

**АСИМПТОТИЧНИЙ ПІДХІД У ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
ДЛЯ ТІЛ З ТОНКИМИ ПРУЖНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ**

Запропоновано єдиний підхід до дослідження процесів динамічної взаємодії тонких пружних неоднорідностей з оточуючим пружним середовищем. Він базується на методах теорії сингулярних збурень при побудові математичних моделей контакту складових пружної системи з подальшим використанням методу нульового поля для вивчення хвильових полів у композитах. Підхід ефективний при дослідженні явища взаємодії пружних хвиль із локальними чи множинними тонкими пружними неоднорідностями, а також при розв'язанні відповідних обернених задач.

Ключові слова: тонкі пружні включення, композити з наповнювачами неканонічної форми, теорія сингулярних збурень, метод нульового поля, динамічні навантаження.

Вступ. Наукові результати, викладені у статті, започатковані в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України проф. Г. С. Кітом і його співробітниками [5, 14, 17, 68]. Вивчення впливу тонких неоднорідностей на фізико-механічні поля у середовищах за статичних навантажень в Інституті розпочалося з праць Я. С. Підстригача та Г. С. Кіта [12, 51, 52, 54, 55]. Одночасно подібні дослідження проводилися в інших вітчизняних і зарубіжних наукових школах. Детальний огляд цих досліджень можна знайти у монографіях Г. С. Кіта та його співавторів [9, 11, 13], ґрунтовній праці Г. Т. Сулима [64], ряді статей, монографій і дисертаційних робіт [1, 4, 18, 36, 40, 48, 49, 50, 56, 57, 63, 66, 70, 80]. У переважній більшості цих праць розглядалися статичні задачі і їх вирішення базувалося на введенні деяких додаткових припущень (гіпотез) фізичного або математичного характеру, що приводить до пониження розмірності вихідної задачі в околі тонкої неоднорідності. У зв'язку з цим спостерігається велика різноманітність моделей тонких пружних включень, які запропоновані для неоднорідностей з різними матеріальними властивостями; розглядалися окремо включення низької або великої жорсткості, створювались моделі, які охоплюють широкий діапазон властивостей дефекту (аналогічна ситуація спостерігається при розгляді задач теплопровідності). Загальні ідейні принципи такого підходу були сформульовані при розгляді задач теплопровідності у працях Я. С. Підстригача [51, 52, 54]. У рамках розглянутого ним підходу до моделювання неідеального контакту тонкої неоднорідності з оточуючим середовищем розв'язано багато практично важливих задач в різних областях механіки суцільного середовища, описаних у цитованих вище оглядах. Стосовно питань теплопровідності (аналог задачі поздовжнього зсуву), то вперше конкретну задачу для теплопровідної неоднорідності скінченної довжини дослідили Г. С. Кіт і Я. С. Підстригач [12], вводячи стрибок температури і вважаючи тепловий потік неперервним (аналог умов типу вінклерівської основи при поздовжньому зсуві). У праці [55] були отримані інтегральні рівняння загального типу у випадку теплопровідного включення; ці результати знайшли подальший розвиток у монографії [9].

Як було зазначено, в основу згаданих вище підходів до моделювання поведінки пружних включень покладено відповідні додаткові математичні або фізико-механічні припущення чи гіпотези. Причому наявність малого параметра, що характеризує малу відносну товщину об'єкта, відразу вказувала на асимптотичний характер запропонованої моделі. Однак виникла проблема обґрунтування використаних процедур і визначення меж застосовності тої чи іншої моделі.

[✉] kunets@iapmm.lviv.ua

До розв'язання аналогічних динамічних задач теорії пружності було застосовано також методи теорії сингулярних збурень. Основні її положення викладено у працях [67, 71]. Базова ідея цих методів на основі асимптотичного аналізу задачі теорії пружності для тонкого шару сформульована Л. Прандтлем при дослідженні явища пограничного шару, математично зумовленого наявністю малого параметра (оберненого числа Рейнольдса) при старших похідних у рівняннях Нав'є – Стокса, що виникає у випадку обтікання тіл гідродинамічними потоками. Вона полягає у введенні внутрішніх локальних координат (розтягу координат) поблизу поверхні об'єкта, на якій задано граничні умови та поблизу якої спостерігається швидка зміна розв'язку в напрямку цих координат. Оскільки подібну структуру розв'язку було виявлено в інших задачах з малим параметром, сформувався підхід, згідно з яким ці розв'язки подаються у вигляді асимптотичних (зовнішніх) розкладів із подальшим додатковим їх вивченням (побудовою пограничних шарів, внутрішніх асимптотичних розкладів) в областях швидкої зміни розглядуваних процесів [67, 71]. У зв'язку з цим слід відмітити подібність підходів до побудови асимптотичних розв'язків задач математичної фізики в тонких областях і в областях із тонкими неоднорідностями, які різняться між собою структурою відповідних пограничних шарів.

Стосовно задач теорії пружності асимптотичні методи спочатку були використані при дослідженні напружено-деформованого стану тонких тіл. Побудова наближених теорій поведінки пластин та оболонок започаткована працями Й. І. Воровича, А. Л. Гольденвейзера, К. О. Фрідрікса та інших авторів [3, 67]. Запропоновані в цих працях підходи використані пізніше В. Ф. Бутузовим, А. Б. Васільєвою, М. Г. Джавадовим, І. Є. Зіно, Н. Ф. Морозовим, С. А. Назаровим, Е. А. Троппом та іншими вченими при дослідженні різних задач механіки суцільного середовища в тонких областях [6, 45, 46]. Асимптотичне моделювання динамічної поведінки тонких пластин та оболонок проводилось А. Л. Гольденвейзером, Ю. Д. Каплуновим, В. Б. Лідським, П. Е. Нольде, І. В. Симоновим та іншими авторами [18]. Окремі з цих результатів дозволили також провести асимптотичний аналіз та уточнення існуючих теорій пластин та оболонок. Щодо застосування методів теорії сингулярних збурень до розв'язування задач в областях з тонкими вирізами, то слід відмітити роботи М. Д. Ван-Дайка, А. М. Ільїна, В. Г. Мазьї, Б. О. Мовчана, С. О. Назарова, Б. О. Пламеневського, М. В. Федорюка та інших авторів (див., наприклад, [2, 7, 45, 46]).

Поєднання методик, викладених у згаданих працях, дозволило в рамках асимптотичного підходу дослідити ряд задач для областей, що містять тонкі неоднорідності. Зазначимо, що структура асимптотичних розкладів розв'язків таких задач істотно залежить від співвідношення параметрів, що характеризують матеріальні властивості складових композита. Статичні просторові задачі для тіл із включеннями великої і малої жорсткості досліджувались у працях С. К. Канауна, В. М. Левіна [8, 72]. У [17, 53] асимптотичний підхід запропоновано стосовно до задач осесиметричного кручення, причому в [17] розглянуто випадок неоднорідності довільної жорсткості. Подібні задачі в рамках асимптотичного моделювання розглядалися і в інших областях механіки суцільного середовища, зокрема теплопровідності, електродинаміці, гідропружності (Е. Санчес-Паленсія [62], Ю. Д. Каплунов, І. Б. Симоненко та інші). Багато спільного мають методи розв'язання згаданих задач і підходи до вивчення поведінки просторових тіл з ниткоподібними і малими вирізами та включеннями, способи побудови розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь математичної фізики з малим параметром при старших похідних тощо [70]).

Зазначимо, що за допомогою теорії сингулярних збурень задачі досліджувались двома способами. Згідно з одним спочатку записується система сингулярних інтегральних рівнянь, еквівалентна початково сформульованій задачі, після чого, з використання теорії асимптотичних розкладів інтегра-

лів за малим параметром, теорії узагальнених функцій тощо, отримується інтегральне рівняння, задане на серединній поверхні (лінії) неоднорідності, що асимптотично наближено визначає шукані підінтегральні функції (О. П. Піддубняк, С. К. Канаун, В. Ю. Новокшенов та інші [8, 47, 53]). Згідно з другим підходом асимптотичні подання розв'язку підставляються у диференціальне рівняння і граничні умови задачі з подальшим розщепленням відповідних операторів за малим параметром (М. Д. Ван-Дайк, А. М. Ільїн, В. Г. Мазья, Б. О. Пламеневський, С. О. Назаров, Б. О. Мовчан, Е. Санчес-Паленсія та інші [2, 7, 45, 46]).

У цій роботі використаємо другий спосіб дослідження, оскільки він менш трудомісткий і дозволяє чіткіше пояснити механічну суть отриманих моделей. Наведемо основні положення запропонованого підходу для моделювання динамічної взаємодії тонкого пружного включення з пружною матрицею, базованого на методі зрощування асимптотичних розкладів (метод ЗАР).

