УДК 519.614

П. О. Савенко[✉]

МЕТОД НЕЯВНИХ ФУНКЦІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ НЕЛІНІЙНИХ СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Запропоновано новий чисельний метод розв'язування багатопараметричних нелінійних спектральних задач розмірності m для голоморфних оператор-функцій, визначених у банахових просторах. Введено поняття узагальненої задачі Коші, яка полягає у розв'язуванні системи $m-1$ рівнянь із частинними похідними першого порядку зі спільною початковою умовою. Наведено приклади розв'язування двопараметричних і трипараметричних спектральних задач.

Ключові слова: *багатопараметрична нелінійна спектральна задача, числовий метод, узагальнена задача Коші, двоточкова крайова задача, рівняння типу Гаммерштейна.*

Вступ. Багатопараметричні лінійні та нелінійні спектральні задачі виникають у різних областях аналізу, математичної фізики [3, 21, 22, 26], в теорії диференціальних та інтегральних рівнянь [10, 14, 16, 18] тощо.

При побудові чисельних алгоритмів для розв'язування того чи іншого класу задач у багатьох випадках виникає потреба в дискретизації вихідної задачі, яка досліджується у функціональних нескінченновимірних просторах. Різні способи дискретизації розглядаються в роботах [5, 9, 19]. Центральне місце у цій теорії займають поняття апроксимації, стійкості та збіжності наближених розв'язків дискретизованої задачі до точних розв'язків вихідної задачі [5–7].

У роботах [12, 13, 17] запропоновано два нові підходи до розв'язування багатопараметричних нелінійних спектральних задач. Найбільш повно досліджено двопараметричні спектральні задачі. В основу їх розв'язання покладено метод неявних функцій [12, 13], який дозволяє звести задачу знаходження зв'язних компонент спектра до розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку. Ці задачі знайшли своє використання при дослідженні галуження (біфуркації) розв'язків одного класу нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна, що виникають у теорії синтезу різних типів випромінюючих систем [1, 15, 23, 25]. Із аналізу прикладних застосувань випливає необхідність дослідження трипараметричних нелінійних спектральних задач, які виникають, зокрема, в теорії синтезу при використанні енергетичних критеріїв [1, 23].

У цій роботі подається узагальнення методу неявних функцій для розв'язування нелінійних багатопараметричних спектральних задач у випадку голоморфних оператор-функцій, визначених у банахових просторах. Наведено теорему існування і з'ясовано основні властивості спектра таких задач. Для знаходження зв'язних компонент спектра запропоновано новий чисельний метод, який полягає у розв'язуванні узагальненої задачі Коші для відповідної системи $m-1$ рівнянь із частинними похідними першого порядку зі спільною початковою умовою. Подано числові приклади розв'язування двопараметричних і трипараметричних спектральних задач.

1. Нелінійна багатопараметрична спектральна проблема. Нехай оператор-функція $\mathcal{A}(\cdot):\boldsymbol{\Lambda}\to\mathcal{L}(E,V)$ визначена у комплексних банахових просторах E і V, а векторний параметр $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$ належить до області $\boldsymbol{\Lambda}$ (відкритої зв'язної множини) комплексного простору $\mathbb{C}^m$, де $\lambda_i\in\Lambda_i\subset\subset\mathbb{C}$. Покладається, що кожному $\boldsymbol{\lambda}$ ставиться у відповідність оператор

[✉] posavenko@gmail.com

$A(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{L}(E, V)$ [1].

Розглядається проблема власних значень вигляду

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})x \equiv \mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)x = 0\,, \tag{1}$$

в якій необхідно знайти власні значення $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)}) \in \boldsymbol{\Lambda}$ і відповідні їм власні вектори $x^{(0)} \in E$, $x^{(0)} \neq 0$, такі, що $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}^{(0)})x^{(0)} = 0$.

При застосуванні того чи іншого підходу до дискретизації вихідної задачі (1) приймаємо, що, крім просторів E і V, задано відповідні їм банахові простори $\bar{E}_n$, $\bar{V}_n$, $n \in \mathbb{N}$, а також лінійні зв'язуючі оператори $P_n : E \to E_n$ та $Q_n : V \to V_n$, які мають такі властивості:

$$\|P_n x\| \to \|x\| \quad \forall x \in E, \qquad \|Q_n y\| \to \|y\| \quad y \in V, \qquad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2}$$

причому $P_n \in \mathcal{L}(E, \bar{E}_n)$, $Q_n \in \mathcal{L}(V, \bar{V}_n)$. Позначення елементів різних просторів подаємо на діаграмі [5]

$$\begin{array}{ccc}
x, x', x^k, \ldots & \xrightarrow{\quad A \quad} & y, y', y^k, \ldots \\
E & & V \\
\downarrow P_n & & \downarrow Q_n \\
\bar{E}_n & & \bar{V}_n \\
\bar{x}_n, \bar{x}'_n, \bar{x}^k_n, \ldots & \xrightarrow{\quad A_n \quad} & \bar{y}_n, \bar{y}'_n, \bar{y}^k_n, \ldots
\end{array}$$

Отже, оператор-функція $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ апроксимується відповідно наближеними оператор-функціями $\mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda})$, $n \in \mathbb{N}$. В результаті для кожного $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$ одержуємо послідовність операторів $A_n \in \mathcal{L}(E_n, V_n)$, яка при виконанні відповідних умов дискретно збігається до оператора $A \in \mathcal{L}(E, V)$ [5, 7].

