УДК 517.983.54

Ж. А. Токибетов[1], Г. Е. Абдуахитова[1✉], Р. М. Капарова[2]

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБОБЩЕННОГО ГОЛОМОРФНОГО ВЕКТОРА ЧЕРЕЗ ПРОИЗВОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Статья посвящена исследованию теории эллиптических систем первого порядка и обобщенных голоморфных векторов. С использованием системы Моисила – Теодореску получено представление обобщенного голоморфного вектора через производные двух гармонических функций от трех независимых переменных.

Ключові слова: *эллиптические уравнения, гармонические функции, система Коши – Римана, обобщенный голоморфный вектор, система Моисила – Теодореску, задача Коши – Римана.*

В настоящей работе продолжается исследование, опубликованное в [3], Система Моисила – Теодореску может быть получена простой модификацией из системы

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad v_z - w_y = 0,$$

$$u_z - w_x = 0, \quad u_y - v_x = 0. \tag{1}$$

Градиент гармонической функции трех независимых переменных $(U_x, U_y, U_z) = (u, v, w)$ удовлетворяет системе (1). Если в (1) введем четвертую искомую функцию s следующим образом:

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad s_x - v_z + w_y = 0,$$

$$s_y + u_z - w_x = 0, \quad s_z - u_y + v_x = 0, \tag{2}$$

то получим трехмерный аналог системы Коши – Римана. Аналогичное построение в [6] получено с помощью эллиптического уравнения второго порядка с тремя независимыми переменными

$$AU_{zz} + aU_{xx} + 2bU_{xy} + cU_{yy} = 0 \tag{3}$$

с аналитическими коэффициентами, соответствующими условиям $A > 0$, $ac - b^2 > 0$. Так как градиент $(U_x, U_y, U_z) = (u, v, w)$ решения уравнения (3) удовлетворяет системе уравнений

$$Aw_z + au_x + bu_y + bv_x + cv_y = 0,$$

$$-v_z + w_y = 0, \quad u_z - w_x = 0, \quad -u_y + v_x = 0, \tag{4}$$

то, по аналогии с системой (2), вводя в систему (4) четвертую функцию s, образуем систему

$$Aw_z + au_x + bu_y + bv_x + cv_y = 0,$$

$$s_x - v_z + w_y = 0, \quad s_y + u_z - w_x = 0, \quad s_z - u_y + v_x = 0. \tag{5}$$

В силу того, что характеристический определитель системы (5) имеет вид

$$\Delta = -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2 + A\lambda_3^2),$$

то она будет эллиптической тогда и только тогда, когда уравнение (3) является эллиптическим.

Затем любой наперед заданной гармонической функции σ и любому

✉gulzhanae@gmail.com

наперед заданному решению ω уравнения

$$Aw_{zz} + aw_{xx} + 2bw_{xy} + cw_{yy} = (a-c)\sigma_{xy} + b(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \tag{6}$$

формулами

$$s = \sigma_z, \qquad u = \omega_x - \sigma_y, \qquad v = \omega_y - \sigma_x, \qquad w = \omega_z$$

ставится в соответствие решение системы (5).

Здесь приведем другой подход к обобщению этой системы Моисила – Теодореску, который является более естественным, чем тот, который рассматривался в [5], а также построим представление решений через производные гармонических функций.

Пусть

$$\ell_i = \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} + \beta_i \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_i \frac{\partial}{\partial z}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 6\,, \tag{7}$$

– линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему четырех уравнений в частных производных

$$\begin{aligned}
&\ell_1(u) + \ell_2(v) + \ell_3(w) = 0\,,\\
&\ell_1(s) - \ell_4(v) - \ell_5(w) = 0\,,\\
&\ell_2(s) + \ell_4(u) - \ell_6(w) = 0\,,\\
&\ell_3(s) + \ell_5(u) + \ell_6(v) = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

с четырьмя искомыми функциями s, u, v, w. Характеристический определитель системы (8) имеет вид

$$\Delta = -\left[\lambda_1(\xi)\lambda_6(\xi) - \lambda_2(\xi)\lambda_5(\xi) + \lambda_3(\xi)\lambda_4(\xi)\right]^2,$$