1. Загальна схема методу ЗАР при моделюванні взаємодії включення і матриці за динамічних навантажень. Базові положення схеми висвітлено в працях [14, 68, 73]. Вважається, що в однорідному пружному середовищі з модулями Ляме λ , μ і густиною ρ розміщене тонкостінне пружне включення змінної товщини з відповідними параметрами λ_0 , μ_0 , ρ_0 , що займає область

$$W_\varepsilon = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in W_0, 2|\alpha_3| \leq \varepsilon g(\alpha_1, \alpha_2) = h(\alpha_1, \alpha_2)\},$$

$$\varepsilon = \max_{x \in W_0} \frac{h(x)}{a}, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (1)$$

Тут координати точок в околі неоднорідності у тривимірному просторі подано в триортогональній системі $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ за допомогою рівності $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \mathbf{n}(\alpha_1, \alpha_2)$, де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – декартові координати, $\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2)$ – радіус-вектор серединної поверхні W_0 , обмеженої гладким контуром ∂W_0 , $\mathbf{n}(\alpha_1, \alpha_2)$ – нормаль до поверхні W_0 , $h(\alpha_1, \alpha_2)$ – товщина включення (рис. 1), $g(\alpha_1, \alpha_2)$ – достатньо гладка додатно визначена функція, a – характерний розмір поверхні W_0 , ε – малий безрозмірний параметр, що характеризує малу відносно a товщину включення.

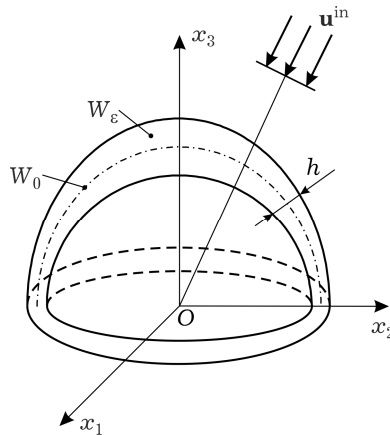


Рис. 1

Переміщення у пружній системі задовольняють динамічні рівняння Ляме. Розглянуто три випадки умов механічного контакту неоднорідності з оточуючим середовищем. При ідеальному механічному контакті складових

композита граничні умови на поверхні включення ∂W_ε мають вигляд

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t), \quad \sum_{j=1}^3 [\sigma_{\ell j}(\mathbf{x}, t) - \sigma_{\ell j}^0(\mathbf{x}, t)] n_j^0 = 0, \\ \ell = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \partial W_\varepsilon, \quad (2)$$

де $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ – повне поле зміщень у матриці; $\mathbf{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t)$ та $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t)$ – зміщення у дифрагрованому неоднорідністю полі та у включенні відповідно; t – час; пружна система збурюється заданим навантаженням із розподілом зміщень $\mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$; $\sigma_{\ell j}$, $\sigma_{\ell j}^{\text{sc}}$, $\sigma_{\ell j}^{\text{in}}$, $\sigma_{\ell j}^0$ – компоненти тензорів напружень, що відповідають зміщенням \mathbf{u} , \mathbf{u}^{sc} , \mathbf{u}^{in} і \mathbf{u}^0 ; $\mathbf{n}^0(n_1^0, n_2^0, n_3^0)$ – зовнішня нормаль до поверхні включення.

У випадку одностороннього відшарування або жорсткого підкріплення включення по частині ∂W_1 його поверхні ∂W_ε маємо (на поверхні $\partial W_\varepsilon \setminus \partial W_1$ виконуються співвідношення (2)):

– у випадку відшарування по ∂W_1

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{\ell j} n_j^0 = 0, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{\ell j}^0 n_j^0 = 0, \quad \ell = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \partial W_1, \quad (3)$$

– у випадку жорсткого підкріплення включення

$$\partial W_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in W_0, \alpha_3 = -h(\alpha_1, \alpha_2)/2\}, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial W_1, \quad (4)$$

Повнота постановки задач забезпечується також нульовими початковими умовами на переміщення і їхні часові похідні.

Для розв'язання задач із часовою залежністю використаємо інтегральне перетворення Фур'є за часом t , внаслідок чого отримаємо відповідні постановки стаціонарних динамічних задач у частотній області. Тоді спектри переміщень $\mathbf{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega)$ та $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \omega)$ у композиті (ω – параметр перетворення Фур'є) будуть задовольняти відповідні стаціонарні рівняння Ляме, умови спряження (2)–(4) та умови випромінювання на безмежності.

Спрощені моделі пружно-динамічної взаємодії включення і матриці за усталених коливань тіла отримано методом зрощування асимптотичних розвинень. Основна ідея методу полягає у поданні розв'язків задач асимптотичними (зовнішніми) розвиненнями за малим параметром ε (1) у всьому композиті з подальшим їх вивченням (побудовою пограничних шарів, внутрішніх асимптотичних розкладів) поблизу країв тонкого включення. Схему проілюструємо на прикладі задачі поздовжнього зсуву за ідеального контакту складових композита. У цьому випадку форму поперечного перерізу тунельного включення можна подати у вигляді $W_\varepsilon = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in W_0, 2|\alpha_2| \leq \varepsilon g(\alpha_1) = h(\alpha_1)\}$ (де $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ – ортогональна система координат, зв'язана із серединною лінією включення $W_0 = [\alpha_-, \alpha_+]$). Асимптотика функції $g(\alpha_1)$ при $\alpha_1 \rightarrow \alpha_\pm$ має вигляд

$$g(\tau_1) = g_0 |\tau_1|^\delta + \dots, \quad \tau_1 \rightarrow 0, \quad g_0 = \text{const} \neq 0, \quad \delta \geq 0, \quad (5)$$

де $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ – локальна система координат з початком в одній із точок ($\alpha_1 = \alpha_\pm$, $\alpha_2 = 0$), введена таким чином, що вісь τ_1 напрямлена по дотичній до W_0 , а вісь τ_2 напрямлена по граничній нормалі до W_0 . Параметр δ у

співвідношенні (5) визначає вигляд кінців неоднорідності. Розглянуто чотири якісно різні форми кінців включення: затуплені ($\delta = 0$), гладкі ($0 < \delta < 1$), у формі кута малого розхилу ($\delta = 1$) та гострі ($\delta > 1$) (рис. 2).

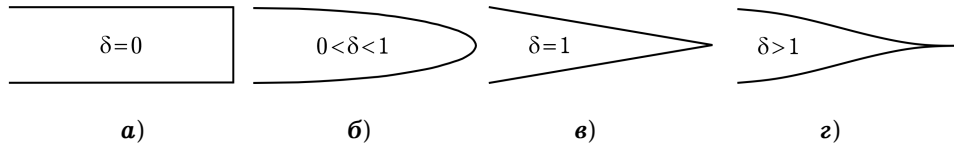


Рис. 2

Відмінні від нуля компоненти векторів переміщень у матриці і у включенні $u^{sc}(\mathbf{x}, \omega)$ і $u^0(\mathbf{x}, \omega)$ задовольняють рівняння Гельмгольца, умову випромінювання Зоммерфельда та умови спряження (2) складових композита, які в цьому випадку набувають вигляду

$$u(\mathbf{x}, \omega) = u^0(\mathbf{x}, \omega), \quad \frac{\partial u(\mathbf{x}, \omega)}{\partial n^0} = \gamma \frac{\partial u^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial n^0}, \quad \mathbf{x} \in \partial W_\varepsilon, \quad \gamma = \frac{\mu_0}{\mu}. \quad (6)$$

Вважаємо також, що $0 \leq \gamma \leq \infty$, $(k_2, k_{20}) \max_{\alpha_1 \in W_0} |h(\alpha_1)| \ll 1$, де k_2, k_{20} – хвильові числа поперечних хвиль у матриці та у включенні відповідно.

Зовнішні асимптотичні розклади шукаємо у вигляді розвинень за малим параметром ε :

$$u^{sc}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j^{sc}(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus W_\varepsilon,$$

$$u^0(\boldsymbol{\alpha}, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j^0(\alpha_1, \bar{\alpha}_2, \omega), \quad \boldsymbol{\alpha} \in W_\varepsilon, \quad \alpha_2 = \varepsilon \bar{\alpha}_2, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7)$$

Підставивши ряди (7) у рівняння руху і умови (6) та прирівнявши вирази при однакових степенях ε , отримуємо спрощені умови контакту складових пружної системи, перенесені на серединну лінію включення W_0 , для знаходження головних членів розвинень (7). Форма цих умов визначається співвідношенням між параметром механічної контрастності неоднорідності γ та величиною ε . Тому розглянемо три різні діапазони зміни величини γ :

$$1^\circ. \varepsilon \leq \gamma \leq 1/\varepsilon; \quad 2^\circ. 0 \leq \gamma \leq \varepsilon; \quad 3^\circ. 1/\varepsilon \leq \gamma < \infty. \quad (8)$$

Діапазон 1° відповідає випадку неконтрастної неоднорідності (припускаємо, що $\gamma = \text{const} \neq 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$). Діапазон 2° описує випадок, коли жорсткість включення набагато менша від жорсткості оточуючого середовища порівняно з ε ($\gamma = \varepsilon \bar{\gamma}$ при $\bar{\gamma} = \text{const}$, $\varepsilon \rightarrow 0$). Діапазон 3° описує випадок включення великої жорсткості ($\gamma = \varepsilon^{-1} \bar{\gamma}$ при $\bar{\gamma} = \text{const}$, $\varepsilon \rightarrow 0$).