Таким чином, застосовуючи до задачі (1) процес дискретизації, одержуємо апроксимаційні задачі для наближеного знаходження власних значень і власних функцій

$$\mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda})x_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3}$$

Необхідно знайти власні значення $\boldsymbol{\lambda}_n^{(0)} = (\lambda_{1,n}^{(0)}, \lambda_{2,n}^{(0)}, \ldots, \lambda_{m,n}^{(0)}) \in \boldsymbol{\Lambda}$, $n \in \mathbb{N}$, і відповідні їм власні вектори $x_n^{(0)} \in E_n$, $x_n^{(0)} \neq 0$, такі, що

$$\mathcal{A}_n(\lambda_{1,n}^{(0)}, \lambda_{2,n}^{(0)}, \ldots, \lambda_{m,n}^{(0)})x_n^{(0)} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{4}$$

Якщо апроксимаційні задачі одержано у вигляді систем лінійних алгебраїчних рівнянь, то задача знаходження власних значень зводиться до знаходження коренів визначника n-го порядку, тобто коренів рівняння

$$\Psi_n(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \det\left(t_{jk}(\boldsymbol{\lambda})\right)_{j,k=1}^n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{5}$$

Таким чином, у результаті дискретизації задачі при $n \in \mathbb{N}$ одержуємо функціональну послідовність визначників $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)\}_{n \in \mathbb{N}}$ від m змінних, у яких елементи $t_{ij}^n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ відповідно до умов задач (1) і умов побудови дискретного аналога цих задач є голоморфними функціями від $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Зауважимо, що, якщо коефіцієнти $t_{ij}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$ є неперервно диференційовними функціями своїх аргументів, то частинні по-

[1] $\mathcal{L}(E, V)$ – простір лінійно обмежених операторів [7].

хідні від функції $\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ визначаються за правилами диференціювання визначника [11].

2. Теорема існування. Для обґрунтування збіжності наближених розв'язків задачі (3) до точних розв'язків задач (1) припускаємо, що для послідовності $\{\Psi_n(\boldsymbol{\lambda})\}$ виконуються такі умови:

Умова I. *При* $n \to \infty$ *визначник нескінченного порядку* $\Psi(\boldsymbol{\lambda})$ *є збіжним для будь-яких* $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$, *тобто виконуються умови теореми Пуанкаре* [2].

Умова II. *Функціональна послідовність* $\{\Psi_n(\boldsymbol{\lambda})\}$ *рівномірно збігається на кожній компактній підмножині області* $\boldsymbol{\Lambda}$.

Отже, з голоморфності послідовності $\{\Psi_n(\boldsymbol{\lambda})\}$ та умов ***I***, ***II*** випливає виконання умов теореми Вейєрштрасса [20], яка стверджує, що гранична функція $\Psi(\boldsymbol{\lambda})$ є голоморфною в області $\boldsymbol{\Lambda}$, а послідовності

$$\left\{\frac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)}{\partial \lambda_k}\right\}, \qquad k = 1, 2, \dots, m ,$$

збігаються до $\dfrac{\partial \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)}{\partial \lambda_k}$ відповідно. Ця збіжність є рівномірною на кожній компактній підмножині області $\boldsymbol{\Lambda}$ [2].

Розглянемо необхідну далі допоміжну однопараметричну нелінійну спектральну задачу як частковий випадок задачі (1)

$$\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1)x \equiv \mathcal{A}(\lambda_1, f_2(\lambda_1), \dots, f_m(\lambda_1))x = 0 , \tag{6}$$

у якій покладено $\lambda_i = f_i(\lambda_1)$, $i = 2, \dots, m$, де $f_i(\lambda_1)$ – деякі однозначні диференційовні функції, що відображають область Λ_1 в області $\Lambda_i' \subset \Lambda_i$ $i = 2, \dots, m$. Очевидно, що при кожному $\lambda_1 \in \Lambda_1$ оператор $\tilde{A}(\lambda_1) \in \mathcal{L}(E, V)$ є звуженням оператора $A(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{L}(E, V)$.

Застосовуючи до задачі (6) процес дискретизації, одержуємо апроксимаційні задачі для наближеного знаходження власних значень і власних функцій у вигляді

$$\tilde{\mathcal{A}}_n(\lambda_1)x \equiv \mathcal{A}_n(\lambda_1, f_2(\lambda_1), \dots, f_m(\lambda_1))x_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Спектри оператор-функцій $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1)$ і $\tilde{\mathcal{A}}_n(\lambda_1)$ позначимо відповідно через $\sigma(\mathcal{A})$, $\sigma(\tilde{\mathcal{A}})$ та $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}_n)$.

Будемо припускати, що при $n \in \mathbb{N}$ виконуються такі умови:

1°. *Простори* E, V, E_n, V_n *банахові, а зв'язуючі оператори* (2) *лінійні і рівномірно обмежені.*

2°. *Оператор-функція* $\mathcal{A}_n(\cdot) : \boldsymbol{\Lambda} \to \mathcal{L}(E, V)$ *є голоморфною, причому* $\sigma(\mathcal{A}) \neq \boldsymbol{\Lambda}$, *де* $\boldsymbol{\Lambda}$ – *опукла відкрита область в* $\mathbb{C}^m$.

3°. *Оператор-функції* $\mathcal{A}_n(\cdot) : \boldsymbol{\Lambda} \to \mathcal{L}(E_n, V_n)$ *є голоморфними і для будь-якої замкнутої обмеженої множини* $\boldsymbol{\Lambda}_0 \subset \boldsymbol{\Lambda}$ *виконується нерівність*

---

[2]. Зауважимо, що умови ***I*** та ***II*** є достатньо загальними для дискретизації задач типу (3). При розв'язанні нелінійних спектральних задач для диференціальних рівнянь методом скінченних різниць використовують концепцію регулярноï збіжності [7, 10] операторів A_n до A. При розв'язанні інтегральних рівнянь замість умов ***I*** та ***II*** застосовують поняття стійкої збіжності [7].

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda_0}\|A_n(\boldsymbol{\lambda})\| \le c(\boldsymbol{\Lambda}_0) = \text{const}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

4°*. При кожному фіксованому* $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$ *оператори* $A(\boldsymbol{\lambda})$ *і* $A_n(\boldsymbol{\lambda})$ *є фредгольмовими з нульовим індексом.*

5°*.* $A_n(\boldsymbol{\lambda}) \to A(\boldsymbol{\lambda})$ *стійко для кожного* $\boldsymbol{\lambda} \in \rho(\mathcal{A}) = \boldsymbol{\Lambda} \setminus \sigma(\mathcal{A})$.

6°*. Резольвентна множина* $\rho(\tilde{\mathcal{A}}_n) \ne \varnothing$, *тобто* $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}_n) \ne \Lambda_1$.

