УДК 513.88

О. Г. Сторож[✉]

МАКСИМАЛЬНО АКРЕТИВНІ ТА НЕВІД'ЄМНІ РОЗШИРЕННЯ НЕВІД'ЄМНОГО ЛІНІЙНОГО ВІДНОШЕННЯ

У термінах просторів граничних значень сформульовано та доведено критерії максимальної θ-акретивності та максимальної невід'ємності власного розширення замкненого невід'ємного лінійного відношення у гільбертовому просторі. У випадку диференціальних операторів це приводить безпосередньо до крайових умов.

Ключові слова: *гільбертів простір, лінійне відношення, розширення, акретивний, невід'ємний.*

Вступ та основні позначення. Протягом останніх десятиліть увагу багатьох математиків привертає теорія лінійних відношень (багатозначних відображень) у гільбертовому просторі. Для кожного такого відношення T існують спряжене T^* та обернене T^{-1}. Ця обставина виявилася дуже корисною при дослідженні, зокрема, різних класів розширень нещільно визначених операторів.

Зазначимо, що теорія лінійних відношень у гільбертовому просторі започаткована R. Arens-ом [10]. Різні аспекти цієї теорії (маємо на увазі, перш за все, теорію розширень згаданих відношень) знайшли свій подальший розвиток у працях багатьох математиків (див., наприклад, [11, 13] та цитовану там літературу).

Ця стаття є безпосереднім продовженням праць автора [14, 15]. Метою статті є встановлення умов максимальної невід'ємності та максимальної акретивності власного розширення замкненого лінійного невід'ємного відношення у гільбертовому просторі у термінах «абстрактних крайових умов».

Надалі під H розуміємо фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot\,|\,\cdot)$ і відповідною нормою $\|\cdot\|$. Будь-який (замкнений) лінійний многовид в $H^2 \overset{\text{def}}{=} H \oplus H$ називають (замкненим) лінійним відношенням в H, а лінійний оператор ототожнюють з його графіком. Для будь-якого лінійного відношення (зокрема, оператора) $T \subset H^2$ існує спряжене (замкнене лінійне) відношення $T^* \subset H^2$, яке визначається так:

$$T^* = JT^{\perp} \; (= (JT)^{\perp}),$$

де $\forall (y, y') \in H^2 \;\; J(y, y') = (-iy', iy)$, а «$\perp$» – символ ортогонального доповнення в H^2.

Використовуємо такі позначення:

$D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ – відповідно область визначення, область значень і многовид нулів відношення (оператора) T:

$$D(T) = \{y \in H \mid (\exists y' \in H) : (y, y') \in T\},$$

$$R(T) = \{y' \in H \mid (\exists y \in H) : (y, y') \in T\},$$

$$\ker T = \{y \in H : (y, 0) \in T\};$$

якщо $\lambda \in \mathbb{C}$, то

$$\lambda T = \{(y, \lambda y') : (y, y') \in T\},$$

✉ storozh@ukr.net

$$T-\lambda=\{(y,y'-\lambda y):(y,y')\in T\}$$

(таким чином, $\ker(T-\lambda)=\{y\in H:(y,0)\in T-\lambda\}\equiv\{y\in H:(y,\lambda y)\in T\}$),

$$\widehat{\ker}(T-\lambda)=\{(y,\lambda y):y\in\ker(T-\lambda)\};$$

$$T^{-1}=\{(y',y)\in H^2:(y,y')\in T\};$$

якщо X, Y – гільбертові простори, то $(\cdot|\cdot)_X$ – символ скалярного добутку на X, а $\mathcal{B}(X,Y)$ – сукупність лінійних неперервних операторів $S:X\to Y$ таких, що $D(S)=X$;

$\mathcal{B}(X)=\mathcal{B}(X,X)$;

$\mathbb{I}_X$ – тотожне перетворення простору X;

$S\downarrow E$ – звуження відображення S на множину E;

SE – образ множини E при відображенні S;

$\dot{+}$, $\oplus$, Θ – відповідно символи прямої суми, ортогональної суми та ортогонального доповнення;

$\overline{E}$ – замикання множини E;

якщо $A_i:X\to Y_i$, $i=1,\ldots,n$, – лінійні оператори, то запис $A=A_1\oplus\ldots\oplus A_n$ означає, що для $\forall x\in X$ $Ax=(A_1x,\ldots,A_nx)$.