З точністю до головних членів асимптотичних розвинень отримаємо умови динамічної взаємодії матриці та включення

– діапазон 1° :

$$u^{sc}(\alpha_1, +0, \omega) - u^{sc}(\alpha_1, -0, \omega) = \frac{1-\gamma}{\gamma} h(\alpha_1) \frac{\partial u^{in}(\boldsymbol{\alpha}, \omega)}{\partial \alpha_2} \Big|_{\alpha_2=0},$$

$$\frac{\partial u^{sc}(\alpha_1, +0, \omega)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial u^{sc}(\alpha_1, -0, \omega)}{\partial \alpha_2} = (1-\gamma) \frac{1}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{h(\alpha_1)}{A(\alpha_1)} \frac{\partial u^{in}(\alpha_1, 0, \omega)}{\partial \alpha_1} +$$

$$+ (k_2^2 - \gamma k_{20}^2) h(\alpha_1) u^{in}(\alpha_1, 0, \omega), \quad \alpha_1 \in W_0,$$

$$u^0(\boldsymbol{\alpha}, \omega) \approx \frac{1}{2} [u(\alpha_1, +0, \omega) + u(\alpha_1, -0, \omega)] + \alpha_2 \left. \frac{\partial u^{\text{in}}(\alpha_1, 0, \omega)}{\partial \alpha_2} \right|_{\alpha_2=0},$$

$$\boldsymbol{\alpha} \in W_\varepsilon; \quad (9)$$

– *діапазон 2°:*

$$u^{\text{sc}}(\alpha_1, +0, \omega) - u^{\text{sc}}(\alpha_1, -0, \omega) = \frac{1}{\gamma} h(\alpha_1) \left[\frac{\partial u^{\text{sc}}(\boldsymbol{\alpha}, \omega)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u^{\text{in}}(\boldsymbol{\alpha}, \omega)}{\partial \alpha_2} \right] \Big|_{\alpha_2=0},$$

$$\frac{\partial u^{\text{sc}}(\alpha_1, +0, \omega)}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial u^{\text{sc}}(\alpha_1, -0, \omega)}{\partial \alpha_2}, \quad \boldsymbol{\alpha} = W_0,$$

$$u^0(\boldsymbol{\alpha}, \omega) \approx \frac{1}{2} [u(\alpha_1, +0, \omega) + u(\alpha_1, -0, \omega)] + \gamma^{-1} \alpha_2 \frac{\partial u^{\text{sc}}(\alpha_1, 0, \omega)}{\partial \alpha_2}, \quad \boldsymbol{\alpha} \in W_\varepsilon;$$

$$(10)$$

– *діапазон 3°:*

$$u^{\text{sc}}(\alpha_1, +0, \omega) = u^{\text{sc}}(\alpha_1, -0, \omega),$$

$$\frac{\partial u^{\text{sc}}(\alpha_1, +0, \omega)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial u^{\text{sc}}(\alpha_1, -0, \omega)}{\partial \alpha_2} = -\gamma \left[\frac{1}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{h(\alpha_1)}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \right.$$

$$\left. + h(\alpha_1) k_{20}^2 \right] u(\boldsymbol{\alpha}, \omega), \quad \alpha_1 \in W_0,$$

$$u^0(\boldsymbol{\alpha}, \omega) \approx u(\alpha_1, 0, \omega), \quad \boldsymbol{\alpha} \in W_\varepsilon, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} u(\alpha_1, 0, \omega) = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_\pm \quad \text{при} \quad \delta = 0. \quad (12)$$

Тут позначено $A(\alpha_1) = |d\mathbf{r}(\alpha_1) / d\alpha_1|$.

Умова (12) забезпечує однозначність розв'язку задачі і означає, що дією зі сторони матриці на торець тонкого включення великої жорсткості можна знехтувати.

Крім цього, головний член розкладу (7) в матриці задовольняє рівняння Гельмгольца та умову випромінювання на безмежності.

Зауважимо, що застосувавши метод складених асимптотичних розкладів до умов спряження (9)–(12), можемо отримати модель динамічної взаємодії включення з матрицею при довільних їхніх пружних властивостях. У випадку задачі поздовжнього зсуву маємо

$$u(\alpha_1, +0, \omega) - u(\alpha_1, -0, \omega) = \frac{h(\alpha_1)}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [u(\boldsymbol{\alpha}, +0, \omega) +$$

$$+ u(\boldsymbol{\alpha}, -0, \omega) - 2\gamma u^{\text{in}}(\boldsymbol{\alpha}, 0, \omega)],$$

$$\frac{\partial u(\alpha_1, +0, \omega)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial u(\alpha_1, -0, \omega)}{\partial \alpha_2} = - \left[\frac{\gamma}{2A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{h(\alpha_1)}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma}{2} k_{20}^2 h(\alpha_1) \right] [u(\alpha_1, +0, \omega) + u(\alpha_1, -0, \omega)] +$$

$$+ \left[\frac{1}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{h(\alpha_1)}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + k_2^2 h(\alpha_1) \right] u^{\text{in}}(\alpha_1, 0, \omega), \quad \boldsymbol{\alpha} \in W_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [u(\alpha_1, +0, \omega) + u(\alpha_1, -0, \omega)] = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_{\pm} \quad \text{при} \quad \delta = 0. \quad (13)$$

Таким чином, за ідеального механічного контакту тонких пружних неоднорідностей з оточуючим середовищем виділяються три діапазони (8) співвідношень між пружними властивостями складових композита, які приводять до різних класів контактних задач із відповідними типами граничних умов, записаних на серединній поверхні недосконалості. Це, зокрема, включення малої жорсткості, які характеризуються стрибком переміщень і неперервністю напружень на серединній поверхні; включення великої жорсткості, коли зміщення є неперервними та наявний стрибок напружень; неконтрастні включення, що характеризуються відомими стрибками зміщень і напружень, які визначаються через прикладені до композита навантаження.

Співвідношення (9)–(13) з точністю до величин порядку ε визначають розв'язок задачі всюди, за винятком малих околів кінців включення, де виникають пограничні шари внаслідок перенесення умов контакту на серединну лінію неоднорідності. Для врахування форми краю дефекту в цих околах розв'язок шукаємо у вигляді внутрішніх асимптотичних розкладів, що узгоджуються із зовнішніми розкладами за допомогою принципу узгодження. Зауважимо, що у випадку $\delta > 1$ пограничні шари не виникають. Внутрішні поправки при $0 \leq \delta < 1$ визначаються поведінкою зовнішнього розв'язку в околі краю неоднорідності.

Для прикладу розглянемо випадок включення малої жорсткості із затупленим кінцем. У цьому випадку $u^{sc}(\mathbf{x}, \omega)$ має асимптотику

$$u^{sc}(r, \varphi, \omega) \approx a_0 + b_1 \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad r \rightarrow 0, \\ \tau_1 = r \cos \varphi, \quad \tau_2 = r \sin \varphi, \quad -\pi < \varphi < \pi. \quad (14)$$

(Тут a_0 , b_1 – сталі, що визначаються в процесі розв'язання зовнішніх задач, а у випадку тріщини коефіцієнт b_1 безпосередньо зв'язаний із коефіцієнтом інтенсивності напружень).

Ввівши внутрішні змінні $\bar{\tau}_i = 2(\varepsilon g)^{-1} \tau_i$, $i = 1, 2$, $\bar{r} = 2(\varepsilon g)^{-1} r$, спрямувавши $\varepsilon \rightarrow 0$ і скориставшись принципом зрощування асимптотичних розкладів, бачимо (з урахуванням (14)), що кінець неоднорідності трансформується в напівбезмежну прямокутну область $P = \{(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) : \bar{\tau}_1 < 0, |\bar{\tau}_2| < 1\}$. Тоді внутрішні асимптотичні розклади переміщень в композиті слід шукати у вигляді рядів ($v_0 = v_0^0 = \text{const}$)

$$u(\bar{r}, \varphi, \omega) = v_0(\bar{r}, \varphi) + \sqrt{\varepsilon} v_1(\bar{r}, \varphi) + \dots, \quad (\bar{r}, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus P, \\ u^0(\bar{r}, \varphi, \omega) = v_0^0(\bar{r}, \varphi) + \sqrt{\varepsilon} v_1^0(\bar{r}, \varphi) + \dots, \quad (\bar{r}, \varphi) \in P,$$

де функції пограничного шару v_1 , v_1^0 є розв'язками статичних граничних задач

$$\Delta v_1(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) = 0, \quad (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus P, \quad \Delta v_1^0(\bar{r}, \varphi) = 0, \quad (\bar{r}, \varphi) \in P, \\ \frac{\partial v_1}{\partial n} = 0, \quad v_1^0 = v_1, \quad (\bar{r}, \varphi) \in \partial P, \quad (15)$$

$$v_1(\bar{r}, \varphi) = \sqrt{a} b_1 \sqrt{\bar{r}} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad v_1^0(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) = \sqrt{a} b_1 \bar{\tau}_2 \bar{r}^{-\delta+1/2}, \quad \bar{r} \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Таким чином, напружено-деформований стан тіла в малій прикінцевій області включення визначається відповідними статичними задачами з одно-

рідними умовами контакту складових композита на границі їх поділу (15), навантаження у яких задаються умовами на безмежності (16).

