = 0, \tag{1}$$

де

$$u = u(x), \;\; x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in M(1,3), \;\; u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \;\; \mu,\nu = 0,1,2,3.$$

У роботі [6] вивчено симетрію і побудовано багатопараметричні сім'ї точних розв'язків багатовимірного рівняння Монжа − Ампера. Із цієї роботи, зокрема, випливає, що алгебра Лі групи симетрії досліджуваного рівняння (1) містить як підалгебру алгебру Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$.

Для проведення класифікації симетрійних редукцій (1+3)-вимірного рівняння Монжа – Ампера використаємо класифікацію тривимірних неспряжених підалгебр [4] алгебри Лі групи $P(1,4)$. В результаті виконаної класифікації встановлено, що тривимірні неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ є таких типів: $3A_1$, $A_2 \oplus A_1$, $A_{3,1}$, $A_{3,2}, A_{3,3}$, $A_{3,4}$, $A_{3,6}$, $A_{3,7}^{a}$, $A_{3,8}$, $A_{3,9}$.

Внаслідок проведення симетрійної редукції (1+3)-вимірного рівняння Монжа – Ампера отримали такі редуковані рівняння:

– тотожності,
– лінійні звичайні диференціальні рівняння,
– нелінійні звичайні диференціальні рівняння,
– диференціальні рівняння із частинними похідними,

Наведемо короткий огляд отриманих результатів.

2.1 Редукції до тотожностей. Такого типу редукції отримали для деяких неспряжених підалгебр типів $3A_1$, $A_2 \oplus A_1$, $A_{3,1}$, $A_{3,2}$, $A_{3,3}$, $A_{3,6}$.

Приклади.

Підалгебри типу $3A_1$.

1. $\langle P_1 - \gamma X_3, \gamma > 0\rangle \oplus \langle P_2 - X_2 - \delta X_3, \delta \neq 0\rangle \oplus \langle X_4\rangle$:

Анзац

$$x_3(x_0+u)^2 - (\gamma x_1 + \delta x_2 - x_3)(x_0+u) - \gamma x_1 = \varphi(\omega), \qquad \omega = x_0 + u.$$

Розв’язок (1+3)-вимірного рівняння Монжа – Ампера

$$x_3(x_0+u)^2 - (\gamma x_1 + \delta x_2 - x_3)(x_0+u) - \gamma x_1 = \varphi(x_0+u),$$

де φ – довільна гладка функція.

2. $\langle P_1\rangle \oplus \langle P_2 - X_2\rangle \oplus \langle X_3\rangle$:

Анзац

$$\frac{x_0^2 - x_1^2 - u^2}{x_0 + u} - \frac{x_2^2}{x_0 + u + 1} = \varphi(\omega), \qquad \omega = x_0 + u.$$

Розв’язок (1+3)-вимірного рівняння Монжа – Ампера

$$\frac{x_0^2 - x_1^2 - u^2}{x_0 + u} - \frac{x_2^2}{x_0 + u + 1} = \varphi(x_0 + u),$$

де φ – довільна гладка функція.

Підалгебра типу $A_2 \oplus A_1$

$$\langle -(G + \alpha X_3), X_4, \alpha > 0\rangle \oplus \langle L_3 + \beta X_3, \beta > 0\rangle:$$

Анзац

$$x_3 - \alpha \ln(x_0 + u) + \beta \arctan\frac{x_1}{x_2} = \varphi(\omega), \qquad \omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

Розв’язок (1+3)-вимірного рівняння Монжа – Ампера

$$x_3 - \alpha \ln(x_0 + u) + \beta \arctan\frac{x_1}{x_2} = \varphi(x_1^2 + x_2^2),$$

де φ – довільна гладка функція.

Підалгебра типу $A_{3,1}$

$$\langle -2\beta X_4, L_3 + \beta X_3, P_3 - 2X_0, \beta > 0\rangle:$$

Анзац

$$\beta \arctan \frac{x_1}{x_2} + \frac{1}{4}(x_0 + u)^2 + x_3 = \varphi(\omega), \qquad \omega = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}.$$

Розв'язок (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера

$$\beta \arctan \frac{x_1}{x_2} + \frac{1}{4}(x_0 + u)^2 + x_3 = \varphi\left(x_1^2 + x_2^2\right),$$

де φ − довільна гладка функція.