Нагадаємо, що лінійне відношення T в H називається невід'ємним (пишемо $T\geq 0$), якщо

$$\forall(y,y')\in T \qquad (y'\mid y)\geq 0,$$

додатно визначеним ($T\gg 0$), якщо, крім цього,

$$\inf T\overset{\text{def}}{=}\inf\{(y'\mid y):(y,y')\in T,\|y\|=1\}>0,$$

і самоспряженим, якщо $T=T^*$. Таке відношення називають θ-акретивним, $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, якщо

$$\forall\hat{y}=(y,y')\in T \qquad \arg(y'\mid y)\in\left[\theta-\frac{\pi}{2},\theta+\frac{\pi}{2}\right],$$

тобто

$$\forall\hat{y}\in T \qquad \arg(\pi_2\hat{y}\mid\pi_1\hat{y})\in\left[\theta-\frac{\pi}{2},\theta+\frac{\pi}{2}\right],$$

де π_1, π_2 – ортопроектори $H^2\to H\oplus\{0\}$ та $H^2\to\{0\}\oplus H$ відповідно. Крім цього, якщо T не має θ-акретивних розширень в H, то кажуть, що T є максимально θ-акретивним відношенням (порівняти з відповідними означеннями, запропонованими в [7]). У випадку, коли $\theta=0$ ($\theta=\frac{\pi}{2}$, $\theta=-\frac{\pi}{2}$), тоді θ-акретивне відношення називають акретивним (дисипативним, акумулятивним).

У цій статті роль вихідного об'єкта відіграє замкнене лінійне невід'ємне відношення $L_0\subset H^2$, а метою статті є опис його максимально невід'ємних і власних максимально акретивних розширень (розширення L_1 відношення L_0 називають власним, якщо $L_0\subset L_1=\overline{L}_1\subset L_0^*$). Відомо [12], що існують (невід'ємні) самоспряжені розширення L_F та L_K відношення L_0, які мають таку властивість:

самоспряжене розширення L_1 *відношення* L_0 *є невід'ємним тоді і тільки тоді, коли для будь-якого* $\varepsilon > 0$

$$\forall y \in H \qquad ((L_F + \varepsilon)^{-1} y \mid y) \le ((L_1 + \varepsilon)^{-1} y \mid y) \le ((L_K + \varepsilon)^{-1} y \mid y).$$

Для випадку щільно визначеного оператора L_0 цю властивість було доведено в [5]. Розширення L_F і L_K називають відповідно жорстким і м'яким розширеннями відношення L_0.

1. Попередні результати і постановка задачі. Далі скрізь $L \overset{\text{def}}{=} L_0^*$.

Означення 1. Нехай G − гільбертів простір, а $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{B}(L, G)$. Трійку (G, Γ_1, Γ_2) називають *простором граничних значень* (ПГЗ) відношення L_0, якщо

$$R(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = G \oplus G, \qquad \ker(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = L_0$$

і для довільних $\hat{y} = (y, y'), \hat{z} = (z, z') \in L$

$$(y' \mid z) - (y \mid z') = (\Gamma_1 \hat{y} \mid \Gamma_2 \hat{z})_G - (\Gamma_2 \hat{y} \mid \Gamma_1 \hat{z})_G.$$

Якщо, крім цього, $\ker \Gamma_1 = L_K$, $\ker \Gamma_2 = L_F$, то говоритимемо, що (G, Γ_1, Γ_2) − *жорсткий* ПГЗ відношення L_0.

Нижче скрізь припускаємо, що (G, Γ_1, Γ_2) − фіксований ПГЗ для L_0 такий, що $L_2 \overset{\text{def}}{=} \ker \Gamma_2 \ge 0$. Отже, для будь-якого $\lambda < \inf L_2$ коректно визначені такі оператори:

$$L_\lambda = (L_2 - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H), \qquad \hat{L}_\lambda = \begin{pmatrix} L_\lambda \\ \mathbb{I}_H + \lambda L_\lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(H, H^2),$$

$$Z_\lambda = (\Gamma_1 \hat{L}_\lambda)^* \in \mathcal{B}(G, H), \qquad \hat{Z}_\lambda = \begin{pmatrix} Z_\lambda \\ \lambda Z_\lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(G, H^2).$$

Означення 2. $\mathcal{B}(G)$-значну функцію

$$M(\lambda) = \Gamma_1 \hat{Z}_\lambda, \qquad \lambda < \inf L_2,$$

називають *функцією Вейля* відношення L_0, яка відповідає його ПГЗ (G, Γ_1, Γ_2).