где

$$\lambda_i(\xi) = \alpha_i\xi_1 + \beta_i\xi_2 + \gamma_i\xi_3, \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Система (8) эллиптична тогда и только тогда, когда эллиптичен оператор второго порядка

$$L = \ell_1\ell_6 - \ell_2\ell_5 + \ell_3\ell_4\,.$$

Пусть φ и ψ – произвольные достаточно гладкие функции. Тогда функции

$$\begin{aligned}
&s = -\ell_6(\varphi)\,,\\
&u = -\ell_6(\psi)\,,\\
&v = \ell_3(\varphi) + \ell_5(\psi)\,,\\
&w = -\ell_2(\varphi) - \ell_4(\psi)
\end{aligned} \tag{9}$$

удовлетворяют двум последним уравнениям системы (8), а из первых двух уравнений системы (8) получим

$$L(\varphi) = 0, \qquad L(\psi) = 0\,. \tag{10}$$

Для системы (8) оператор L играет такую же роль, как оператор Лапласа для системы Моисила – Теодореску, а формулы (9) дают представление решений системы (8) через решения уравнения второго порядка (10). Точно так же, как в [2] для системы Моисила – Теодореску, для системы (8) можно исследовать задачу Римана – Гильберта.

Всегда можем найти линейную замену независимых переменных такую, что

$$\ell_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \ell_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \ell_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

и тогда система (8) преобразуется к виду

$$u_x + v_y + w_z = 0\,,$$

$$s_x - m_1(v) - m_2(w) = 0\,,$$

$$s_y + m_1(u) - m_3(w) = 0\,,$$

$$s_z + m_2(u) + m_3(v) = 0\,. \tag{11}$$

Здесь

$$m_i = a_i \frac{\partial}{\partial x} + b_i \frac{\partial}{\partial y} + c_i \frac{\partial}{\partial z}\,, \qquad i = 1, 2, 3\,,$$

а функции (9) определяются формулами

$$s = -a_3\varphi_x - b_3\varphi_y - c_3\varphi_z\,,$$

$$u = -a_3\psi_x - b_3\psi_y - c_3\psi_z\,,$$

$$v = \varphi_z + a_2\psi_x + b_2\psi_y + c_2\psi_z\,,$$

$$w = -\varphi_y - a_1\psi_x - b_1\psi_y - c_1\psi_z\,. \tag{12}$$

Оператор L в новых переменных примет вид

$$L = -a_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (a_2 - b_3)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - (a_1 + c_3)\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} +$$

$$+ b_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (c_2 - b_1)\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} - c_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Известно, что любому эллиптическому оператору L всегда можно сопоставить систему вида (11), причем одному и тому же оператору сопоставляется некоторое множество систем вида (11), поскольку операторы определяются однозначно только коэффициентами a_3, b_2 и c_1. Рассмотрим случай, когда оператор L совпадает с оператором Δ. Этого достигнем при выполнении равенств

$$a_2 = b_3 = c, \quad c_3 = -a_1 = a, \quad c_2 = b_1 = b, \quad a_3 = c_1 = -1, \quad b_2 = 1\,,$$

где a, b, c − произвольные действительные постоянные.

В этом случае система (8) принимает вид

$$u_x + v_y + w_z = 0\,,$$

$$s_x - av_x - bv_y + v_z - cw_x - w_y - bw_z = 0\,,$$

$$s_y + au_x + bu_y - u_z + w_x - cw_y + aw_z = 0\,,$$

$$s_z + cu_x + u_y + bu_z - v_x + cv_y - av_z = 0\,. \tag{13}$$

Из системы (8) точно так же, как в случае системы Моисила − Теодореску, который был рассмотрен в [6], исключением искомых функций получаем, что каждая компонента любого решения системы (8) удовлетворяет уравнению второго порядка

$$LU \equiv \frac{\partial}{\partial x} m_3(U) - \frac{\partial}{\partial y} m_2(U) + \frac{\partial}{\partial z} m_3(U) \equiv -\Delta U = 0\,,$$

$$U = (s, u, v, w)\,.$$

Здесь

$$m_1 = -a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z},$$

$$m_2 = c\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + b\frac{\partial}{\partial z},$$

$$m_3 = -\frac{\partial}{\partial x} + c\frac{\partial}{\partial y} + a\frac{\partial}{\partial z}.$$

Следовательно, каждая компонента любого решения системы (13) является гармонической функцией.