Підалгебра типу $A_{3,2}$

$$\left\langle 2\beta X_4, P_3, G + \alpha X_1 + \beta X_3, \alpha > 0, \beta > 0 \right\rangle :$$

Анзац

$$x_1 - \alpha \ln(x_0 + u) = \varphi(\omega), \quad \omega = x_2 .$$

Розв'язок (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера

$$x_1 - \alpha \ln(x_0 + u) = \varphi(x_2),$$

де φ − довільна гладка функція.

Підалгебра типу $A_{3,3}$

$$\left\langle P_3, X_4, \frac{1}{\lambda} L_3 + G, \lambda > 0 \right\rangle :$$

Анзац

$$\ln(x_0 + u) + \lambda \arctan \frac{x_1}{x_2} = \varphi(\omega), \quad \omega = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}.$$

Розв'язок (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера

$$\ln(x_0 + u) + \lambda \arctan \frac{x_1}{x_2} = \varphi\left(x_1^2 + x_2^2\right),$$

де φ − довільна гладка функція.

Підалгебра типу $A_{3,6}$

$$\left\langle X_1, -X_2, P_3 - L_3 - 2\alpha X_0, \alpha > 0 \right\rangle :$$

Анзац

$$(x_0 + u)^3 + 6\alpha x_3 (x_0 + u) + 6\alpha^2 (x_0 - u) = \varphi(\omega), \quad \omega = (x_0 + u)^2 + 4\alpha x_3 .$$

Розв'язок (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера

$$(x_0 + u)^3 + 6\alpha x_3 (x_0 + u) + 6\alpha^2 (x_0 - u) = \varphi\left((x_0 + u)^2 + 4\alpha x_3\right),$$

де φ − довільна гладка функція.

Зауважимо, що при такому типі симетрійних редукцій несингулярні многовиди в просторі $M(1,3) \times R(u)$, інваріантні відносно відповідних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$, самі є розв'язками (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера.

2.2. Редукції до лінійних звичайних диференціальних рівнянь. Такого типу редукції отримали для деяких неспряжених підалгебр типів $3A_1$, $A_{3,6}$.

Приклади.

Підалгебри типу $3A_1$.

1. $\langle P_1 \rangle \oplus \langle P_2 \rangle \oplus \langle P_3 \rangle :$

Анзац

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - u^2 = \varphi(\omega), \qquad \omega = x_0 + u .$$

Редуковане рівняння

$$\omega^2\varphi'' - 2\omega\varphi' + 2\varphi = 0.$$

Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega) = c_1\omega^2 + c_2\omega,$$

де c_1 і c_2 − довільні сталі.

Розв'язок (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - u^2 = c_1(x_0 + u)^2 + c_2(x_0 + u).$$

2. $\langle P_1\rangle \oplus \langle P_2 - \alpha X_2, \alpha > 0\rangle \oplus \langle P_3 - \gamma X_3, \gamma \neq 0\rangle$:

Анзац

$$2u + \frac{x_1^2}{x_0 + u} + \frac{x_2^2}{x_0 + u + \alpha} + \frac{x_3^2}{x_0 + u + \gamma} = \varphi(\omega), \qquad \omega = x_0 + u.$$

Редуковане рівняння

$$\omega(\omega + \alpha)(\omega + \gamma)\varphi'' = 0.$$

Розв'язки редукованого рівняння

$$\varphi(\omega) = c_1\omega + c_2, \qquad \omega = 0, \qquad \omega + \alpha = 0, \qquad \omega + \gamma = 0,$$

де c_1 і c_2 − довільні сталі.

Розв'язки (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера

$$2u + \frac{x_1^2}{x_0 + u} + \frac{x_2^2}{x_0 + u + \alpha} + \frac{x_3^2}{x_0 + u + \gamma} = c_1(x_0 + u) + c_2,$$

$$x_0 + u = 0, \qquad x_0 + u + \alpha = 0, \qquad x_0 + u + \gamma = 0.$$

Підалгебри типу $A_{3,6}$.