За допомогою запропонованої вище схеми розв'язано ряд двовимірних і просторових динамічних задач теорії пружності для тіл з тонкостінними пружними включеннями. Зокрема, досліджено концентрацію напружень поблизу країв тонких неоднорідностей різної форми [10, 15, 19, 27, 44, 59], спектральні та імпульсні характеристики хвильових полів, розсіяних такими об'єктами у дальню зону [16, 28, 29, 30, 58]. Створено також моделі динамічної поведінки міжфазних тонких включень і прошарків у кусково-однорідних пружних середовищах [32, 33, 38, 40].

Розглянуто також випадок тонкого п'єзоелектричного включення у пружній матриці [26, 31, 34, 35, 60, 65, 74]. За поздовжнього зсуву електропружної системи отримуємо ефективні граничні умови, що відповідають співвідношенням (9)–(11) для пружного включення

– *діапазон 1°*:

$$\begin{aligned}
u(\alpha_1, +0, \omega) - u(\alpha_1, -0, \omega) &= \frac{1 - \gamma_\ell}{\gamma_\ell} h(\alpha_1) \frac{\partial u^{\text{in}}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \alpha_2}, \\
\frac{\partial u(\alpha_1, +0, \omega)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial u(\alpha_1, -0, \omega)}{\partial \alpha_2} &= \frac{1 - \gamma_\ell}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{h(\alpha_1)}{A(\alpha_1)} \frac{\partial u^{\text{in}}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \alpha_1} + \\
&+ (k^2 - \gamma_* k_0^2) h(\alpha_1) u^{\text{in}}(\mathbf{x}, \omega), \quad \alpha_1 \in W_0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ell = 1, 2, \\
u^0(\mathbf{x}, \omega) = \varphi_P^0(\mathbf{x}, \omega) &= u^{\text{in}}(\alpha_1, 0, \omega) + \frac{\varepsilon}{2} (u^{\text{sc}}(\alpha_1, +0, \omega) + u^{\text{sc}}(\alpha_1, -0, \omega)) + \\
&+ \frac{1}{\gamma_\ell} \alpha_2 \frac{\partial u^{\text{in}}(\alpha_1, 0, \omega)}{\partial \alpha_2}, \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon; \tag{17}
\end{aligned}$$

– *діапазон 2°*:

$$\begin{aligned}
u(\alpha_1, +0, \omega) - u(\alpha_1, -0, \omega) &= \frac{h(\alpha_1)}{\gamma_\ell} \frac{\partial u(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \alpha_2}, \\
\frac{\partial u(\alpha_1, +0, \omega)}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial u(\alpha_1, -0, \omega)}{\partial \alpha_2}, \quad \alpha_1 \in W_0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ell = 1, 2, \\
u^0(\mathbf{x}, \omega) = \varphi_P^0(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{2} (u(\alpha_1, +0, \omega) + u(\alpha_1, -0, \omega)) + \\
&+ \frac{1}{\gamma_\ell} \alpha_2 \frac{\partial u(\alpha_1, 0, \omega)}{\partial \alpha_2}, \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon; \tag{18}
\end{aligned}$$

– *діапазон 3°*:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(\alpha_1, +0, \omega)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial u(\alpha_1, -0, \omega)}{\partial \alpha_2} &= \\
&= - \left[\frac{\gamma_\ell}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{h(\alpha_1)}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \gamma_* h(\alpha_1) k_0^2 \right] u(x, \omega), \\
u(\alpha_1, +0, \omega) &= u(\alpha_1, -0, \omega), \quad \alpha_1 \in W_0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ell = 1, 2, \\
u^0(\mathbf{x}, \omega) = \varphi_P^0(\mathbf{x}, \omega) &= u(\alpha_1, 0, \omega), \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon. \tag{19}
\end{aligned}$$

Тут $\ell = 1$ та $\ell = 2$ відповідають заземленому та електрично ізольованому включенням; $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \gamma_*$, $\gamma_* = \gamma(1 + \eta^2)$; k_0 – хвильове число поперечних хвиль у включенні.

Із наведених моделей видно, що у випадку заземлених включень малої жорсткості вплив п'єзоефекту на напружено-деформований стан композита нівелюється. Зазначимо також, що при певних співвідношеннях електро-механічних параметрів композита ($\rho = \rho_0(1 + \eta^2)$, $c_{44}^0 = \mu$ для заземлених або $\mu = c_{44}^0(1 + \eta^2)$ для електроізолюваних включень) неоднорідність стає непомітною у полі зондувальних хвиль.

2. Математична модель згинних коливань пластини Кірхгофа з тонкостінним пружним включенням. За допомогою запропонованої вище схеми методу ЗАР можна отримати ефективні умови динамічної поведінки тонкого наскрізного пружного включення у тонкій необмеженій пластині за ідеального механічного контакту пружної системи [21]. Розглянемо пластину товщини h , що характеризується циліндричною жорсткістю D , коефіцієнтом Пуассона ν , густиною ρ . Наскрізне тонке прямолінійне пружне включення (рис. 3) з відповідними параметрами D_0, ν_0, ρ_0 займає область

$$W_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : |x_1| < a, 2|x_2| < h_0\}, \quad \varepsilon = h_0/a \ll 1.$$

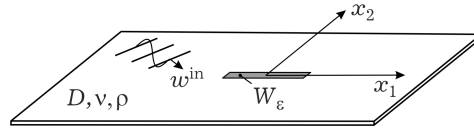


Рис. 3

Тут $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – декартові координати; $2a$ і h_0 – довжина та по-
здовжня товщина включення (наскрізна товщина включення становить h);
 ε – малий безрозмірний параметр, що характеризує малу відносну по-
здовжню товщину неоднорідності. Методику моделювання пояснимо на
прикладі неконтрастного включення при співвідношенні між пружними та
геометричними параметрами композита

$$\varepsilon < \frac{D_0}{D} < \frac{1}{\varepsilon}. \quad (20)$$

Припускаємо, що в цьому випадку та за умови $h/h_0 = o(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, ди-
намічна поведінка включення також моделюється в рамках гіпотез Кірхго-
фа. Тому прогини складових композита задовольняють рівняння руху [21]

$$\begin{aligned} \Delta^2 w(\mathbf{x}) - k^4 w(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus W_\varepsilon, \\ \Delta^2 w_0(\mathbf{x}) - k_0^4 w_0(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in W_\varepsilon, \end{aligned} \quad (21)$$

$$w(\mathbf{x}) = w^{\text{sc}}(\mathbf{x}) + w^{\text{in}}(\mathbf{x}),$$

де $w(\mathbf{x})$ та $w^{\text{sc}}(\mathbf{x})$ – повне та розсіяне неоднорідністю поля згинних хвиль
у пластині; $w^{\text{in}}(\mathbf{x})$ – прогин однорідної пластини, що характеризує при-
кладене навантаження; $w_0(\mathbf{x})$ – прогин включення; $k = \sqrt[4]{\rho h \omega^2 / D}$ та $k_0 =$
 $= \sqrt[4]{\rho_0 h \omega^2 / D_0}$ – хвильові числа згинних хвиль пластини та включення; ω –
кругова частота коливань.

Умови механічного контакту пластини та неоднорідності, згідно з мо-
деллю Кірхгофа, подамо у вигляді

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &= w_0(\mathbf{x}), & \gamma(\mathbf{x}) &= \gamma_0(\mathbf{x}), \\ M(\mathbf{x}) &= M_0(\mathbf{x}), & V(\mathbf{x}) &= V_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial W_\varepsilon, \end{aligned} \quad (22)$$

де γ , M , V та γ_0 , M_0 , V_0 – кути повороту нормального елемента, згинні моменти та узагальнені перерізувальні сили у пластині та включенні відповідно. Крім цього, виконується умова випромінювання на безмежності

$$w^{\text{sc}}(r, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)} f(\theta) + o(1/\sqrt{r}), \quad r \rightarrow \infty,$$

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (23)$$

де $f(\theta)$ – комплексна амплітуда розсіяння згинних хвиль; (r, θ) – полярні координати.