Умови існування зв'язних компонент спектра багатопараметричної спектральної задачі (1) при непорожній множині розв'язків допоміжної однопараметричної задачі (5) випливають з такої теореми [24]:

Теорема 1. *Нехай в області* $\boldsymbol{\Lambda}$ *виконуються умови* ***1°–5°****, а умова* ***6°*** *виконується на множині* Λ_1. *Нехай також послідовність функцій* $\{\Psi_n(\boldsymbol{\lambda})\}$ *є голоморфною в області* $\boldsymbol{\Lambda}$ *і рівномірно збігається на кожній компактній підмножині множини* $\boldsymbol{\Lambda}$.

Тоді справджуються такі твердження:

- *кожна точка спектра* $\sigma(\mathcal{A}_n)$ *є ізольованою, є власним значенням* $\boldsymbol{\lambda}_1^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, f_2(\lambda_1^{(0)}), \ldots, f_m(\lambda_1^{(0)})) \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}}_n)$, *і їй відповідає скінченновимірний власний підпростір* $N(\tilde{\mathcal{A}}_n(\lambda_1^{(0)}))$ *і скінченновимірний кореневий підпростір*;
- *для кожного* $\boldsymbol{\lambda}_1^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, f_2(\lambda_1^{(0)}), \ldots, f_m(\lambda_1^{(0)}))$ *існує послідовність* $\boldsymbol{\lambda}_{1,n}^{(0)} \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}}_n)$, $n \ge n_0$, $\boldsymbol{\lambda}_{1,n}^{(0)} \to \boldsymbol{\lambda}_1^{(0)}$;
- *якщо* $\boldsymbol{\lambda}_{1,n}^{(0)} \to \boldsymbol{\lambda}_1^{(0)} \in \boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\lambda}_{1,n}^{(0)} \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}}_n)$, $n \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, *то* $\boldsymbol{\lambda}_1^{(0)} \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \in \sigma(\mathcal{A})$.

Якщо для визначеності покласти, що $\dfrac{\partial\Psi(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})}{\partial\lambda_k} \ne 0$ *і* $\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})}{\partial\lambda_k} \ne 0$ *при* $2 \le k \le m$, $n \in \mathbb{N}$, *то в деякому малому околі точки*

$$\boldsymbol{\lambda}_1^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)}) = (\lambda_1^{(0)}, f_2(\lambda_1^{(0)}), \ldots, f_m(\lambda_1^{(0)}))$$

існують:

– *неперервно диференційовна функція* $\lambda_k = \varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m)$, *що описує однозв'язну спектральну компоненту оператор-функції* $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$;

– *послідовність неперервно диференційовних функцій*

$$\{\lambda_{k,n} = \varphi_{k,n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m)\},$$

що визначає однозв'язні спектральні компоненти оператор-функцій $\mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda})$, $n \in \mathbb{N}$, *яка збігається до функції*

$$\lambda_k = \varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m).$$

Доведення теореми існування для часткового випадку, коли простір E є комплексним гільбертовим простором, а оператор-функція $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ має вигляд $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}) = T(\boldsymbol{\lambda}) - I$, де $T(\boldsymbol{\lambda})$ – лінійний неперервний оператор, який діє в просторі E і аналітично залежить від векторного параметра $\boldsymbol{\lambda}$, а I – тотожний в E оператор, наведено в роботі [24] .

Загалом доведення теореми 1 незначно відрізняється від доведення відповідної теореми 1 з [24] і ґрунтується на відповідних теоремах існування і збіжності [5] стосовно нелінійно однопараметричної спектральної задачі та теоремі про неявно задану функцію від багатьох змінних [4, 8].

Оскільки область Λ_1, що відповідає одновимірній задачі (6), є підмножиною області $\mathbf{\Lambda}$, то з наведених умов ***1°–6°*** випливає виконання в області Λ_1 умов теореми 1 [5, с. 68] та теореми 2 [5, с. 69] стосовно допоміжної нелінійної однопараметричної спектральної задачі. Застосування цих теорем до допоміжної однопараметричної спектральної задачі (6) дозволяє визначити спектр цієї задачі, тобто довести існування ізольованих власних значень $\lambda_1^{(0)} \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}}_n)$ і збіжність послідовності власних значень $\lambda_{1,n}^{(0)} \to \lambda_1^{(0)} \in \Lambda_1$, $n \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, апроксимуючих задач типу (6).

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – незалежні змінні в області $\mathbf{\Lambda}$, а $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}$ є точкою спектра оператора $A(\boldsymbol{\lambda})$. Оскільки $\Psi(\boldsymbol{\lambda})$ є диференційовною функцією в околі точки $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$ і $\Psi'_{\lambda_k}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)}) \neq 0$, то за теоремою про неявну функцію [4], у деякому околі точки $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$ існує неперервно диференційовна функція $\lambda_k = \varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m)$, яка є розв'язком рівняння (5). Звідси випливає існування зв'язної компоненти спектра оператор-функції $\mathcal{A}(\cdot) : \mathbf{\Lambda} \to \mathcal{L}(E, V)$ у деякій полікруговій області $\mathbf{\Lambda}_0 = \{(\lambda) \in \mathbf{\Lambda}_0 : |\lambda_i - \lambda_i^{(0)}| < \varepsilon_i\}$.

Таким чином, при непорожній множині власних значень однопараметричної задачі (6) із теореми 1 випливає існування зв'язних компонент спектра задачі (1) у вигляді просторових гладких поверхонь, знаходження яких здійснюється чисельними методами.