1. $\langle P_1 - X_1, P_2 - X_2, -P_3 + L_3\rangle$:

Анзац

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_0 + u + 1} + \frac{x_3^2}{x_0 + u} + 2u = \varphi(\omega), \qquad \omega = x_0 + u.$$

Редуковане рівняння

$$\omega(\omega + 1)\varphi'' = 0.$$

Розв'язки редукованого рівняння

$$\varphi(\omega) = c_1\omega + c_2, \qquad \omega = 0, \qquad \omega + 1 = 0,$$

де c_1 і c_2 − довільні сталі.

Розв'язки (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_0 + u + 1} + \frac{x_3^2}{x_0 + u} + 2u = c_1(x_0 + u) + c_2, \qquad u = -x_0 - 1, \qquad u = -x_0.$$

2. $\langle P_1, P_2, L_3 - P_3\rangle$:

Анзац

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - u^2 = \varphi(\omega), \qquad \omega = x_0 + u.$$

Редуковане рівняння

$$\omega^2\varphi'' - 2\omega\varphi' + 2\varphi = 0.$$

Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega) = c_2\omega^2 + c_1\omega,$$

де c_1 і c_2 − довільні сталі.

Розв'язок (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - u^2 = c_2(x_0 + u)^2 + c_1(x_0 + u).$$

2.3. Редукції до нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Такого типу редукції отримали для деяких неспряжених підалгебр типів $A_2 \oplus A_1$, $A_{3,3}$, $A_{3,7}^a$, $A_{3,9}$.

Приклади.

Підалгебра типу $A_2 \oplus A_1$

$$\langle -G, P_3 \rangle \oplus \langle L_3 \rangle :$$

Анзац

$$(x_0^2 - x_3^2 - u^2)^{1/2} = \varphi(\omega), \qquad \omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

Редуковане рівняння

$$\varphi\,\varphi'\varphi'' = 0.$$

Розв'язки редукованого рівняння

$$\varphi(\omega) = c_1\omega + c_2, \qquad \varphi(\omega) = c,$$

де c_1, c_2 і c − довільні сталі.

Розв'язки (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера

$$(x_0^2 - x_3^2 - u^2)^{1/2} = c_1(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} + c_2, \qquad (x_0^2 - x_3^2 - u^2)^{1/2} = c.$$

Підалгебра типу $A_{3,3}$

$$\langle P_1, P_2, G + \alpha X_3, \alpha > 0 \rangle :$$

Анзац

$$x_3 - \alpha \ln(x_0 + u) = \varphi(\omega), \qquad \omega = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - u^2.$$

Редуковане рівняння

$$(2\omega\varphi'\varphi'' + \alpha\varphi'' + (\varphi')^2)(\varphi')^2 = 0.$$

Підалгебра типу $A_{3,7}^a$

$$\langle P_1, P_2, L_3 + \lambda G, \lambda > 0 \rangle :$$

Анзац

$$(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - u^2)^{1/2} = \varphi(\omega), \qquad \omega = x_3.$$

Редуковане рівняння

$$\varphi\varphi'' = 0.$$

Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega) = c_1\omega + c_2,$$

де c_1, c_2 − довільні сталі.

Розв'язок (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера

$$(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - u^2)^{1/2} = c_1 x_3 + c_2.$$

Підалгебра типу $A_{3,9}$

$$\left\langle -\frac{1}{2}\left(L_3 + \frac{1}{2}(P_3 + C_3)\right), \frac{1}{2}\left(L_2 + \frac{1}{2}(P_2 + C_2)\right), \frac{1}{2}\left(L_1 + \frac{1}{2}(P_1 + C_1)\right)\right\rangle :$$

Анзац

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2)^{1/2} = \varphi(\omega), \qquad \omega = x_0.$$

Редуковане рівняння

$$\varphi\varphi'' = 0 .$$

Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega) = c_1\omega + c_2 ,$$

де c_1 і c_2 − довільні сталі.

Розв'язок (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2\right)^{1/2} = c_1 x_0 + c_2 .$$

2.4. Редукції до диференціальних рівнянь із частинними похідними. Такого типу редукції отримали для деяких неспряжених підалгебр типів $A_{3,6}$, $A_{3,8}$, $A_{3,9}$.

Приклади.