Из системы (8) получается также и то обобщение системы Моисила – Теодореску, которое рассматривалось авторами в [3]. Для этого в системе (8) необходимо выполнить замену переменных

$$\ell_4 = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \ell_5 = -\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \ell_6 = \frac{\partial}{\partial x},$$

и система (8) примет вид

$$\ell_1(u) + \ell_2(v) + \ell_3(w) = 0,$$

$$\ell_1(s) - v_z + w_y = 0,$$

$$\ell_2(s) + u_z - w_x = 0,$$

$$\ell_3(s) - u_y + v_x = 0. \qquad (14)$$

Использованное в [1] решение системы (13) не является общим представлением решения системы. Будем искать другое решение этой системы, выраженное через производные произвольных гармонических функций. Для этого положим

$$u = \alpha_1\sigma_x + \beta_1\sigma_y + \gamma_1\sigma_z + \alpha_2\omega_x + \beta_2\omega_y + \gamma_2\omega_z + \alpha_3\rho_x + \beta_3\rho_y + \gamma_3\rho_z,$$

$$v = \delta_1\sigma_x + \mu_1\sigma_y + \nu_1\sigma_z + \delta_2\omega_x + \mu_2\omega_y + \nu_2\omega_z + \delta_3\rho_x + \mu_3\rho_y + \nu_3\rho_z, \quad (15)$$

где α_i, β_i, γ_i, δ_i, μ_i, ν_i – произвольные действительные постоянные, а σ, ω, ρ – произвольные действительные гармонические функции.

Подставляя (15) в первое и четвертое уравнения системы (13) и учитывая гармоничность функций σ, ω, ρ, т. е.

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = -\sigma_{zz}, \qquad \omega_{xx} + \omega_{yy} = -\omega_{zz}, \qquad \rho_{xx} + \rho_{yy} = -\rho_{zz},$$

а затем полагая

$$-\gamma_i = \mu_i = \alpha_i, \qquad -\nu_i = \delta_i = -\beta_i, \qquad i = 1,2,3,$$

из первого уравнения (13) получим

$$w_z = \alpha_1\sigma_{zz} + \alpha_2\omega_{zz} + \alpha_3\rho_{zz} - \\ - \gamma_1\sigma_{xz} - \gamma_2\omega_{xz} - \gamma_3\rho_{xz} - \nu_1\sigma_{yz} - \nu_2\omega_{yz} - \nu_3\rho_{yz},$$

а из четвертого уравнения (13) имеем

$$s_z = (-c\gamma_1 + \nu_1 - b\alpha_1 + a\delta_1)\sigma_{xz} + (-\gamma_1 - c\nu_1 - b\beta_1 + a\mu_1)\sigma_{yz} + \\ + (c\alpha_1 + \beta_1 - b\gamma_1 + a\nu_1)\sigma_{zz} + (-c\gamma_2 + \nu_2 - b\alpha_2 + a\delta_2)\omega_{xz} + \\ + (-\gamma_2 - c\nu_2 - b\beta_2 + a\mu_2)\omega_{yz} + (c\alpha_2 + \beta_2 - b\gamma_2 + a\nu_2)\omega_{zz} + \\ + (-c\gamma_3 + \nu_3 - b\alpha_3 + a\delta_3)\rho_{xz} + (-\gamma_3 - c\nu_3 - b\beta_3 + a\mu_3)\rho_{yz} + \\ + (c\alpha_3 + \beta_3 - b\gamma_3 + a\nu_3)\rho_{zz}.$$

Интегрируя эти уравнения по z, получим

$$w = \alpha_1\sigma_x + \beta_1\sigma_y + \alpha_1\sigma_z + \alpha_2\omega_x + \beta_2\omega_y + \alpha_2\omega_z +$$
$$+ \alpha_3\rho_x + \beta_3\rho_y + \alpha_3\rho_z + \varphi(x,y),$$
$$s = (c\alpha_1 + \beta_1 - b\alpha_1 - a\beta_1)\sigma_x + (\alpha_1 - c\beta_1 - b\beta_1 + a\alpha_1)\sigma_y +$$
$$+ (c\alpha_1 + \beta_1 + b\alpha_1 + a\beta_1)\sigma_z + (c\alpha_2 + \beta_2 - b\alpha_2 - a\beta_2)\omega_x +$$
$$+ (\alpha_2 - c\beta_2 - b\beta_2 + a\alpha_2)\omega_y + (c\alpha_2 + \beta_2 + b\alpha_2 + a\beta_2)\omega_z +$$
$$+ (c\alpha_3 + \beta_3 - b\alpha_3 - a\beta_3)\rho_x + (\alpha_3 - c\beta_3 - b\beta_3 + a\alpha_3)\rho_y +$$
$$+ (c\alpha_3 + \beta_3 + b\alpha_3 + a\beta_3)\rho_z + \psi(x,y),$$