3. Випадок дійсних спектральних параметрів. Чисельні методи та алгоритми. Розглянемо частковий випадок задачі (1) для дійсних параметрів $\lambda_i \in \Lambda_i$, $i = 1, \ldots, m$, покладаючи, що початок координат змінних $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ належить до області $\mathbf{\Lambda}$. Допоміжну однопараметричну нелінійну спектральну задачу розглядаємо на промені, який виходить з точки $M_0 = (\lambda_{1,0}, \lambda_{2,0}, \ldots, \lambda_{m,0}) \in \mathbf{\Lambda}$ у точку $M_1 = (\lambda_{1,1}, \lambda_{2,1}, \ldots, \lambda_{m,1}) \in \mathbf{\Lambda}$. Використовуючи параметричне рівняння прямої

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_{1,0}}{\ell_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_{2,0}}{\ell_2} = \ldots = \frac{\lambda_m - \lambda_{m,0}}{\ell_m} = \tau, \qquad \tau \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

одержуємо вирази для змінних $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \lambda_{1,0} + \ell_1 \tau = f_1(\tau), \\ &\lambda_2 = \lambda_{2,0} + \ell_2 \tau = f_2(\tau), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\lambda_m = \lambda_{m,0} + \ell_m \tau = f_m(\tau), \end{aligned} \tag{9}$$

де τ – дійсний числовий параметр. Заміняючи в оператор-функції (1) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ виразами із формул (9), одержимо

$$\mathcal{A}_\tau(\tau) \equiv \mathcal{A}(f_1(\tau), f_2(\tau), \ldots, f_m(\tau))$$

– звуження оператор-функції $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, з якою зв'язана нелінійна однопараметрична спектральна задача від дійсного параметра $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{A}_\tau(f_1(\tau), f_2(\tau), \ldots, f_m(\tau))x = 0, \tag{10}$$

де кожному значенню $\boldsymbol{\lambda}\tau = (\lambda_{1,0} + \ell_1\tau, \lambda_{2,0} + \ell_2\tau, \ldots, \lambda_{m,0} + \ell_m\tau) \in \boldsymbol{\Lambda}_\tau$ ставиться у відповідність оператор $A_\tau(\tau) \in \mathcal{L}(E, V)$.

Аналогічно до (3) розглядатимемо при $n \in \mathbb{N}$ апроксимуючу послідовність дискретизованої задачі (10):

$$\mathcal{A}_{\tau,n}(\tau) \equiv \mathcal{A}_n(f_1(\tau), f_2(\tau), \ldots, f_m(\tau))x_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

3.1. Двовимірна нелінійна спектральна задача. Покладаючи в (1) $m = 2$, одержуємо двовимірну нелінійну спектральну задачу $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})x \equiv \equiv \mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)x = 0$. Застосовуючи до цієї задачі процес дискретизації, апроксимаційну задачу типу (3):

$$\tilde{\mathcal{A}}_n(\lambda_1, \lambda_2)x_n = 0 \tag{12}$$

одержуємо у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь, у коефіцієнти якої нелінійно входять спектральні параметри λ_1, λ_2. Наближене знаходження власних значень зводиться до знаходження розв'язків рівняння (5) при $m = 2$:

$$\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2) = 0\,. \tag{13}$$

Допоміжна однопараметрична спектральна задача типу (6) набуває вигляду

$$\tilde{\mathcal{A}}_n(\lambda_1)x \equiv \mathcal{A}_n(\lambda_1, f(\lambda_1))x_n = 0\,, \tag{14}$$

а знаходження її наближених розв'язків зводиться до знаходження коренів рівняння

$$\Psi_n(\lambda_1, f(\lambda_1)) = 0\,. \tag{15}$$

У найпростішому випадку задачу (14) можна розглянути на промені $\lambda_2 = \beta\lambda_1$, що належить до області $\boldsymbol{\Lambda}$, де β − дійсний параметр.

Згідно з теоремою 1 [5, с. 68] при виконанні умов тереми 1 розв'язки допоміжної задачі мають таку властивість: кожна точка $\lambda_1^{(0)} \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}}_n)$ ізольована (тобто в її досить малому околі немає інших точок з $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}_n)$), є власним значенням і їй відповідає скінченновимірний власний підпростір $N(\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1^{(0)}))$.

Використовуючи розв'язки задачі (15), знаходження зв'язних компонент спектра задачі (13) розглядаємо як задачу про знаходження неявно заданої функції $\lambda_2 = \lambda_2(\lambda_1)$, зводячи її до задачі Коші [12, 13]

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = -\frac{\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_1}}{\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_2}}\,, \tag{16}$$

$$\lambda_2(\lambda_1^{(0)}) = \lambda_2^{(0)}\,, \tag{17}$$

або до задачі Коші відносно функції $\lambda_1 = \lambda_1(\lambda_2)$, якщо похідна в (16) швидко зростає:

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} = -\frac{\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_2}}{\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_1}}\,, \tag{18}$$

$$\lambda_1(\lambda_2^{(0)}) = \lambda_1^{(0)}. \tag{19}$$

Примітка 1. Зазначимо, що двовимірна нелінійна спектральна задача застосовувалась при дослідженні спектральних властивостей двоточкових крайових задач для диференціальних рівнянь з нелінійним входженням спектральних параметрів у коефіцієнти рівнянь та крайові умови [18], а також при дослідженні галуження і біфуркації розв'язків одного класу нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна, коли спектральні параметри нелінійно входять в ядро оператора [25]. Такі рівняння виникають у нелінійній теорії синтезу різних типів випромінюючих систем [15, 23, 25].

Приклад 1. Задачу середньоквадратичної апроксимації дійсної фінітної функції двох змінних $F(s_1, s_2)$, визначеної в області $\bar{G}$, модулем подвійного перетворення Фур'є:

$$f(s_1, s_2) = AU \equiv \iint_D U(x,y) e^{i(c_1 s_1 x + c_2 s_2 y)} dx\, dy \,, \tag{20}$$

розглядаємо як задачу мінімізації функціонала [15]

$$\sigma_F(U) = \iint_G \left[F(s_1, s_2) - |f(s_1, s_2)|\right]^2 ds_1 ds_2 + \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus G} |f(s_1, s_2)|^2 ds_1 ds_2 \,. \tag{21}$$

Рівняння Ейлера – Лаґранжа відносно функції U у просторі $L_2(D)$ в операторній формі має вигляд

$$U = A^*\left(F e^{i \arg(AU)}\right). \tag{22}$$

Подіявши на обидві сторони рівняння (22) оператором A та врахувавши формулу (20), одержуємо операторне рівняння відносно функції f:

$$f = AA^*\left(F e^{i \arg f}\right) \tag{23}$$

у просторі $L_2(G)$, розгорнута форма якого набуває вигляду

$$f(s_1, s_2) = Bf \equiv \iint_G F(s_1', s_2') K(s_1, s_2, s_1', s_2'; c_1, c_2) e^{i \arg f(s_1', s_2')} ds_1'\, ds_2' \,, \tag{24}$$

де $K(s_1, s_2, s_1', s_2'; c_1, c_2)$ – ядро рівняння, яке визначається формулою

$$K(Q, Q', \mathbf{c}) = \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint_{\bar{S}} \exp\left[i\left(c_1 x (s_1' - s_1) + c_2 y (s_2' - s_2)\right)\right] dx\, dy \,,$$

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2) \,, \qquad Q = (s_1, s_2) \,. \tag{25}$$

Рівняння (24) є нелінійним двовимірним інтегральним рівнянням типу Гаммерштейна. Характерною особливістю такого класу рівнянь є існування одного або декількох розв'язків у класі дійсних функцій. Зі збільшенням величини параметрів c_1, c_2 можуть появлятись точки $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right)$, у яких від дійсних (первинних) розв'язків можуть відгалужуватися більш ефективні комплексні розв'язки.