Зауваження 1. Поняття ПГЗ було введене в [4] у припущенні, що L_0 є щільно визначеним симетричним оператором з однаковими дефектними числами. У [6] воно було поширене на випадок нещільно визначених операторів. Поняття функції Вейля, яка відповідає заданому ПГЗ, було запропоновано в [3] і знайшло свій подальший розвиток у працях багатьох математиків (див. [2] і цитовану там літературу). Неважко довести, що означення 2 є еквівалентним до відповідних означень зі згаданих праць.

Покладемо

$$U(\lambda) = (M(\lambda) - i)(M(\lambda) + i)^{-1}$$

і наведемо потрібні в подальшому деякі результати праці [15], які для зручності сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. *Існують унітарні оператори* $U_{-\infty}, U_0 \in \mathcal{B}(G)$, *визначені таким чином:*

$$U_{-\infty} = s - \lim_{\lambda \to -\infty} U(\lambda), \qquad U_0 = s - \lim_{\lambda \to -0} U(\lambda), \tag{1}$$

при цьому

$$L_F = \{\hat{y} \in L : (U_{-\infty} - \mathbb{I}_G)\Gamma_1\hat{y} + i(U_{-\infty} + \mathbb{I}_G)\Gamma_2\hat{y} = 0\}, \tag{2}$$

$$L_K = \{\hat{y} \in L : (U_0 - \mathbb{I}_G)\Gamma_1\hat{y} + i(U_0 + \mathbb{I}_G)\Gamma_2\hat{y} = 0\}, \tag{3}$$

де $U_{-\infty}$, U_0 *такі, як в* (1).

Наслідок 1. *Якщо* $L_2 \gg 0$, *то існує*

$$B \overset{\text{def}}{=} s - \lim_{\lambda \to -\infty} \left(M(\lambda) - M(0)\right)^{-1}, \tag{4}$$

причому $B \in \mathcal{B}(G)$ *і* $B \le 0$. *У цій ситуації простір* (G, γ_1, γ_2), *де*

$$\gamma_1\hat{y} = \Gamma_1\hat{y} - M(0)\Gamma_2\hat{y}, \qquad \hat{y} \in L, \tag{5}$$

$$\gamma_2\hat{y} = \Gamma_2\hat{y} - B\gamma_1\hat{y} \equiv -B\Gamma_1\hat{y} + (\mathbb{I}_G + BM(0))\Gamma_2\hat{y}, \qquad \hat{y} \in L, \tag{6}$$

а B *визначено згідно з* (4), *є жорстким ПГЗ відношення* L_0, *зокрема,*

$$L_F = \ker\gamma_2 \equiv \{\hat{y} \in L : \gamma_2\hat{y} = 0\}, \tag{7}$$

$$L_K = \ker\gamma_1 \equiv \{\hat{y} \in L : \gamma_1\hat{y} = 0\}. \tag{8}$$

У цій статті розглядаємо задачу про встановлення критеріїв максимальної акретивності та максимальної невід'ємності відношення

$$L_1 = \{\hat{y} \in L : A_1\Gamma_1\hat{y} + A_2\Gamma_2\hat{y} = 0\}, \tag{9}$$

де $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(G)$.

2. Основні результати.

Теорема 2. *Припустимо, що* $L_2 \equiv \ker\Gamma_2 \gg 0$, *оператор* B *визначено згідно з* (4), *а відношення* L_1 – *формулою* (9). *Покладемо*

$$a_1 = A_1(\mathbb{I}_G + M(0)B) + A_2B, \qquad a_2 = A_1M(0) + A_2. \tag{10}$$

(***i***) *Такі твердження є еквівалентними:*

1°) L_1 – *максимально* θ*-акретивне відношення;*

2°) $\operatorname{Re}(e^{i\theta}a_1a_2^*) \le 0, \qquad \ker(a_1 - e^{-i\theta}a_2) = \{0\}$;

3°) *існує стиск* $K \in \mathcal{B}(G)$ *такий, що*

$$L_1 = \{\hat{y} \in L : (K - \mathbb{I}_G)\gamma_1\hat{y} + e^{i\theta}(K + \mathbb{I}_G)\gamma_2\hat{y} = 0\},$$

де γ_1, γ_2 *визначені згідно з* (5), (6).