Прогини у матриці та включенні подамо у вигляді асимптотичних розвинень

$$w^{\text{sc}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j^{\text{sc}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus W_\varepsilon, \quad (24)$$

$$w_0(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_{0j}(x_1, \bar{x}_2), \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon, \quad x_2 = \varepsilon \bar{x}_2, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (25)$$

Підставимо подання (24), (25) у рівняння (21) та умови контакту (22), попередньо виконавши заміну змінної $x_2 = \varepsilon \bar{x}_2$ в області включення, і прирівняємо вирази з однаковими степенями ε . З урахуванням співвідношення (20) отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів асимптотичних розкладів (24), (25). З точністю до головних членів маємо

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = hD \left[(vD_0^{-1} - v_0D^{-1}) \frac{\partial^2 w^{\text{in}}}{\partial x_1^2} + (D_0^{-1} - D^{-1}) \frac{\partial^2 w^{\text{in}}}{\partial x_2^2} \right],$$

$$\Phi_3 = hDd_1 \frac{\partial^3 w^{\text{in}}}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \quad \Phi_4 = hD \left(d_2 w^{\text{in}} + d_3 \frac{\partial^4 w^{\text{in}}}{\partial x_1^4} + d_4 \frac{\partial^4 w^{\text{in}}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right),$$

$$|x_1| < a, \quad x_2 = 0, \quad (26)$$

де

$$d_1 = x_1(1 - v_0) + v - 1, \quad d_2 = k^4 - x_1 k_0^4,$$

$$d_3 = x_1(1 - v_0^2) + vv_0 - 1, \quad d_4 = v_0 - v, \quad x_1 = D_0/D,$$

$$\Phi_1 = w(x_1, +0) - w(x_1, -0), \quad \Phi_2 = \gamma(x_1, +0) - \gamma(x_1, -0),$$

$$\Phi_3 = M(x_1, +0) - M(x_1, -0), \quad \Phi_4 = V(x_1, +0) - V(x_1, -0).$$

Узагальнені (ефективні) умови контакту (26) асимптотично точно моделюють реальні умови контакту (22) та істотно спрощують розв'язання поставленої задачі (21)–(23).

3. Метод нульового поля. Для аналізу процесів хвилеутворення у композитних структурах з використанням запропонованих вище граничних умов, що асимптотично точно моделюють динамічну поведінку тонкого включення у матриці, необхідно мати також ефективний аналітико-числовий метод дослідження хвильових полів. У рамках запропонованого у статті єдиного підходу розв'язування динамічних задач таким методом є метод нульового поля (метод T -матриць). Базуючись на загальних положеннях методу [82–84], отримано його розвиток щодо стаціонарних і нестаціонарних задач розсіяння пружних хвиль на тонкостінних криволінійних включеннях змінної товщини, коли пружна система перебуває в умовах плоскої деформації або поздовжнього зсуву, а також задач розсіяння згинних хвиль

[24, 25, 37, 39, 41, 75–78]. Розглядалися випадки ідеального механічного контакту включення і матриці, випадок односторонньо жорстко підкріпленого включення. Суть запропонованого числово-аналітичного алгоритму пояснимо на прикладі стаціонарної задачі поздовжнього зсуву та включення низької жорсткості (для рівняння Гельмгольца за умови (10)). Загальна її схема зображена на рис. 4. Припускається, що на тонкостінну неоднорідність, що знаходиться в необмеженому середовищі, набігає під кутом θ_{in} плоска хвиля $u^{in}(\mathbf{x})$. Нехай W_1 – доповнення серединної лінії включення W_0 до замкнутої лінії W . Область Ω_1 розміщена зовні W , а область Ω_2 обмежена нею. Граничні значення шуканих функцій і їхніх нормальних похідних на W задовольняють співвідношення

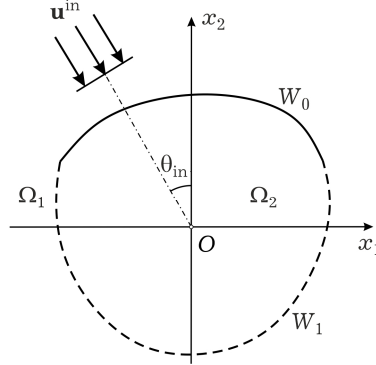


Рис. 4

$$\int_W \left[u^1(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} F_{\sigma m}(\mathbf{x}) - \frac{\partial u^1}{\partial n} F_{\sigma m}(\mathbf{x}) \right] dW = 0,$$

$$\int_W \left[u^2(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \operatorname{Re} F_{\sigma m}(\mathbf{x}) - \frac{\partial u^2}{\partial n} \operatorname{Re} F_{\sigma m}(\mathbf{x}) \right] dW = 0,$$

$$F_{\sigma m}(\mathbf{x}) = \sqrt{\epsilon_m} H_m^{(1)}(k_2 r) C_{\sigma m}(\theta), \quad m = 0, 1, \dots, \infty, \quad \sigma = 1, 2,$$

$$C_{\sigma m}(\theta) = \begin{cases} \cos m\theta, & \sigma = 1, \\ \sin m\theta, & \sigma = 2, \end{cases} \quad (27)$$

де u^ℓ , $\ell = 1, 2$, – значення функцій u^{sc} в областях Ω_ℓ . Подамо шукані функції у вигляді розкладів

$$\frac{1}{a} u^1(\theta) = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} x_{\sigma m}^1 C_{\sigma m}(\theta), \quad \theta \in W,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g(\theta)} [u^1(\theta) - u^2(\theta)], & \quad \theta \in W_0 \\ \frac{\partial u^1(\theta)}{\partial n}, & \quad \theta \in W_1 \end{aligned} \right\} = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} x_{\sigma m}^2 C_{\sigma m}(\theta). \quad (28)$$

Вибір форми подань продиктований структурою граничних умов (10). Враховуючи розклади (28), умови неперервності зміщень і напружень на W_1 , а також співвідношення (10), із (27) отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь нескінченного порядку для визначення коефіцієнтів $x_{\sigma m}^\ell$, яку розв'язуємо методом редукції.

Такий підхід є ефективним при визначенні хвильових полів у дальній зоні, що важливо для задач неруйнівного контролю, його переваги незаперечні з огляду на простіші математичні викладки і значно більшу швидкість розрахунків значень досліджуваних хвильових параметрів порівняно з іншими методами. Метод нульового поля розвинуто також стосовно знаходження дифракційних полів поблизу тонкого розсіювача.

За допомогою запропонованого вище єдиного підходу до розв'язання динамічних задач та із залученням дисперсійного співвідношення Фолді [40, 78] розроблено метод визначення усереднених швидкостей пружних хвиль і коефіцієнтів їх затухання у матричному композиті з випадково або впорядковано сумісно розміщеними ансамблями пружних наповнювачів неканонічної форми [20, 42, 43, 61, 79, 81].

4. Дистанційне визначення фізико-механічних параметрів і форми тонких плоских включень слабкої контрастності. У статті [23], на прикладі задачі антиплаского зсуву, запропоновано методу знаходження модуля зсуву, густини та геометричних параметрів тонкостінних пружних дефектів, що знаходяться в пружній матриці. Зондувальними хвилями є пружні SH -хвилі, а шукані параметри визначаються за амплітудою розсіяння цих хвиль у зоні Фраунгофера. Подібні обернені задачі розсіяння пружних хвиль на тріщинах, тріщиноподібних включеннях і включеннях великої жорсткості розглядалися раніше в [70]. Тут розглядаємо випадок неконтрастної неоднорідності, тобто припускаємо, що жорсткість включення незначно відмінна від жорсткості матриці порівняно з малим параметром ε , який характеризує відносну товщину включення.

Нехай в однорідному пружному середовищі з модулем зсуву μ і густиною ρ в умовах ідеального контакту знаходиться тонкостінне пружне включення з параметрами μ_0 та ρ_0 , що займає область $W_\varepsilon = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1 \leq a, x_2 \leq \varepsilon g(x_1) = h(x_1)\}$ (рис. 5). Тут (x_1, x_2) – декартові координати, $2a$ – довжина включення, $h(x_1)$ – товщина включення, $g(x_1)$ – достатньо гладка додатно визначена функція. Припускаємо, що

$$\varepsilon \leq \mu/\mu_0 \leq 1/\varepsilon,$$

тобто розглядаємо випадок неконтрастної неоднорідності.

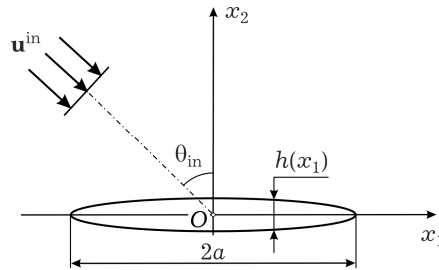


Рис. 5

За умов антипласкої задачі розсіяння гармонічної хвилі зміщення у падаючій на дефект хвилі подаються у вигляді

$$u^{\text{in}}(\mathbf{x}) = A_0 \exp[-ik_2 ar \cos(\theta - \theta_{\text{in}})],$$

$$x_1 = -ra \sin \theta, \quad x_2 = ra \cos \theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi,$$

де (r, θ) – безрозмірні полярні координати.