Зокрема, одним із первинних розв'язків рівняння (24) у випадку симетричної області G є функція

$$f_0(Q, \mathbf{c}) = \iint_{\bar{G}} F(Q') K(Q, Q', \mathbf{c})\, dQ' \,. \tag{26}$$

Точки можливого галуження розв'язку (26) визначаються з лінійного однорідного інтегрального рівняння

$$\varphi(Q) = T(c_1, c_2)\varphi \equiv \iint_{\bar{G}} \frac{F(Q')}{f_0(Q', c_1, c_2)} K(Q, Q', c_1, c_2) \varphi(Q')\, dQ' \,. \tag{27}$$

яке є нелінійною двопараметричною спектральною задачею типу (3) зі спектральними параметрами c_1, c_2 в інтегральній формі. В операторній формі рівняння (27) можемо записати у вигляді

$$A(\lambda_1,\lambda_2)x \equiv (I - T(\lambda_1,\lambda_2))x = 0\,, \tag{28}$$

де $\lambda_1 = c_1$, $\lambda_2 = c_2$, I − одиничний оператор у банаховому просторі $C(G)$. Оператор $A(\lambda_1,\lambda_2)$ діє з простору $E = \mathbb{R}^2 \times C(G)$ у простір $V = C(G)$. Легко переконатись, що оператор-функція

$$\mathscr{A}(\cdot,\cdot) \equiv I - T(\cdot) : \mathbf{\Lambda} \to \mathscr{L}(E,V) \tag{29}$$

є голоморфною при $\mathbf{\Lambda} = [0,r_1]\times[0,r_2]$, де r_1, r_2 − деякі дійсні константи.

Розглянемо числовий приклад розв'язування задачі Коші. Для знаходження зв'язних компонент спектра спочатку розв'язували однопараметричну задачу типу (14) на різних променях. Результати обчислень (наближені та уточнені значення коренів рівняння (13)) для функції $F(s_1,s_2) = 1$ на промені $c_2 = 0.8c_1$ наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Точки можливого галуження	Наближене значення	Уточнене значення
c_1^1	3.14	3.141593
c_1^2	3.65	3.643908
c_1^3	3.92	3.926991
c_1^4	4.88	4.867984
c_1^5	5.35	5.347080
c_1^6	6.28	6.283186

Використовуючи уточнені значення коренів рівняння (27) як початкові дані в задачі Коші (16), (17) або (18), (19) стосовно рівняння (28), знаходимо множину власних значень рівняння (27), які є лініями можливого галуження розв'язків нелінійного рівняння (24). Результати обчислень власних значень (зв'язні компоненти спектра задачі (28)) для функції $F(s_1,s_2) = 1$ наведено на рис. 1.

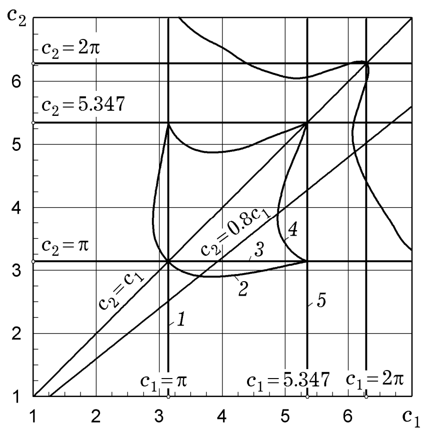

Рис. 1

Зазначимо, що в процесі проведення обчислювальних експериментів виявлено нові якісні результати для нелінійних спектральних задач. Зокрема, для функції $F(s_1,s_2) = F_1(s_1)\cdot F_2(s_2)$ у випадку, коли область G є прямокутником, у рівнянні (27) можна відокремити змінні [15]. При цьому, враховуючи вигляд ядра (25) і формулу $F(s_1,s_2) = F_1(s_1)\cdot F_2(s_2)$, одержуємо два незалежних рівняння:

$$\varphi_j(s_j) = \int_{-1}^{1} \frac{F_j(s_j')}{f_{0,j}(s_j', c_j)} K_j(s_j, s_j', c_j)\varphi_j(s_j')\,ds_j', \qquad j = 1, 2, \tag{30}$$

які описують лінії можливого галуження розв'язків рівняння (27), що утворюють прямокутну сітку в області $\mathbf{\Lambda}_c$. Причому для деяких заданих функцій $F_j(s_j)$, що входять у рівняння (27), є відомими [15] точні розв'язки, які доцільно використовувати для оцінки точності результатів обчислення власних значень нелінійної двопараметричної спектральної задачі. Для функції $F(s_1, s_2) \equiv 1$ розв'язки рівнянь (30) відображає сітка прямих ліній, наведена суцільними лініями на рис. 1.

Зауважимо, що у випадку нелінійного входження спектральних параметрів в ядро інтегрального оператора (27) рівняння (29), які одержані шляхом відокремлення змінних з рівняння (30), не описують всіх розв'язків вихідного рівняння. Зокрема, з аналізу рис. 1 випливає, що, крім прямих спектральних ліній, існують також криві лінії спектра, одержані вперше методом неявної функції стосовно розв'язування рівняння (27).

3.2. Тривимірна нелінійна спектральна задача одержується з (1) при $m = 3$. Знаходження наближених розв'язків цієї задачі зводиться до знаходження розв'язків рівняння

$$\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \equiv \det\left(t_{jk}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\right)_{j,k=1}^{n} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

Це рівняння розглядаємо як задачу про знаходження неявно заданої функції, припускаючи для визначеності, що в рівнянні є дві незалежні змінні, наприклад, λ_1 і λ_2, тобто функцію $\lambda_3 = \lambda_3(\lambda_1, \lambda_2)$ знаходимо чисельними методами.