(***ii***) *Такі твердження є еквівалентними:*

1°) L_1 – *максимально невід'ємне відношення;*

2°) $a_1a_2^* \le 0, \qquad \ker(a_1 - a_2) = \{0\}$;

3°) *існує самоспряжений стиск* $K \in \mathcal{B}(G)$ *такий, що*

$$L_1 = \{\hat{y} \in L : (K - \mathbb{I}_G)\gamma_1\hat{y} + (K + \mathbb{I}_G)\gamma_2\hat{y} = 0\}.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки (див. (5), (6), (10))

$$a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 = (a_1 \quad a_2)\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} =$$

$$= (A_1 \quad A_2)\begin{pmatrix}\mathbb{I}_G + M(0)B & M(0)\\ B & \mathbb{I}_G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{I}_G & -M(0)\\ -B & \mathbb{I}_G + BM(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma_1\\ \Gamma_2\end{pmatrix} =$$

$$= (A_1 \quad A_2)\begin{pmatrix}\Gamma_1\\ \Gamma_2\end{pmatrix} = A_1\Gamma_1 + A_2\Gamma_2,$$

то правильність теореми випливає з результатів праці [14] та наслідку 1, зокрема з (7), (8). ♦

Зауваження 2. З (10) випливає, що $\operatorname{Im}\left(a_1 a_2^*\right) = \operatorname{Im}\left(A_1 A_2^*\right)$. Тому умови максимальної дисипативності та максимальної акумулятивності відношення L_1 формулюються у значно простішому вигляді, ніж умови максимальної акретивності цього відношення.

Теорема 3. *Нехай* L_1 *− довільне власне максимально акретивне розширення відношення* L_0. *Тоді*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \left(L_F + \varepsilon\right)^{-1} \le \operatorname{Re}\left(L_1 + \varepsilon\right)^{-1} \le \left(L_K + \varepsilon\right)^{-1}. \tag{11}$$

Д о в е д е н н я. Нехай спочатку $L_0 \gg 0$, а $\left(G, \Gamma_1, \Gamma_2\right)$ − жорсткий ПГЗ відношення L_0.

Відомо (див. [14] або теорему 2 з $B = M(0) = 0$), що при деякому стиску $K \in \mathcal{B}(G)$

$$L_1 = \left\{\hat{y} \in L : \left(K - \mathbb{I}_G\right)\Gamma_1 \hat{y} + \left(K + \mathbb{I}_G\right)\Gamma_2 \hat{y} = 0\right\}. \tag{12}$$

Застосовуючи теорему 1 праці [8] з $M_0 = L_0$, $\lambda = -\varepsilon < 0$, $A_1 = K - \mathbb{I}_G$, $A_2 = K + \mathbb{I}_G$, маємо

$$(L_1 + \varepsilon)^{-1} = (L_F + \varepsilon)^{-1} -$$
$$- Z_{-\varepsilon}\left[(K - \mathbb{I}_G)M(-\varepsilon) + (K + \mathbb{I}_G)\right]^{-1}(K - \mathbb{I}_G)Z_{-\varepsilon}^*. \tag{13}$$

Беручи до уваги нерівності $KK^* \le \mathbb{I}_G$, $M(-\varepsilon) \le M(0) = 0$, отримуємо

$$\operatorname{Re}\left\{ \left(K - \mathbb{I}_G\right)\left[\left(K - \mathbb{I}_G\right)M(-\varepsilon) + \left(K + \mathbb{I}_G\right)\right]^* \right\} =$$
$$= \operatorname{Re}\left\{ \left(K - \mathbb{I}_G\right)\left[M(-\varepsilon)(K^* - \mathbb{I}_G) + \left(K^* + \mathbb{I}_G\right)\right] \right\} =$$
$$= \left(K - \mathbb{I}_G\right)M(-\varepsilon)(K^* - \mathbb{I}_G) + \left(KK^* - \mathbb{I}_G\right) \le 0.$$

Оскільки недодатність оператора $\operatorname{Re}\{(K - \mathbb{I}_G)[(K - \mathbb{I}_G)M(-\varepsilon) + (K + \mathbb{I}_G)]^*\}$ рівносильна недодатності оператора $\operatorname{Re}\{[(K - \mathbb{I}_G)M(-\varepsilon) + (K + \mathbb{I}_G)]^{-1}(K - \mathbb{I}_G)\}$, то з (13) випливає правильність першої з нерівностей (11).

Далі, L_K при $K = -\mathbb{I}_G$ визначається умовою вигляду

$$\left(L_K + \varepsilon\right)^{-1} = \left(L_F + \varepsilon\right)^{-1} - Z_{-\varepsilon}M(-\varepsilon)^{-1}Z_{-\varepsilon}^*. \tag{14}$$