Підалгебра типу $A_{3,6}$

$$\langle P_1, P_2, L_3 \rangle :$$

Анзац

$$x_3 = \varphi(\omega_1, \omega_2), \qquad \omega_1 = x_0 + u, \qquad \omega_2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - u^2 .$$

Редуковане рівняння

$$(\omega_1^2\varphi_{11}\varphi_{22} - 2\omega_1\varphi_2\varphi_{12} - \omega_1^2\varphi_{12}^2 - 2\omega_2\varphi_2\varphi_{22} - \varphi_2^2)\varphi_2 = 0 .$$

Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = f(\omega_1) ,$$

де f − довільна гладка функція.

Розв'язок (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера

$$x_3 = f(x_0 + u).$$

Підалгебра типу $A_{3,8}$

$$\langle P_3, G, -C_3 \rangle :$$

Анзац

$$(x_0^2 - x_3^2 - u^2)^{1/2} = \varphi(\omega_1, \omega_2), \qquad \omega_1 = x_1, \qquad \omega_2 = x_2 .$$

Редуковане рівняння

$$(\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2)\varphi = 0 .$$

Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = f\left(c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\right) ,$$

де f − довільна гладка функція, c_1, c_2 і c_3 − довільні сталі.

Розв'язок (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера

$$(x_0^2 - x_3^2 - u^2)^{1/2} = f(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3).$$

Підалгебра типу $A_{3,9}$

$$\langle -L_3, -L_2, -L_1 \rangle :$$

Анзац

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \qquad \omega_1 = x_0, \qquad \omega_2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2} .$$

Редуковане рівняння

$$(\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2)\varphi_2 = 0 .$$

Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = f(c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3),$$

де f − довільна гладка функція, c_1, c_2 і c_3 − довільні сталі.

Розв'язок (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера

$$u = f(c_1 x_0 + c_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} + c_3).$$

Такого типу редукції зумовлені тим, що відповідні підалгебри мають ранг 2.

Серед неспряжених підалгебр типів $3A_1$, $A_2 \oplus A_1$, $A_{3,1}$, $A_{3,2}$, $A_{3,3}$, $A_{3,4}$, $A_{3,6}$ є такі, з інваріантів яких не вдається побудувати анзаци, які редукують (1+3)-вимірне рівняння Монжа − Ампера. Виявилося, що з інваріантів усіх чотирьох неспряжених підалгебр типу $A_{3,4}$ не вдається побудувати анзаци, які редукують (1+3)-вимірне рівняння Монжа − Ампера.

Наведемо базисні елементи однієї з цих підалгебр і її інваріанти.

Підалгебра типу $A_{3,4}$

$$\left\langle -X_0, X_4, -\frac{L_3}{\lambda} - G - \frac{\alpha}{\lambda} X_3, \alpha > 0, \lambda > 0 \right\rangle :$$

Інваріанти

$$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \qquad x_3 + \alpha \arctan \frac{x_1}{x_2}.$$

Зауважимо, що підалгебри, з інваріантів яких не вдається побудувати анзаци, не задовольняють необхідні умови існування інваріантних розв'язків (деталі можна знайти в [1]).

Висновки. Встановлено взаємозв'язок між структурними властивостями тривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ та типами отриманих редукованих рівнянь для (1+3)-вимірного рівняння Монжа − Ампера. Наведено деякі інваріантні розв'язки досліджуваного рівняння.

Тривимірні неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ є таких типів [4]: $3A_1$, $A_2 \oplus A_1$, $A_{3,1}$, $A_{3,2}$, $A_{3,3}$, $A_{3,4}$, $A_{3,6}$, $A_{3,7}^a$, $A_{3,8}$, $A_{3,9}$.

- *Редукції до тотожностей* отримано для деяких неспряжених підалгебр таких типів: $3A_1$, $A_2 \oplus A_1$, $A_{3,1}$, $A_{3,2}$, $A_{3,3}$, $A_{3,6}$.
- *Редукції до лінійних звичайних диференціальних рівнянь* отримано для деяких неспряжених підалгебр таких типів: $3A_1$, $A_{3,6}$.
- *Редукції до нелінійних звичайних диференціальних рівнянь* отримано для деяких неспряжених підалгебр таких типів: $A_2 \oplus A_1$, $A_{3,3}$, $A_{3,7}^a$, $A_{3,9}$.
- *Редукції до диференціальних рівнянь із частинними похідними* отримано для деяких неспряжених підалгебр таких типів: $A_{3,6}$, $A_{3,8}$, $A_{3,9}$.
- Серед неспряжених підалгебр типів $3A_1$, $A_2 \oplus A_1$, $A_{3,1}$, $A_{3,2}$, $A_{3,3}$, $A_{3,6}$ є такі, з інваріантів яких не вдається побудувати анзаци, які (1+3)-вимірне рівняння Монжа − Ампера.
- З інваріантів усіх чотирьох неспряжених підалгебр типу $A_{3,4}$ не вдається побудувати анзаци, які редукують (1+3)-вимірне рівняння Монжа − Ампера.