где $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ – произвольные действительные гармонические функции от двух переменных x, y. Запишем функции u, v, w, s в виде

$$u = (\alpha_1\sigma + \alpha_2\omega + \alpha_3\rho)_x + (\beta_1\sigma + \beta_2\omega + \beta_3\rho)_y - (\alpha_1\sigma + \alpha_2\omega + \alpha_3\rho)_z,$$
$$v = -(\beta_1\sigma + \beta_2\omega + \beta_3\rho)_x + (\alpha_1\sigma + \alpha_2\omega + \alpha_3\rho)_y + (\beta_1\sigma + \beta_2\omega + \beta_3\rho)_z,$$
$$w = (\alpha_1\sigma + \alpha_2\omega + \alpha_3\rho)_x + (\beta_1\sigma + \beta_2\omega + \beta_3\rho)_y +$$
$$+ (\alpha_1\sigma + \alpha_2\omega + \alpha_3\rho)_z + \varphi(x,y),$$
$$s = (c-b)(\alpha_1\sigma + \alpha_2\omega + \alpha_3\rho)_x + (1-a)(\beta_1\sigma + \beta_2\omega + \beta_3\rho)_x +$$
$$+ (1+a)(\alpha_1\sigma + \alpha_2\omega + \alpha_3\rho)_y - (c+b)(\beta_1\sigma + \beta_2\omega + \beta_3\rho)_y +$$
$$+ (c+b)(\alpha_1\sigma + \alpha_2\omega + \alpha_3\rho)_z + (1+a)(\beta_1\sigma + \beta_2\omega + \beta_3\rho)_z +$$
$$+ \psi(x,y).$$

Вводя обозначения

$$\alpha_1\sigma + \alpha_2\omega + \alpha_3\rho = f, \qquad \beta_1\sigma + \beta_2\omega + \beta_3\rho = g,$$

получим

$$u = f_x + g_y - f_z, \qquad v = -g_x + f_y + g_z, \qquad w = f_x - g_y + f_z + \varphi(x,y),$$
$$s = (c-b)f_x + (1-a)g_x + (1+a)f_y - (c+b)g_y + (c+b)f_z +$$
$$+ (1+a)g_z + \psi(x,y). \tag{16}$$

Здесь f, g – произвольные гармонические функции от трех независимых переменных, а φ, ψ – произвольные гармонические функции, связанные формулами

$$\psi_x = c\varphi_x + \varphi_y, \qquad \psi_y = c\varphi_y - \varphi_x. \tag{17}$$

Эти формулы получаются при подстановке формул (16) во второе и третье равенства в (13), поскольку функции φ и ψ подбираются так, чтобы они удовлетворяли всем уравнениям системы (13).

Теперь в рассмотрение введем произвольную аналитическую функцию

$$\Phi(t) = p(x,y) + iq(x,y)$$

от комплексной переменной $t = x + iy$, так что действительные функции $p(x,y)$, $q(x,y)$ удовлетворяют системе уравнений Коши – Римана

$$p_x - q_y = 0, \qquad p_y + q_x = 0, \tag{18}$$

а также являются гармоническими функциями.