Із (13), (14) зрозуміло, що

$$\operatorname{Re}\left(L_1 + \varepsilon\right)^{-1} \le \left(L_K + \varepsilon\right)^{-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\left\{ \left[\left(K - \mathbb{I}_G\right)M(-\varepsilon) + \left(K + \mathbb{I}_G\right)\right]^{-1}\left(K - \mathbb{I}_G\right)\right\} \ge M(-\varepsilon)^{-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\left\{\left(K - \mathbb{I}_G\right)\left[\left(K - \mathbb{I}_G\right)M(-\varepsilon) + \left(K + \mathbb{I}_G\right)\right]^*\right\} \ge$$
$$\ge \left[\left(K - \mathbb{I}_G\right)M(-\varepsilon) + \left(K + \mathbb{I}_G\right)\right]M(-\varepsilon)^{-1} \times$$
$$\times \left[\left(K - \mathbb{I}_G\right)M(-\varepsilon) + \left(K + \mathbb{I}_G\right)\right]^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (KK^* - \mathbb{I}_G) + (K + \mathbb{I}_G)M(-\varepsilon)^{-1}(K + \mathbb{I}_G) \le 0\,,$$

тому виконується друга з нерівностей (11).

Нехай тепер $\inf L_0 = 0$, $\xi > 0$. Позначимо через $(L+\xi)_F$, $(L+\xi)_K$ відповідно жорстке і м'яке розширення відношення $L_0 + \xi$. З доведеного вище випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \lambda \in (-\varepsilon, 0) \quad (L_F + \varepsilon)^{-1} = \left(\left(L_F + \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \right)^{-1} \le$$

$$\le \operatorname{Re}\left(\left(L_1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \right)^{-1} = \operatorname{Re}(L_1 + \varepsilon)^{-1}.$$

Введемо позначення $L^{(\lambda)} \overset{\text{def}}{=} L_0 \dot{+} \widehat{\ker}(L - \lambda)M(\lambda)$, $\lambda < 0$. Відомо (див., наприклад, [1, 2, 12]), що $L^{(\lambda)} = (L - \lambda)_K + \lambda$. Тому, з огляду на доведене вище, для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $\lambda \in (-\varepsilon, 0)$ виконується

$$(L^{(\lambda)} + \varepsilon)^{-1} = ((L-\lambda)_K + (\varepsilon + \lambda))^{-1} \ge$$

$$\ge \operatorname{Re}((L_1 - \lambda) + (\varepsilon + \lambda))^{-1} = \operatorname{Re}(L_1 + \varepsilon)^{-1}.$$

Для завершення доведення достатньо застосувати співвідношення $s - \lim\limits_{\lambda \to -0} (L^{(\lambda)} + \varepsilon)^{-1} = (L_K + \varepsilon)^{-1}$, доведене у згаданих працях [1, 2, 12]. ♦

Далі скрізь припускаємо, що L_0 − невід'ємне (взагалі кажучи, не додатно визначене) відношення, а (G, Γ_1, Γ_2) − ПГЗ цього відношення такий, що

$$L_2 \equiv \ker \Gamma_2 = L_F\,. \tag{15}$$

З теореми 1 (зокрема, з (2)) випливає, що в цьому випадку

$$U_{-\infty} \equiv s - \lim_{\lambda \to -\infty} U(\lambda) = \mathbb{I}_G\,.$$

Зауваження 3. Припущення (15) не призводить до втрати загальності. Дійсно, нехай (G, Γ_1, Γ_2) − ПГЗ відношення L_0 (яке задовольняє умову $\ker \Gamma_2 \ge 0$). Покладемо

$$\hat{\Gamma}_1 = \frac{i}{2}(U_{-\infty} + \mathbb{I}_G)\Gamma_1 - \frac{1}{2}(U_{-\infty} - \mathbb{I}_G)\Gamma_2\,,$$

$$\hat{\Gamma}_2 = \frac{1}{2}(U_{-\infty} - \mathbb{I}_G)\Gamma_1 + \frac{i}{2}(U_{-\infty} + \mathbb{I}_G)\Gamma_2\,.$$

Як показують безпосередні обчислення, $(G, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2)$ є ПГЗ відношення L_0. З огляду на теорему 1, $\ker \hat{\Gamma}_2 = L_F$.