3.2.1. Узагальнена задача типу Коші. Покладатимемо, що спектральні параметри λ_1, λ_2, λ_3 у (31) є дійсними величинами і належать до області $\mathbf{\Lambda}$, розміщеної у початку декартової системи координат $OXYZ$, причому $\lambda_1 \in OX$, $\lambda_2 \in OY$, $\lambda_3 \in OZ$. Почнемо з вивчення однієї функції $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, визначеної одним рівнянням

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0, \tag{32}$$

припускаючи для визначеності, що є дві незалежних змінних λ_1, λ_2.

Наведемо дві важливі теореми стосовно рівняння (32).

Теорема 2 [8, с. 78**]**. *Нехай функція* $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *змінних* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *задовольняє такі умови:*

- $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *неперервна і має неперервну частинну похідну* F'_{λ_3} *в околі точки* $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)})$;
- $F(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}) = 0$, *а* $F'_{\lambda_3}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}) \neq 0$.

Тоді рівняння (6) *має один і тільки один корінь, який прямує до* $\lambda_3^{(0)}$, *коли* λ_1 *і* λ_2 *прямують відповідно до* $\lambda_1^{(0)}$ *і* $\lambda_2^{(0)}$.

Розглянемо неявну функцію двох змінних $\lambda_3(\lambda_1, \lambda_2)$, що визначається рівнянням (6). Якщо значення цієї функції розглядати як декартові координати точки у просторі, то рівнянням $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ описується поверхня у просторі. Покладатимемо, що точка $M_0 = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)})$ належить цій поверхні.

Теорема 3 [8, с. 86**]**. *Якщо декілька функцій незалежної змінної задовольняють співвідношення* $F = 0$*, то їхні похідні будуть задовольняти співвідношення, яке отримується, якщо прирівняти до нуля похідну від лівої частини* F *як від складної функції.*

Справді, якщо функція F перетворюється тотожно в нуль при заміні змінних, від яких вона залежить, функціями від незалежної змінної, то похідна від функції F також буде тотожно дорівнювати нулеві. Ця теорема залишається правильною і в тому випадку, коли функції, пов'язані співвідношенням $F = 0$, залежать від багатьох незалежних змінних [8].

Згідно з теоремою 3, частинні похідні першого порядку від функції $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ визначаються співвідношеннями [8]

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_3}\frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_1} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_3}\frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_2} = 0. \qquad (33)$$

Розглядаючи рівності (33) як рівняння відносно частинних похідних $\frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_1}$, $\frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_2}$, одержуємо систему рівнянь, яка описує неявно задану поверхню функцією $\lambda_3 = \lambda_3(\lambda_1, \lambda_2)$:

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_1} = -\frac{\partial F/\partial \lambda_1}{\partial F/\partial \lambda_3}, \qquad (34)$$

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_2} = -\frac{\partial F/\partial \lambda_2}{\partial F/\partial \lambda_3}. \qquad (35)$$

Шукана функція $\lambda_3 = \lambda_3(\lambda_1, \lambda_2)$ у точці $M_0 = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)})$ повинна задовольняти початкову умову

$$\lambda_3(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) = \lambda_3^{(0)}. \qquad (36)$$

Таким чином, для знаходження зв'язної компоненти спектра − спектральної поверхні $\lambda_3 = \lambda_3(\lambda_1, \lambda_2)$, на підставі неявно заданої функції $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ отримано систему рівнянь із частинними похідними (34), (35) з початковою умовою (36).

3.2.2.

Приклад 2. Розглянемо елементарний числовий приклад розв'язування системи рівнянь (10), (11) з початковою умовою (36) для випадку, коли

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 1 = 0,$$

а початковою є умова $\lambda_3(0,0) = \lambda_3^{(0)} = 1$. Рівняння (34), (35) для заданої функції мають вигляд

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \qquad (37)$$

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_2} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \qquad (38)$$

а початкова умова

$$\lambda_3(0,0) = \lambda_3^{(0)} = 1. \qquad (39)$$

Розв'язувати систему (37), (38) зі спільною початковою умовою (39) можна по-різному. Оскільки шуканий розв'язок системи (37), (38) в околі точки $M_0 = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}\right)$ є гладкою поверхнею, що проходить через точку M_0 і описується функцією $\lambda_3 = \lambda_3(\lambda_1, \lambda_2)$, то для знаходження точок шуканої поверхні можна застосувати однокрокові методи. Для цього в околі точки M_0 введемо локальну систему координат з початком у точці M_0 і побудуємо прямокутну сітку з відповідними кроками h_1, h_2 (рис. 2). Порядок обчислення значення функції $\lambda_3 = \lambda_3(\lambda_1, \lambda_2)$ у точках сітки схематично вказаний стрілками. Один крок при розв'язуванні рівняння (37) (при $h_1 > 0$) приводить у сусідню точку справа. Один крок при розв'язуванні рівняння (38) (при $h_2 > 0$) приводить у сусідню точку зверху.

Для часткового розв'язування цієї системи в площині (λ_1, λ_3) застосовували однокрокові методи Ейлера та Рунґе − Кутта. Результати обчислень наведено на рис. 3. Крива ***1*** відображає результати, отримані методом Ейлера, крива ***3*** − методом Рунґе − Кутта, крива ***2*** описує рівняння сфери.