Використовуючи формулу Бетті, з урахуванням співвідношень (9) отримуємо інтегральне подання для розсіяного поля $u^{\text{sc}}(\mathbf{x})$. Зокрема, у зоні Фраунгофера маємо

$$u^{sc}(r, \theta, \omega) \approx A_0 L f^*(\theta, \omega_*), \quad r \rightarrow \infty,$$

$$L = \varepsilon \omega_*^2 \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \omega_* r}} \exp[i(\omega_* r - \pi/4)],$$

$$f^*(\theta, \omega_*) = \left[(\mu - \mu_0) \left(\frac{1}{\mu_0} \cos \theta \cos \theta_{in} - \frac{1}{\mu} \sin \theta \sin \theta_{in} \right) + \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right] J(\theta, \omega_*),$$

$$J(\theta, \omega_*) = \frac{1}{a} \int_{-1}^1 g(ax) \exp[i\omega_* x (\sin \theta + \sin \theta_{in})] dx, \quad \omega_* = k_2 a. \quad (29)$$

На рис. 6а наведено частотні залежності модуля амплітуди розсіяння $p = |f^*|$ при $\theta_{in} = 0^\circ$ та $\theta = 90^\circ$. Приймаємо, що в дюралюмінієвій матриці з параметрами $\mu = 2.7 \cdot 10^4$ МПа, $\rho = 2700$ кг/м³ знаходяться свинцеве ($\mu_0 = 0.7 \cdot 10^4$ МПа, $\rho_0 = 11400$ кг/м³) або сталеве ($\mu_0 = 8.1 \cdot 10^4$ МПа, $\rho_0 = 7800$ кг/м³) включення, яким відповідають суцільна та штрих-пунктирна лінії. При цьому у (29) вважаємо, що форма включення задається співвідношенням

$$g(ax) = a(1 - x^2)^v \quad (30)$$

зі значенням $v = 0$.

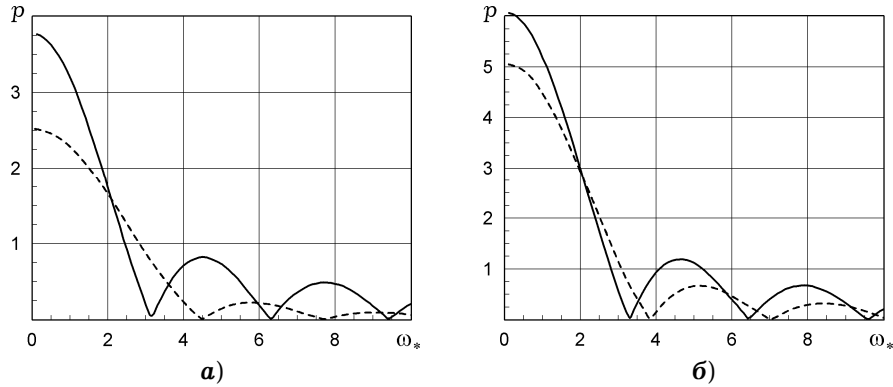


Рис. 6

На рис. 6б зображено частотні характеристики цієї самої величини для задачі розсіяння *SH*-хвилі сталевим включенням в дюралюмінієвій матриці при різних формах включення. Суцільна крива відповідає значенню $v = 0.1$ у співвідношенні (30), а штрихова – $v = 0.5$.

Аналіз наведених вище результатів показує, що період ω_p чергування максимумів і мінімумів у спектрі розсіяного поля не залежить ні від фізико-механічних характеристик матеріалів матриці та розсіювача, ні від форми включення і становить приблизно

$$\omega_p \approx \frac{\pi}{\sin \theta_{in} + \sin \theta}. \quad (31)$$

Цей факт дозволяє побудувати алгоритм розв'язку поставленої оберненої задачі таким чином.

Зафіксуємо довільно систему координат. Зондуємо дефект у моностаціональному режимі (кут падіння співпадає з кутом спостереження), за різних θ_{in} визначимо кут, при якому модуль амплітуди розсіяного поля набуває постійного значення (тобто $\omega_p \rightarrow \infty$) на скінченному інтервалі хвильових чисел зондування. Згідно зі співвідношенням (31) цей кут буде відповідати напрямковій нормальній хвилі на дефект.

Знаючи орієнтацію включення, зі співвідношення (31) можемо визначити його довжину a . Заміряючи відстань Δk , що відповідає періоду ω_p , знаходимо

$$a \approx \frac{\pi}{(\sin \theta_{in} + \sin \theta)\Delta k}, \quad \theta_{in} \neq -\theta.$$

Наступний крок у розв'язанні оберненої задачі полягає у визначенні параметрів μ_0 і ρ_0 . Вважаємо, що товщина включення є сталою ($v = 0$), а кут падіння зондувальної хвилі $\theta_{in} = 0$. Заміряючи значення амплітуди розсіяння f^* при кутах $\theta = 0^\circ$ ($f^* = f_+^*$) та $\theta = 180^\circ$ ($f^* = f_-^*$), на основі співвідношення (5) отримуємо

$$\mu_0 = 4\mu / (4 + f_+^* - f_-^*), \quad \rho_0 = \rho(4 - f_+^* - f_-^*) / 4.$$

Аналогічні алгоритми ідентифікації неконтрастних розсіювачів отримано також у випадку плоскої деформації і кругових в плані включень [22].

Роботу виконано за підтримки бюджетної програми України «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

1. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. – Москва: Физматлит, 1993. – 224 с.
2. Ван-Дайк М. Методы возмущения в механике жидкости. – Москва: Мир, 1967. – 310 с.
3. Ворович И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // Материалы I Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин (Тбилиси, 1974). – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – С. 50–149.
4. Грилицький Д. В., Сулим Г. Т. Развитие теории тонкостенных включений у Львівському державному університеті // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1987. – Вип. 27. – С. 3–9.
5. Емец В. Ф., Кит Г. С., Кунец Я. И. Асимптотическое поведение решения задачи рассеяния упругой волны тонкостенным инородным включением // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 3. – С. 55–64.
6. Зино Е. И., Тропп Э. А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 224 с.
7. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. – Москва: Наука, 1989. – 336 с.
8. Канаун С. К., Левин В. М. Метод эффективного поля в механике композитных материалов. – Петрозаводск: Изд-во Петрозаводск. гос. ун-та, 1993. – 600 с.
9. Кит Г. С., Кривцул М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 278 с.
10. Кит Г. С., Кунец Я. И., Михаськив В. В. Взаимодействие стационарной волны с тонким дискообразным включением малой жесткости в упругом теле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 5. – С. 82–89.
11. Кит Г. С., Побережный О. В. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1992. – 216 с.
12. Кит Г. С., Подстригач Я. С. Определение стационарного температурного поля и напряжений в окрестности щели, обладающей термосопротивлением // Физ.-хим. механика материалов. – 1966. – 2, № 3. – С. 247–252.
The same: Kit G. S., Podstrigach Ya. S. Determination of the stationary temperature field and stresses in the vicinity of a slit possessing heat resistance // Sov. Mater. Sci. – 1967. – 2, No. 3. – P. 177–181.
– <https://doi.org/10.1007/BF00714662>.