Теорема 4. *Відношення* L_1 *є максимально акретивним (максимально невід'ємним) тоді й тільки тоді, коли*

(***i***) *існує* $s - \lim\limits_{\lambda \to -0} A_1 M(\lambda) A_1^* \overset{\text{def}}{=} A_0 \in \mathcal{B}(G)$,

(***ii***) $A_0 + \operatorname{Re}(A_1 A_2^*) \le 0, \qquad A_0 + A_1 A_2^* \le 0$,

(***iii***) *для деякого (а отже, для будь-якого)* $\lambda < 0$

$$\ker(A_1 - A_2 - A_1 M(\lambda)) = \{0\}\,. \tag{16}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки максимальна акретивність (максимальна невід'ємність) замкненого лінійного відношення $T \subset H^2$ рівносильна одночасній акретивності (невід'ємності) відношень T та T^*, то L_1 є максимально акретивним (максимально невід'ємним) тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ таким є $L_1 + \varepsilon$. Далі, з означення функції $M(\lambda)$ випливає, що $(G, \Gamma_1 - M(-\varepsilon)\Gamma_2, \Gamma_2)$ є жорстким ПГЗ додатно визначеного відношення $L_0 + \varepsilon$. Крім цього, співвідношення (9) рівносильне такому:

$$L_1 = \{\hat{y} \in L : A_1(\Gamma_1 - M(-\varepsilon)\Gamma_2)\hat{y} + (A_2 + A_1 M(-\varepsilon))\Gamma_2 \hat{y} = 0\}.$$

Тому, застосовуючи результати праці [14] або теорему 2 при $B = M(0) = 0$, бачимо, що $L_1 + \varepsilon$ є максимально акретивним (максимально невід'ємним) тоді й тільки тоді, коли

$$A_1 M(-\varepsilon) A_1^* + \operatorname{Re}(A_1 A_2^*) \le 0, \qquad A_1 M(-\varepsilon) A_1^* + (A_1 A_2^*) \le 0.$$

Використовуючи монотонність функції $M(\lambda)$ і теорему про границю неспадної обмеженої зверху послідовності самоспряжених операторів (див. [9, задача 94]), переконуємось, що L_1 належить до одного з класів, які нас цікавлять, тоді й тільки тоді, коли справджуються умови (***i***), (***ii***) та для всіх $\lambda < 0$ виконується (16).

Припустимо тепер, що умови (***i***), (***ii***) справджуються, а (16) виконується для деякого $\lambda = -\varepsilon < 0$. Тоді $L_1^* + \varepsilon$ є максимально акретивним (максимально невід'ємним), а отже, $R(L_1^* + 2\varepsilon) = H$. Звідси і з акретивності (невід'ємності) L_1^* випливає максимальна акретивність (максимальна невід'ємність) відношення L_1 (див. [1, 12]), а отже, правильність співвідношення (12) при всіх $\lambda < 0$.

3. Відношення $L_{\min}$ та $L_{\max}$. Покладемо

$$L_{\min} = L_F \cap L_K, \qquad L_{\max} = L_F \hat{+} L_K. \tag{17}$$

Легко бачити, що $L_{\min}^* = \overline{L_{\max}}$, $L_{\max}^* = L_{\min}$, де $\overline{L_{\max}}$ – замикання відношення $L_{\max}$. Неважко зміркувати, що L_F є жорстким, а L_K – м'яким розширенням (не тільки відношення L_0, але й відношення $L_{\min}$). У випадку, коли $L_F \gg 0$, маємо $L_{\min} = L_0$, $L_{\max} = L$ (деталі див., наприклад, в [1, 2, 12]). У загальному випадку, з огляду на (3) і (15),

$$\hat{y} \in L_{\min} \Leftrightarrow \Gamma_2 \hat{y} = 0, \qquad (U_0 - \mathbb{I}_G)\Gamma_1 \hat{y} = 0.$$

Зауваження **4.** Якщо X, Y – лінійні відношення, то

$$X \hat{+} Y \overset{\text{def}}{=} \{(x+u, y+v) : x, u \in X, y, v \in Y\}$$

(покомпонентна сума). У випадку, коли $X \cap Y = \{0\}$, пишемо $X \dot{+} Y$ замість $X \hat{+} Y$ (порівняти (17) і означення відношення $L^{(\lambda)}$ в теоремі 3).

Лема 1. *Нехай* $\hat{y} \in L$. *Тоді*

(***i***) $\quad \hat{y} \in \overline{L_{\max}} \Leftrightarrow \Gamma_2 \hat{y} \in \overline{R(U_0 - \mathbb{I}_G)}$; (18)

(***ii***) $\quad \hat{y} \in L_{\max} \Leftrightarrow \Gamma_2 \hat{y} \in R(U_0 - \mathbb{I}_G)$. (19)

Д о в е д е н н я. (***i***). Позначимо через P_1 ортопроектор $G \to \overline{R(U_0 - \mathbb{I}_G)}$. Зрозуміло, що $L_{\min} = \ker \Gamma_2 \cap \ker P_1 \Gamma_1$. Оскільки (G, Γ_1, Γ_2) – ПГЗ відношення L_0, то $\overline{L_{\max}} = L_{\min}^* = \ker(\mathbb{I}_G - P_1)\Gamma_2$, тобто виконується (18).