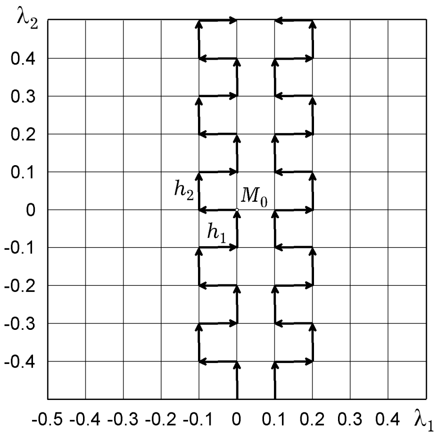

Рис. 2

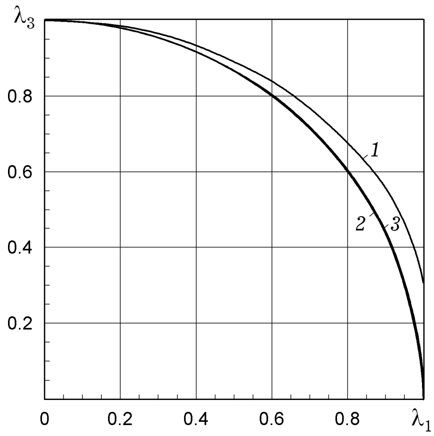

Рис. 3

3.3. Нелінійна багатопараметрична спектральна задача при $m \geq 4$. Розглянемо узагальнення алгоритму чисельного розв'язування узагальненої задачі Коші, наведеного у попередньому пункті, на випадок нелінійної спектральної задачі при $m \geq 4$.

Нехай функція $F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ змінних $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ задовольняє такі умови:

- $F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ неперервна і має неперервну частинну похідну F'_{λ_k} в околі точки $\left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)}\right)$;
- $F\left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)}\right) = 0$, а $F'_{\lambda_k}\left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)}\right) \neq 0$.

Тоді рівняння

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = 0 \tag{40}$$

згідно з теоремою про неявну функцію [4, с. 173], має один і тільки один корінь, який прямує до $\lambda_k = \varphi_k\left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_{k-1}^{(0)}, \lambda_{k-2}^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)}\right)$, коли λ_1, λ_2, …, λ_{k-1}, λ_{k-2}, …, λ_m відповідно прямують до $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$, …, $\lambda_{k-1}^{(0)}$, $\lambda_{k-2}^{(0)}$, …, $\lambda_m^{(0)}$.

Розглянемо неявну функцію від $m-1$ змінних

$$\lambda_k = \lambda_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k-2}, \ldots, \lambda_m),$$

яка визначається рівнянням (40). Якщо значення цієї функції розглядати як декартові координати точки у просторі, то рівнянням (40) описується поверхня у деякій полікруговій області

$$\mathbf{\Lambda}_0 = \{(\lambda) \in \mathbf{\Lambda}_0 : \left|\lambda_i - \lambda_i^{(0)}\right| < \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Покладатимемо, що точка $M_0 = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$ належить цій поверхні.

Прирівнюючи до нуля похідну від лівої частини F рівняння як від складної функції, одержимо вирази для частинних похідних:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_k}\frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_1} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_k}\frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_2} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_m} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_k}\frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_m} = 0. \tag{41}$$

Розглядаючи рівності (41) як рівняння відносно частинних похідних $\frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_1}$, $\frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_2}$, …, $\frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_m}$, одержуємо систему $m-1$ рівнянь із частинними похідними, яка описує неявно задану поверхню функцією $\lambda_k = \lambda_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k-2}, \ldots, \lambda_m)$:

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_1} = -\frac{\partial F/\partial \lambda_1}{\partial F/\partial \lambda_k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_{k-1}} = -\frac{\partial F/\partial \lambda_{k-1}}{\partial F/\partial \lambda_k},$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_{k+1}} = -\frac{\partial F/\partial \lambda_{k+1}}{\partial F/\partial \lambda_k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_m} = -\frac{\partial F/\partial \lambda_m}{\partial F/\partial \lambda_k}, \tag{42}$$

Шукана функція $\lambda_k = \lambda_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k-2}, \ldots, \lambda_m)$ у точці $M_0 = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$ повинна задовольняти початкову умову

$$\lambda_k = \lambda_k(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_{k-1}^{(0)}, \lambda_{k-2}^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)}) = \lambda_k^{(0)}. \tag{43}$$

Таким чином, для знаходження спектральної поверхні

$$\lambda_k = \lambda_k(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_{k-1}^{(0)}, \lambda_{k-2}^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$$

на підставі неявно заданої функції $F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = 0$ отримано систему диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку (42) з початковою умовою (43), яку назвемо узагальненою задачею Коші.

Для знаходження розв’язків узагальненої задачі Коші можна застосовувати однокрокові методи типу Рунґе – Кутта, будуючи відповідну сітку в області параметрів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k-2}, \ldots, \lambda_m \in \Lambda_k$, якій належить точка $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_{k-1}^{(0)}, \lambda_{k-2}^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$.

Висновки. У роботі запропоновано новий метод розв’язування нелінійних багатопараметричних спектральних задач. Проблему знаходження зв’язних компонент спектра зведено до нетрадиційних задач Коші для системи $m-1$ рівнянь із частинними похідними першого порядку зі спільною початковою умовою.

Наведено числовий алгоритм для обчислення зв’язної компоненти спектра трипараметричної спектральної задачі у вигляді тривимірної спектальної поверхні з використанням однокрокових методів типу Рунґе – Кутта та Ейлера.

Всі особливості наведеного алгоритму при $m = 3$ без особливих труднощів переносяться також на випадок багатопараметричних спектральних задач при $m \geq 4$.