Ці підалгебри не задовольняють необхідні умови існування інваріантних розв'язків (деталі див. в [1]).

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 399 с.
   Те саме: *Ovsiannikov L. V.* Group analysis of differential equations. – New York etc.: Acad. Press, 1982. – xvi+416 p.
2. *Погорелов А. В.* Многомерная проблема Минковского. – Москва: Наука, 1975. – 95 с.
3. *Федорчук В. М.* Симетрійна редукція і деякі точні розв'язки нелінійного п'ятивимірного хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 4. – С. 573–577.
   Те саме: *Fedorchuk V. M.* Symmetry reduction and some exact solutions of a nonlinear five-dimensional wave equation // Ukr. Math. J. – 1996. – **48**, No. 4. – P. 636–640. – https://doi.org/10.1007/BF02390625.
4. *Федорчук В. М., Федорчук В. І.* Про класифікацію низькорозмірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ // Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. А. Г. Нікітін. – 2006. – **3**, № 2. – С. 301–307.
5. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – Москва: Наука, 1990. – 400 с.
6. *Фущич В. И., Серов Н. И.* Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа – Ампера // Докл. АН СССР. – 1983. – **273**, № 3. – С. 543–546.
7. *Хабиров С. В.* Применение контактных преобразований неоднородного уравнения Монжа – Ампера в одномерной газовой динамике // Докл. АН СССР. – 1990. – **310**, № 2. – С. 333–336.
   Те саме: *Khabirov S. V.* Application of contact transformations of the inhomogeneous Monge–Ampère equation in one-dimensional gas dynamics // Soviet Phys. Dokl. – 1990. – **35**, No. 1. – P. 29–30.
8. *Cullen M. J. P., Douglas R. J.* Applications of the Monge – Ampère equation and Monge transport problem to meteorology and oceanography // Proc. Conf. Monge – Ampère equation: Applications to geometry and optimization (Deerfield Beach, FL), 1997. – Contemp. Math., Vol. 226. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. – P. 33–53.
9. *Fedorchuk V.* Symmetry reduction and exact solutions of the Euler – Lagrange – Born – Infeld, multidimensional Monge – Ampère and eikonal equations // J. Nonlinear Math. Phys. – 1995. – **2**, No. 3-4. – P. 329–333.
   – https://doi.org/10.2991/jnmp.1995.2.3-4.13.
10. *Fedorchuk V., Fedorchuk V.* Classification of symmetry reductions for the eikonal equation. – Lviv: Pidstryhach IAPMM of NAS of Ukraine, 2018. – 176 p.
11. *Fedorchuk V., Fedorchuk V.* On classification of symmetry reductions for partial differential equations // Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць, присвячений 80-річчю Б. Й. Пташника. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. – С. 241–255.
12. *Fedorchuk V., Fedorchuk V.* On classification of symmetry reductions for the eikonal equation // Symmetry. – 2016. – **8**, No. 6. – Art. 51. – 32 p.
   – https://doi.org/10.3390/sym8060051.
13. *Fedorchuk V. M., Fedorchuk V. I.* On the classification of symmetry reductions and invariant solutions for the Euler – Lagrange – Born – Infeld equation // Ukr. J. Phys. – 2019. – **64**, No. 12. – P. 1103–1107.
   – https://doi.org/10.15407/ujpe64.12.1103.
14. *Grundland A. M., Harnad J., Winternitz P.* Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys. – 1984. – **25**, No. 4. – P. 791–806.
   – https://doi.org/10.1063/1.526224.
15. *Gutiérrez C. E., van Nguyen T.* On Monge – Ampère type equations arising in optimal transportation problems // Calcul. Var. Partial Differ. Equat. – 2007. – **28**, No. 3. – P. 275–316. – https://doi.org/10.1007/s00526-006-0045-x.
16. *Jiang F., Trudinger N. S.* On the second boundary value problem for Monge – Ampère type equations and geometric optics // Arch. Ration. Mech. Anal. – 2018. – **229**, No. 2. – P. 547–567. – https://doi.org/10.1007/s00205-018-1222-8.
17. *Jia Xiaobiao, Li Dongsheng, Li Zhisu.* Asymptotic behavior at infinity of solutions of Monge – Ampère equations in half spaces // J. Differ. Equat. – 2020. – **269**, No. 1. – P. 326–348. – https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.12.007.