(***ii***). Нехай $\hat{y}=\hat{y}_1+\hat{y}_2$, де $\hat{y}_1\in L_F$, $\hat{y}_2\in L_K$ Виходячи з (3), неважко зміркувати, що існує $h\in G$, яке задовольняє рівності

$$\Gamma_1\hat{y}=-i(U_0+\mathbb{I}_G)h, \qquad \Gamma_2\hat{y}=(U_0-\mathbb{I}_G)h. \tag{20}$$

Умови (20) задовольняє розв'язок системи

$$(U_0-\mathbb{I}_G)\Gamma_1\hat{y}_2+i(U_0+\mathbb{I}_G)\Gamma_2\hat{y}_2=0,$$

$$(U_0^*+\mathbb{I}_G)\Gamma_1\hat{y}_2-i(U_0^*-\mathbb{I}_G)\Gamma_2\hat{y}_2=-4ih.$$

Крім цього, $\Gamma_2\hat{y}_1=0$, отже, $\Gamma_2\hat{y}=(U_0-\mathbb{I}_G)h\in R(U_0-\mathbb{I}_G)$.

Навпаки, нехай $h\in G$ і $\Gamma_2\hat{y}=(U_0-\mathbb{I}_G)h$. Існує $\hat{y}_2\in L$, що задовольняє умови (20). Зрозуміло, що $\hat{y}_2\in L_K$, $\hat{y}-\hat{y}_2\in L_F$. ♦

Наслідок 2.

(***i***) $L_{\min}=L_0 \Leftrightarrow \ker(U_0-\mathbb{I}_G)=\{0\}$;

(***ii***) $L_{\max}=\overline{L_{\max}} \Leftrightarrow R(U_0-\mathbb{I}_G)=\overline{R(U_0-\mathbb{I}_G)}$;

(***iii***) $L_{\max}=L \Leftrightarrow R(U_0-\mathbb{I}_G)=G$.

Наслідок 3.

(***i***) $L_1\subset\overline{L_{\max}} \Leftrightarrow R(A_1^*)\subset\overline{R(U_0-\mathbb{I}_G)}$;

(***ii***) $L_1\subset L_{\max} \Rightarrow R(A_1^*)\subset R(U_0-\mathbb{I}_G)$

у випадку, коли $A\in\boldsymbol{\mathcal{B}}(G^2,G)$, *визначений умовою*

$A(h_1,h_2)=A_1h_1+A_2h_2, \quad h_1,h_2\in G$,

є нормально розв'язним; *правильним є і обернене твердження.*

Д о в е д е н н я. Нехай спочатку оператор A є нормально розв'язним. Тоді (див. [8, лема 9])

$$L_1^*=\{\hat{z}\in L\mid \exists h\in G:\Gamma_1\hat{z}=A_2^*h,\Gamma_2\hat{z}=-A_1^*h\},$$

а отже, $\{\Gamma_2\hat{z}:\hat{z}\in L_1^*\}=R(A_1^*)$. Так що у цьому випадку правильність наслідку 3 випливає з леми 1. У загальній ситуації слід скористатися тим, що існують $C\in\boldsymbol{\mathcal{B}}(G)$, $\hat{A}\in\boldsymbol{\mathcal{B}}(G\oplus G,G)$ такі, що $\ker C=\{0\}$, A − нормально розв'язний оператор і $A=C\hat{A}$. ♦

Лема 2. *Нехай* $e\in G$ і $\|e\|=1$. *Якщо* $\sup\limits_{\varepsilon>0}(M(-\varepsilon)e\mid e)<+\infty$, *то існує невід'ємне самоспряжене відношення* $L_e\subset L$ *таке, що для деякого* $\hat{y}\in L_e$ *справджується рівність* $\Gamma_2\hat{y}=e$.

Д о в е д е н н я. Нехай P − ортопроектор $G\to\mathrm{sp}\{e\}$, тобто $Ph=(h\mid e)e$, $\alpha>0$, $L_e=\ker(\alpha P\Gamma_1-\Gamma_2)$. Зрозуміло, що $L_e^*=L_e$. Далі, застосовуючи цитовану вище теорему [9, с. 246] про границю монотонної обмеженої оператор-функції, теорему 4 при $A_1=\alpha P$, $A_2=-\mathbb{I}_G$ і рівності

$$\left((A_1M(-\varepsilon)A_1^*+A_1A_2^*)h\mid h\right)_G=$$

$$=\alpha^2\left((M(-\varepsilon)h\mid e)_G e\mid (h\mid e)_G e\right)_G-\alpha(h\mid e)_G(e\mid h)_G=$$

$$= \alpha \left|(h \mid e)\right|^2 \left(\alpha(M(-\varepsilon)e \mid e)_G - 1 \right),$$