13. *Kit G. S., Hai M. V.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 284 с.
14. *Kit G. S., Emets V. F., Kunets Y. I.* Модель пружно-динамічної взаємодії тонкостінного включення з матрицею в умовах антиплоского зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – **41**, № 1. – С. 54–61.
Te same: *Kit G. S., Emets V. F., Kunets Y. I.* A model of the elastodynamic interaction of a thin-walled inclusion with a matrix under antiplanar shear // *J. Math. Sci.* – 1999. – **97**, No. 1. – P. 3810–3816.
– <https://doi.org/10.1007/BF02364919>.
15. *Kit G. S., Kunets Y. I., Mikhaskiv V. V.* Динамічна концентрація напружень в необмеженому тілі з тонким пружним дископодібним включенням // *Доп. НАН України.* – 2003. – № 8. – С. 41–44.
16. *Kit G. S., Kunets Y. I., Mishchenko V. O.* Взаємодія імпульсів *SH*-хвиль з тонкими пружними м'якими неоднорідностями // *Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А.* – 2002. – Вип. 1. – С. 109–113.
17. *Kunets Y. I.* Осесимметричное кручение упругого пространства с тонким упругим включением // *Прикл. математика и механика.* – 1988. – **49**, № 2. – С. 638–645.
18. *Kunets Y. I.* Динамічні задачі теорії пружності для тіл з тонкими пружними включеннями: Дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.02.04. Львів, 2006. – 334 с.
19. *Kunets Y. I.* Пружна рівновага тіла з тонким гострокінцевим м'яким включенням в умовах поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2004. – **47**, № 3. – С. 144–148.
20. *Kunets Y. I., Matus V. V.* Ефективні динамічні параметри матричного композиту з частково відшарованими волокнами неканонічної форми // *Акуст. вісн.* – 2012. – **15**, № 4. – С. 39–45.
21. *Kunets Y. I., Matus V. V.* Моделювання згинних коливань пластини Кірхгофа з тонкостінним пружним включенням малої контрастності // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2011. – **54**, № 4. – С. 106–112.
Te same: *Kunets Y. I., Matus V. V.* Modeling of flexural vibrations of a Kirchhoff plate with a thin-walled elastic inclusion of weak contrast // *J. Math. Sci.* – 2012. – **187**, No. 5. – P. 667–674.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-012-1091-x>.
22. *Kunets Y. I., Matus V. V., Grylytskiy M. D.* Дистанційне визначення механічних параметрів тонких плоских включень низької контрастності // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2011. – **47**, № 5. – С. 118–123.
Te same: *Kunets Y. I., Matus V. V., Hrylyts'kyi M. D.* Remote determination of mechanical parameters of thin flat inclusions of low contrast // *Mater. Sci.* – 2012. – **47**, No. 5. – P. 703–709. – <https://doi.org/10.1007/s11003-012-9447-4>.
23. *Kunets Y. I., Matus V. V., Mishchenko V. O.* Дистанційне визначення фізико-механічних параметрів тонкостінних дефектів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2000. – **36**, № 5. – С. 117–118.
Te same: *Kunets Y. I., Matus V. V., Mishchenko V. O.* Remote evaluation of physicomaterial parameters of thin-walled defects // *Mater. Sci.* – 2000. – **36**, No. 5. – P. 776–779. – <https://doi.org/10.1023/A:1011380429273>.
24. *Kunets Y. I., Matus V. V., Mishchenko V. O.* Розсіяння згинних хвиль отвором неканонічної форми у пластині Тимошенка – Міндліна // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2016. – Вип. 14. – С. 53–57.
25. *Kunets Y. I., Matus V. V., Mishchenko V. O., Porokhovskiy V. V.* Розсіяння *SH*-хвиль пружним волокном за наявності тонкого гострокінцевого міжфазного включення малої жорсткості // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2015. – Вип. 13. – С. 82–87.
26. *Kunets Y. I., Matus V. V., Mishchenko V. O., Raboch P. V.* Розсіяння імпульсів *SH*-хвиль тонким прямолінійним п'єзоелектричним включенням малої жорсткості у пружному середовищі // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2013. – Вип. 11. – С. 129–134.
27. *Kunets Y. I., Matus V. V., Porokhovskiy V. V.* Динамічна концентрація напружень в околі заглибленого тонкого прямолінійного включення низької жорсткості в умовах антиплоскої деформації // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – **50**, № 1. – С. 136–139.
28. *Kunets Y. I., Matus V. V., Porokhovskiy V. V.* Дослідження ехо-сигналів *SH*-хвиль від тонкостінних пружних жорстко підкріплених включень // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2004. – **47**, № 1. – С. 115–119.

29. *Кунець Я. І., Матус В. В., Пороховський В. В.* Метод нульового поля у задачі розсіяння на тонкостінному пружному криволінійному включенні // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2000. – **43**, № 2. – С. 163–170.
30. *Кунець Я. І., Матус В. В., Пороховський В. В.* Розсіяння імпульсів пружних *SH*-хвиль на тонкостінному пружному криволінійному включенні // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2000. – **43**, № 4. – С. 150–154.
31. *Кунець Я. І., Рабош Р. В.* Поздовжній зсув пружного середовища з тонким прямолінійним гострокінцевим п'єзоелектричним включенням низької жорсткості // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – **53**, № 3. – С. 141–147.
Te same: *Kunets' Ya. I., Rabosh R. V.* Longitudinal shear of an elastic medium with a thin rectilinear sharp-pointed piezoelectric inclusion of low rigidity // *J. Math. Sci.* – 2012. – **180**, No. 2. – P. 153–160.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0637-7>.
32. *Кунець Я., Матус В.* Розсіяння *SH*-хвиль пружним волокном неканонічного поперечного перерізу за наявності тонкого міжфазного прошарку // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2014. – Вип. 20. – С. 132–139.
33. *Кунець Я., Матус В., Пороховський В.* Коливання необмеженого середовища із пружним волокном і тонкою міжфазною неоднорідністю малої жорсткості // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2015. – Вип. 22. – С. 77–85.
34. *Максимів Ю. І., Пороховський Ю. В., Рабош Р. В., Міщенко В. О., Кунець Я. І.* Динамічна взаємодія тонкого металічного включення з п'єзокерамічною матрицею // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2019. – Вип. 17. – С. 134–138.
35. *Максимів Ю. І., Рабош Р. В., Кунець Я. І., Пороховський В. В.* Взаємодія *SH*-хвиль з тонким п'єзоелектричним неконтрастним включенням у пружному півпросторі // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2017. – Вип. 15. – С. 97–101.
36. *Мартиняк Р. М., Середницька Х. І.* Контактні задачі термпружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.
37. *Матус В. В.* Матриця розсіяння для хвиль згину у тонкій пластині // *Доп. НАН України.* – 2009. – № 6. – С. 73–78.
38. *Матус В. В.* Метод нульового поля в задачах дифракції пружних хвиль на волокнах з тонкими міжфазними неоднорідностями // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2017. – Вип. 15. – С. 164–170.
39. *Матус В. В.* Модифікований метод нульового поля в задачі розсіяння *SH*-хвиль частково відшарованим пружним включенням з кусково-гладким контуром // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2009. – **52**, № 4. – С. 145–149.
Te same: *Matus V. V.* Modified null field method in a problem of scattering of *SH*-waves by a partially debonded elastic inclusion with a piecewise smooth contour // *J. Math. Sci.* – 2011. – **174**, No. 3. – P. 303–308.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0299-5>.
40. *Матус В. В.* Хвильові процеси у пружних композитних тілах із міжфазними та розподіленими тонкими неоднорідностями: Дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.02.04. – Львів, 2019. – 327 с.
41. *Матус В. В., Кунець Я. І.* Розсіяння згинних хвиль наскрізним жорстким включенням у півобмеженій тонкій пластині // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2011. – Вип. 9. – С. 130–134.
42. *Михаськів В., Кунець Я., Матус В.* Ефективна швидкість поздовжньої хвилі у пружному середовищі з дисковими включеннями слабкої контрастності // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2013. – Вип. 17. – С. 131–139.
43. *Михаськів В. В., Кунець Я. І., Матус В. В., Бурчак О. В., Балалаєв О. К.* Параметризація поширення пружних хвиль у середовищі з ансамблями дискових включень // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2018. – **54**, № 1. – С. 126–132.
Te same: *Mykhas'kiv V. V., Kunets' Ya. I., Matus V. V., Burchak O. V., Balalaev O. K.* Parametrization of the propagation of elastic waves in a medium with ensembles of disc-shaped inclusions // *Mater. Sci.* – 2018. – **54**, No. 1. – P. 130–137. – <https://doi.org/10.1007/s11003-018-0167-2>.
44. *Михаськів В. В., Кунець Я. І., Міщенко В. О.* Напруження у тривимірному тілі з тонким податливим включенням за фронтом імпульсних хвиль // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2003. – **39**, № 3. – С. 63–68.
Te same: *Mykhas'kiv V. V., Kunets' Ya. I., Mishchenko V. O.* Stresses in a three-dimensional body with thin compliant inclusion behind the front of pulsed waves // *Mater. Sci.* – 2003. – **39**, No. 3. – P. 377–384.
– <https://doi.org/10.1023/B:MASC.0000010743.83076.50>.