Если гармонические функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ представить в виде

$$\varphi(x,y) = -p_x - q_y,$$

$$\psi(x,y) = -cp_x - cq_y + q_x - p_y, \tag{19}$$

то формулы (16) в силу (17)–(19) можем записать как

$$u = (f-p)_x + (g+q)_y - (f-p)_z,$$

$$v = -(g+q)_x + (f-p)_y + (g+q)_z,$$

$$w = f_x - g_y + f_z + \varphi(x,y) = (f-p)_x - (g+q)_y + (f-p)_z,$$

$$s = (c-b)(f-p)_x + (1-a)(g+q)_x + (1+a)(f-p)_y -$$

$$- (c+b)(g+q)_y + (c+b)(f-p)_z + (1+a)(g+q)_z.$$

Теперь, обозначив функции $f-q$, $g+p$ снова соответственно через f, g, предыдущие равенства перепишем так:

$$u = f_x + g_y - f_z, \qquad v = -g_x + f_y + g_z, \qquad w = f_x - g_y + f_z,$$

$$s = (c-b)f_x + (1-a)g_x + (1+a)f_y - (c+b)g_y + (c+b)f_z + (1+a)g_z. \tag{20}$$

Таким образом, получено представление (20) решений системы (13) через производные двух гармонических функций f и g от трех независимых переменных. Из этого представления, в частности при $a = b = c = 0$, получается представление решений системы Моисила – Теодореску.

С помощью этого представления, модифицируя метод Булигана – Жиро [5], задачу Римана – Гильберта для системы (13) можно свести к эквивалентной системе интегральных уравнений Фредгольма [2, 4].

1. *Караев Х.* Задача Римана – Гильберта для обобщения системы Моисила – Теодореску // Дифференц. уравнения и их применения (Вильнюс). – 1990. – Вып. 45. – С. 34–49.
2. *Токибетов Ж. А.* Об одной граничной задаче для голоморфного в полупространстве вектора // Исследования по многомерным эллиптическим системам уравнений в частных производных. – Новосибирск, 1966. – С. 100–104.
3. *Токибетов Ж. А., Абдуахитова Г. Е., Сарсекеева А. С.* Многомерные аналоги системы Коши – Римана и представления их решения через гармонические функции // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 1. – С. 78–85.
   То же: *Tokibetov J. A., Abduakhitova G. E., Sarsekeeva A. S.* Multidimensional analogs of the Cauchy – Riemann system and representations of their solutions via harmonic functions // J. Math. Sci. – 2018. – **229**, No. 2. – P. 200–210. – https://doi.org/10.1007/s10958-018-3671-x.
4. *Токибетов Ж. А., Сарсекеева А. С., Болтирекова Р. А.* Решение задачи Римана – Гильберта для голоморфного вектора методом Булигана – Жиро // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, № 4. – С. 567–573.
5. *Янушаускас А. И.* Задача о наклонной производной теории потенциала. – Новосибирск: Наука, 1985. – 262 с.
   То же: *Yanushauskas A. I.* The oblique derivative problem of potential theory. – New York: Consultants Bureau, 1989. – viii+251 p.
6. *Янушаускас А. И.* К теории многомерных эллиптических систем // Сиб. мат. журн. – 1980. – **21**, № 2. – С. 223–231 с.
   То же: *Yanushauskas A.* Theory of multidimensional elliptic systems // Sib. Math. J. – 1980. – **21**, No. 2. – P. 312–318. – https://doi.org/10.1007/BF00968282.

ПРО ОДНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО ГОЛОМОРФНОГО ВЕКТОРА ЧЕРЕЗ ПОХІДНІ ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

Стаття присвячена дослідженню теорії еліптичних систем першого порядку і узагальнених голоморфних векторів. З використанням системи Моісила – Теодореску отримано представлення узагальненого голоморфного вектора через похідні двох гармонічних функцій від трьох незалежних змінних.

Ключові слова: *еліптичні рівняння, гармонічні функції, система Коши – Римана, узагальнений голоморфний вектор, система Моісила – Теодореску, задача Коші – Рімана.*

ON ONE REPRESENTATION OF GENERALIZED HOLOMORPHIC VECTOR VIA DERIVATIVES OF HARMONIC FUNCTIONS

The paper is devoted to investigation of the theory of first-order elliptic systems and generalized holomorphic vectors. By using the Moisil – Teodorescu system the representation of the generalized holomorphic vector is constructed via the derivatives of two harmonic functions of three independent variables.

Key words: *elliptic equations, harmonic functions, Cauchy – Riemann system, generalized holomorphic vector, Moisil – Teodorescu system, Cauchy – Riemann problem.*

[1] Казахск. нац. ун-т им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
[2] Казахск. нац. пед. ун-т им. Абая, Алматы, Казахстан

Получено
12.10.19