18. *Kushner A., Lychagin V. V., Slovák J.* Lectures on geometry of Monge – Ampère equations with Maple // Nonlinear PDEs, their Geometry, and Applications / R. A. Kycia, M. Ulan, E. Schneider (Eds.). – Basel: Birkhäuser, 2019. – xvii+279 p. – (Chapt. 2. – P. 53–94.)
19. *Le Nam Q.* Global Hölder estimates for 2D linearized Monge – Ampère equations with right-hand side in divergence form // J. Math. Anal. Appl. – 2020. – **485**, No. 2. – Art. 123865. – 13 p. – https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.123865.
20. *Li Dongsheng, Li Zhisu, Yuan Yu.* A Bernstein problem for special Lagrangian equations in exterior domains // Adv. Math. – 2020. – **361**. – Art. 106927. – 29 p. – https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106927.
21. *Lie S.* Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. – Leipzig: Berichte Sächs. Ges., 1895. – **47**. – S. 53–128.
22. *Nikitin A. G., Kuriksha O.* Invariant solutions for equations of axion electrodynamics // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. – 2012. – **17**, No. 12. – P. 4585–4601. – https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.04.009.
23. *Olver P. J.* Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1986. – xxvi+497 p.
24. *Pingali V.P.* A vector bundle version of the Monge – Ampère equation // Adv. Math. – 2020. – **360**. – Art. 106921. – 40 p. – https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106921.
25. *Sroka M.* The C^0 estimate for the quaternionic Calabi conjecture // Adv. Math. – 2020. – **370**. – Art. 107237. – 15 p. – https://doi.org/10.1016/j.aim.2020.107237.
26. *Stępień Ł. T.* On some exact solutions of heavenly equations in four dimensions // AIP Advances. – 2020. – **10**. – Art. 065105. – https://doi.org/10.1063/1.5144327.
27. *Udrişte C., Bîlă N.* Symmetry group of Ţiţeica surfaces PDE // Balkan J. Geom. Appl. – 1999. – **4**, No. 2. – P. 123–140.
28. *Witten E.* Superstring perturbation theory via super Riemann surfaces: an overview // Pure Appl. Math. Quart. – 2019. – **15**, No. 1. – P. 517–607. – https://doi.org/10.4310/PAMQ.2019.v15.n1.a4.
29. *Yau Shing-Tung, Nadis Steve.* The shape of a life. One mathematician's search for the universe's hidden geometry. – New Haven: Yale Univ. Press, 2019. – 328 p.

О КЛАССИФИКАЦИИ СИММЕТРИЙНЫХ РЕДУКЦИЙ (1+3)-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ МОНЖА – АМПЕРА

Выполнена классификация симметрийных редукций уравнения Монжа – Ампера в пространстве $M(1,3)\times R(u)$. *Представлены некоторые результаты, полученные с использованием классификации трехмерных несопряженных подалгебр алгебры Ли группы Пуанкаре* $P(1,4)$.

Ключевые слова: *классификация симметрийных редукций, уравнение Монжа – Ампера, классификация алгебр Ли, несопряженные подалгебры алгебр Ли, группа Пуанкаре* $P(1,4)$.

ON THE CLASSIFICATION OF SYMMETRY REDUCTIONS FOR THE (1+3)-DIMENSIONAL MONGE – AMPÈRE EQUATION

The classification of symmetry reductions for the Monge – Ampère equation in the space $M(1,3)\times R(u)$ *is carried out. Some results obtained by using the classification of three-dimensional nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the Poincaré group* $P(1,4)$ *are presented.*

Key words: *classification of symmetry reductions, Monge – Ampère equation, classification of the Lie algebras, nonconjugate subalgebras of the Lie algebras, the Poincaré group* $P(1,4)$.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
18.04.20