45. Мовчан А. Б., Назаров С. А. Напряженно-деформированное состояние плоской области с тонким упругим включением конечных размеров // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 1. – С. 75–83.
46. Назаров С. А. Введение в асимптотические методы теории упругости. – Ленинград: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1983. – 117 с.
47. Новокшенов В. Ю. Сингулярное интегральное уравнение с малым параметром на конечном отрезке // Мат. сб. – 1978. – **105**, № 4. – С. 543–573.
Te same: Novokshenov V. J. A singular integral equation with small parameter on a finite interval // Math. USSR-Sbornik. – 1978. – **34**, No. 4. – P. 475–502.
– <https://doi.org/10.1070/SM1978v034n04ABEH001222>.
48. Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – Киев: Наук. думка, 1986. – 216 с.
49. Пастернак Я. М. Математичні моделі та граничноелементний метод функцій стрибка розв'язування задач термомагніто-електропружності структурно неоднорідних тіл: Дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.02.04. – Львів, 2015. – 339 с.
50. Пастернак Я., Сулим Г., Пастернак Р. Концентрація динамічних напружень біля тонких пружних включень за умов антиплоскої деформації // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2013. – Вип. 18. – С. 157–164.
51. Підстригач Я. С. Умови стрибка напружень і переміщень на тонкостінному пружному включенні в суцільному середовищі // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 12. – С. 29–31.
52. Підстригач Я. С. Умови теплового контакту твердих тіл // Доп. АН УРСР. – 1963. – № 7. – С. 872–874.
53. Поддубняк А. П. Интегральные уравнения задачи кручения упругого тела с тонким дискообразным включением // Прикл. математика и механика. – 1986. – **50**, № 4. – С. 644–650.
Te same: Poddubnyak A. P. Integral equations of the problem of the torsion of an elastic body with a thin disc-like inclusion // Appl. Mech. Math. – 1986. – **50**, No. 4. – P. 492–497. – [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(86\)90014-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(86)90014-6).
54. Подстригач Я. С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя // Инж.-физ. журн. – 1963. – **6**, № 10. – С. 129–136.
55. Подстригач Я. С., Кит Г. С. Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вип. 7. – С. 194–201.
56. Попов В. Г. Метод разрывных решений в плоских динамических задачах теории упругости: Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Одесса, 1995. – 381 с.
57. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 344 с.
58. Пороховський В. В., Кунець Я. І. Дифракція імпульсів пружних хвиль тонкими слабкими неоднорідностями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 2. – С. 168–174.
59. Пороховський В., Кунець Я., Міщенко В., Желавська І. Напружено-деформований стан біля гострої вершини жорстко підкріпленого м'якого включення // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 142–145.
60. Рабош Р. В. Динамічна взаємодія пружного середовища з тонкостінним криволінійним п'єзоелектричним включенням при поздовжніх коливаннях композита // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 1. – С. 101–106.
Te same: Rabosh R. V. Dynamic interaction of an elastic medium with a thin-walled curvilinear piezoelectric inclusion under longitudinal vibrations of a composite // J. Math. Sci. – 2010. – **168**, No. 5. – P. 625–632.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-010-0013-z>.
61. Рабош Р. В., Максимів Ю. І., Пороховський В. В., Міщенко В. О., Кунець Я. І. Математична модель поширення SH -хвиль у композитах з розподіленими тонкими п'єзоелектричними включеннями // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2018. – Вип. 16. – С. 107–111.
– <https://doi.org/10.15407/apmm2018.16.107-111>.
62. Санчес-Паленсія Э. Неоднородные среды и теория колебаний. – Москва: Мир, 1984. – 472 с.
63. Силованюк В. П. Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка, 2000. – 298 с.
64. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавн. центр НТШ,

2007. – 716 с.
65. Сулим Г. Т., Кунець Я. І., Рабош Р. В. Асимптотичний аналіз динамічної взаємодії тонкого прямолінійного п'єзоелектричного включення з пружним середовищем за позовжнього зсуву // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 137–141.
 66. Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З. Умови контактної взаємодії тіл (Огляд) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 110–125.
 67. Фридрихс К. О. Асимптотические явления в математической физике // Математика. – 1957. – **1**, № 2. – С. 79–94.
 68. Emets V. F., Kit H. S., Kunets Ya. I. Interaction of time-harmonic SH waves with a crack like inclusion: edge region analysis // Int. J. Fract. – 1998. – **94**, No 1. – P. 51–62. – <https://doi.org/10.1023/A:1007541214562>.
 69. Emets V. F., Kunets Ya. I., Matus V. V. Scattering of SH waves by an elastic thin-walled rigidly supported inclusion // Arch. Appl. Mech. – 2004. – **73**, No. 11–12. – P. 769–780. – <https://doi.org/10.1007/s00419-004-0323-z>.
 70. Emets V. F., Rogowski J. Mathematical-numerical modelling of ultrasonic scattering data from a closed obstacles and inverse analysis. – Warsaw: Acad. Publ. House EXIT, 2013. – 271 p.
 71. Fraenkel L. E. On the method of matched asymptotic expansions. Part I: A matching principle // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1969. – **65**, No. 1. – P. 209–231. – <https://doi.org/10.1017/S0305004100044212>.
 72. Kanaun S. K., Levin V. M. Self-consistent methods for composites. – Vol. 2: Wave propagation in heterogeneous materials. – Heidelberg: Springer, 2008. – xiv+302 p.
 73. Kit H. S., Kunets Ya. I., Yemets V. F. Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Int. J. Eng. Sci. – 1999. – **37**, No. 3. – P. 331–345. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(98\)00069-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(98)00069-X).
 74. Kunets Y., Kushnir R., Matus V., Trofymchuk O. Interaction of antiplane shear waves with elastic fiber in the presence of a thin interphase piezoceramic layer // In: Proc. of the 1st Int. Conf. on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics (edited by E. Gdoutos). – Springer, 2019. – P. 401–403.
 75. Kunets Y. I., Matus V. V., Mykhas'kiv V. V., Boström A., Zhang Ch. Scattering of a SH-wave by an elastic fiber of nonclassical cross section with an interface crack. Mech. Compos. Mater. – 2008. – **44**, No. 2. – P. 165–172. – <https://doi.org/10.1007/s11029-008-9002-4>.
 76. Kushnir R., Kunets Y., Matus V., Trofymchuk O. Plane scattering problem for an inclusion of non-classical shape with a thin interphase layer // In: Proc. of the 2nd Int. Conf. on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics (edited by E. Gdoutos). – Springer, 2019. – P. 209–214.
 77. Matus V. V., Emets V. F. T-matrix method formulation applied to the study of flexural waves scattering from a through obstacle in a plate // J. Sound Vib. – 2010. – **329**, No. 14. – P. 2843–2850. – <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.01.004>.
 78. Matus V., Kunets Y., Mykhas'kiv V., Boström A., Zhang Ch. Wave propagation in 2D elastic composites with partially debonded fibres by the null field approach // Waves in Random and Complex Media. – 2009. – **19**, No. 4. – P. 654–669. – <https://doi.org/10.1080/17455030903267087>.
 79. Mykhas'kiv V., Kunets Y., Matus V., Khay O. Elastic wave dispersion and attenuation caused by multiple types of disc-shaped inclusions // Int. J. Struct. Integr. – 2018. – **9**, No. 2. – P. 219–232. – <https://doi.org/10.1108/IJSI-06-2017-0040>.
 80. Pasternak Ia. Doubly periodic arrays of cracks and thin inhomogeneities in an infinite magnetoelastic medium // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2012. – **36**, No. 5. – P. 799–811. – <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2011.12.004>.
 81. Rabosh R. V., Kunets Ya. I., Maksymiv Yu. I. Effective dynamical parameters of piezoelectric medium with randomly distributed piezoelectric inclusions // DIPED-2018: Proc. 23rd Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory. – Tbilisi, 2018. – P. 153–156.
 82. Varadan V. V., Lakhtakia A., Varadan V. K. Comments on recent criticism of the T-matrix method // J. Acoust. Soc. Am. – 1988. – **84**, No. 6. – P. 2280–2284. – <https://doi.org/10.1121/1.397025>.
 83. Waterman P. C. Matrix theory of elastic wave scattering // J. Acoust. Soc. Am. – 1976. – **60**, No. 3. – P. 567–580. – <https://doi.org/10.1121/1.381130>.
 84. Waterman P. C. New formulation of acoustic scattering // J. Acoust. Soc. Am. – 1968. – **45**, No. 6. – P. 1417–1429. – <https://doi.org/10.1121/1.1911619>.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ТОНКИМИ УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Предложен единый подход для исследования процессов динамического взаимодействия тонких упругих неоднородностей с окружающей упругой средой. Он базируется на методах теории сингулярных возмущений при получении математических моделей контакта составляющих упругой системы с последующим использованием метода нулевого поля для изучения волновых полей в композитах. Подход эффективен при исследовании явления взаимодействия упругих волн с локальными или множественными тонкими упругими неоднородностями, а также при решении соответствующих обратных задач.

Ключевые слова: тонкие упругие включения, композиты с наполнителями неканонической формы, теория сингулярных возмущений, метод нулевого поля, динамические нагрузки.

ASYMPTOTIC APPROACH IN DYNAMIC PROBLEMS OF THE ELASTIC THEORY FOR BODIES WITH THIN ELASTIC INCLUSIONS

The unified approach to the study of the processes of the dynamic interaction of thin elastic inhomogeneities with the elastic environment is proposed. It is based on the methods of the theory of singular perturbations in obtaining mathematical models of the contact of the components of an elastic system with the subsequent use of the null field method for the study of wave fields in composites. The approach is effective in studying the phenomenon of the interaction of elastic waves with local or multiple thin elastic inhomogeneities, as well as in solving the corresponding inverse problems.

Key words: thin elastic inclusions, composites with fillers of non-canonical form, null field method, dynamic loads.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
05.02.20