1. *Андрийчук М. И., Кравченко В. Ф., Савенко П. А., Ткач М. Д.* Синтез плоских излучающих систем по заданной энергетической диаграмме направленности // Физич. основы приборостроения. – 2013. – **2**, № 3. – С. 40–55.
   – https://doi.org/10.25210/jfop-1303-040055.
2. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. – Москва: Высш. шк., 1999. – 695 с.
3. *Баранецкий Я. Е., Каленюк П. И.* Многопараметрические нелокальные спектральные задачи для операторно-дифференциальных уравнений // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1990. – Вып. 32. – С. 26–30.
   Те саме: *Baranetskii Y. E., Kalenyuk P. I.* Multiparameter nonlocal spectral problems for operator-differential equations // J. Math. Sci. – 1993. – **64**, No. 5. – P. 1139–1142.
   – https://doi.org/10.1007/BF01098835.
4. *Бибиков Ю. Н.* Общий курс дифференциальных уравнений. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. – 232 с.
5. *Вайникко Г. М.* Анализ дискретизационных методов. – Тарту: Тартуск. гос. ун-т, 1976. – 161 с.
   Те саме: *Vainikko G. M.* Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. – Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1976. – 136 p.
6. *Вайникко Г. М., Дементьева А. М.* О быстроте сходимости метода механических квадратур в проблеме собственных значений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1968. – **8**, № 5. – С. 1105–1110.
   Те саме: *Vainikko G. M., Dement’eva A. M.* The rate of convergence of a method of mechanical quadratures in an eigenvalue problem // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. – 1968. – **8**, No. 5. – P. 226–234.
   – https://doi.org/10.1016/0041-5553(68)90137-7.
7. *Вайникко Г. М., Карма О. О.* О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1974. – **14**, № 6. – С. 1393–1408.
   Те саме: *Vainikko G. M., Karma O. O.* The convergence rate of approximate methods in the eigenvalue problem when the parameter appears non-linearly // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. – 1974. – **14**, No 6. – P. 23–39.
   https://doi.org/10.1016/0041-5553(74)90166-9.
8. *Гурса Э.* Курс математического анализа. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1933. – Т. 1., Ч. 1. – 368 с.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 744 с.
10. *Карма О.* О сходимости разностного метода в нелинейных проблемах собственных значений для линейных дифференциальных уравнений // Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та. – 1975. – **374**. – С. 211–228.
11. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1970. – 279 с.

12. *Процах Л. П., Савенко П. О.* Методи неявних функцій при розв'язуванні двопараметричних лінійних спектральних задач // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 2. – С. 42–49.
Те саме: *Protsakh L. P., Savenko P. O.* Implicit-function methods for the solution of two-parameter linear spectral problems // J. Math. Sci. – 2010. – **170**, No. 5. – P. 612–621.
– https://doi.org/10.1007/s10958-010-0106-8.
13. *Савенко П. А., Процах Л. П.* Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 41–44.
Те саме: *Savenko P. A., Protsakh L. P.* Implicit function method in solving a two-dimensional nonlinear spectral problem // Russian Math. (Iz. VUZ). – 2007. – **51**, No. 11. – P. 40–43.
– https://doi.org/10.3103/S1066369X07110060.
14. *Савенко П.* Нелінійні двопараметричні спектральні задачі в теорії нелінійних інтегральних та звичайних диференціальних рівнянь // Тези доп. Міжнар. мат. конф. ім. В. Я. Скоробогатька, 19–23 вер. 2011, Дрогобич. – С. 177.
15. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем з плоским розкривом. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2014. – 314 с.
16. *Савенко П. О.* Нелінійні інтегральні рівняння теорії синтезу випромінюючих систем // Тези доп. Міжнар. наук. конф. «Інтегральні рівняння – 2009», 24–26 січня 2009 р., Київ. – Київ: ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. – С. 45–46.
17. *Савенко П. О., Процах Л. П.* Варіаційний підхід до розв'язання нелінійної векторної спектральної задачі для випадку самоспряжених додатно напіввизначених операторів // Доп. НАН України. – 2004. – № 6. – С. 26–31.
18. *Савенко П. О., Процах Л. П.* Чисельне розв'язування двоточкової крайової задачі з нелінійним двовимірним спектральним параметром // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 1. – С. 48–56.
Те саме: *Savenko P. O., Protsakh L. P.* Numerical solution of a two-point boundary-value problem with nonlinear two-dimensional spectral parameter // J. Math. Sci. – 2012. – **183**, No. 1. – P. 43–53.
– https://doi.org/10.1007/s10958-012-0796-1.
19. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.
20. *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных. Локальная теория. – Москва: Мир, 1965. – 166 с.
Те саме: *Herve M.* Several complex variables. Local Theory. – Bombay: Oxford Univ. Press, 1963. – 134 p.
21. *Birman M. S., Uraltseva N. N.* Nonlinear equations and spectral theory. – Providence, R. I.: AMS Press, 2007. – Ser. Transl. Math. Monogr., Vol 220. – vii+246 p.
22. *Hendi F. A., Al-Qarni M. M.*. Numerical solution of nonlinear mixed integral equation with a generalized Cauchy kernel // Appl. Math. – 2017. – **8,** No. 2. – P. 209–214. – https://doi.org/10.4236/am.2017.82017.
23. *Karpushyna G. Y., Savenko P. O., Tkach M. D.* Nonlinear three-parametric spectral problems in the synthesis theory of radiating systems with a flat aperture // DIPED–2014: Proc. of XIX Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory, Tbilisi, 22–25 Sept. 2014. – Tbilisi, 2014. – P. 143–147.
24. *Savenko P. O.* Application of implicit functions methods to solution of the nonlinear vector spectral problem // Вісн. Нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 660. – С. 42–45.
25. *Savenko P., Klakovych L., Tkach M.* Theory of nonlinear synthesis of radiating systems. – Saarbrücken: LAMBERT Acad. Publ., 2016. – 357 p.
26. *Wazwaz A.-M.* Linear and nonlinear integral equations. Methods and applications. – Berlin etc.: Springer, 2011. – xviii+639 p.
– https://doi.org/10.1007/978-3-642-21449-3.

МЕТОД НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Предложен новый численный метод решения многопараметрических нелинейных спектральных задач размерности m для голоморфных оператор-функций, определенных в банаховых пространствах. Введено понятие обобщенной задачи Коши, которая заключается в решении системы $m-1$ уравнений в частных производных первого порядка с общим начальным условием. Приведены примеры решения двухпараметрических и трехпараметрических спектральных задач.

Ключевые слова: *многопараметрическая нелинейная спектральная задача, численный метод, обобщенная задача Коши, двухточечная краевая задача, уравнение типа Гаммерштейна.*

METHODS OF IMPLICIT FUNCTIONS IN THE SOLUTION OF MULTIPARAMETER NONLINEAR SPECTRAL PROBLEMS

The paper proposes a new numerical method for solving multiparameter nonlinear spectral problems of dimension m for holomorphic operator functions defined in Banach spaces. The concept of the generalized Cauchy problem is introduced, which consists in solving a system of $m-1$ partial differential equations of the first order with a common initial condition. Examples of solving two-parameter and three-parameter spectral problems are given.

Key words: *multiparameter nonlinear spectral problem, numerical method, generalized Cauchy problem, two-point boundary value problem, Hammerstein-type equation.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.11.19