бачимо, що при $0 < \alpha < \left(\max\{1, \sup(M(-\varepsilon)e \mid e)_G\}\right)^{-1}$ відношення L_e є невід'ємним. Нарешті, існує $\hat{y} \in L$ таке, що $\Gamma_2\hat{y} = e$, $\Gamma_1\hat{y} = \frac{1}{\alpha}e$, а отже, $\hat{y} \in L_e$.♦

Лема 3. *Для будь-якого невід'ємного самоспряженого розширення* L_1 *відношення* L_0 *справджується*

$$L_{\min} \subset L_1 \subset \overline{L_{\max}}. \tag{21}$$

Д о в е д е н н я. З означення жорсткого і м'якого розширень невід'ємного відношення випливає, що для всіх $f \in H$

$$0 \le \left(\left[(L_1 + 1)^{-1} - (L_F + 1)^{-1}\right] f \mid f \right) \le$$

$$\le \left(\left[(L_K + 1)^{-1} - (L_F + 1)^{-1}\right] f \mid f \right). \tag{22}$$

Нехай $\hat{y}_0 = (y_0, y_0') \in L_{\min} \equiv L_F \bigcap L_K$, $f_0 \overset{\text{def}}{=} y_0' + y_0$. Тоді $(y_0, f_0) \in L_F + 1$, $(y_0, f_0) \in L_K + 1$, тобто $(L_K + 1)^{-1} f_0 = (L_F + 1)^{-1} f_0 = y_0$. Підставляючи в (22) $f = f_0$, переконуємося, що

$$\left(\left[(L_1 + 1)^{-1} - (L_F + 1)^{-1}\right] f_0 \mid f_0 \right) = 0.$$

Але $(L_1 + 1)^{-1} \ge (L_F + 1)^{-1}$, тому $(L_1 + 1)^{-1} f_0 = y_0$, що випливає з такої серії імплікацій:

$$\left(W = W^* \in \mathcal{B}(G),\, W \ge 0,\, (Wf_0 \mid f_0) = 0 \right) \Rightarrow W^{1/2} f_0 = 0 \Rightarrow Wf_0 = 0.$$

Отже, $(y_0, y_0') \in L_1$.

Таким чином, $L_{\min} \subset L_1$. Але L_1^* також є невід'ємним самоспряженим розширенням відношення L_0, тому $L_{\min} \subset L_1^*$, а отже, $L_1 \subset L_{\min}^* = \overline{L_{\max}}$. ♦

Наслідок 4. *Якщо* $\sup\limits_{\varepsilon > 0} (M(-\varepsilon)h \mid h)_G < +\infty$, *то* $h \in \overline{R(U_0 - 1_G)}$.

Д о в е д е н н я. Покладемо $e = \frac{h}{\|h\|}$ Згідно з лемою 2, існує невід'ємне самоспряжене відношення $L_e \subset L$ таке, що для деякого $\hat{y} \in L$ справджується рівність $\Gamma_2\hat{y} = e$. Оскільки, за лемою 3, $\hat{y} \in \overline{L_{\max}}$, то (див. (18)) $e \in \overline{R(U_0 - \mathbb{I}_G)}$, а тому $h \in \overline{R(U_0 - \mathbb{I}_G)}$. ♦

Теорема 5. *Для будь-якого власного максимально акретивного розширення* L_1 *відношення* L_0 *справджуються умови* (21).

Д о в е д е н н я. Нехай відношення $L_1 = \ker(A_1\Gamma_1 + A_2\Gamma_2)$ є максимально акретивним. З теореми 4 зрозуміло, що для будь-якого $h \in R(A_1^*)$ $\sup\limits_{\varepsilon > 0} (M(-\varepsilon)h \mid h)_G < +\infty$, тому (з огляду на наслідок 4) $h \in \overline{R(U_0 - \mathbb{I}_G)}$. Таким чином, $R(A_1^*) \subset \overline{R(U_0 - \mathbb{I}_G)}$, тобто (див. наслідок 3) $L_1^* \subset \overline{L_{\max}}$, а отже,

$L_{\min} = L^*_{\max} \subset L_1$. Оскільки L_1^* теж є власним максимально акретивним розширенням відношення L_0, то $L_1 = L_1^{**} \subset \overline{L_{\max}}$. ♦

4. Деякі наслідки. Нижче дотримуватимемося таких позначень:

$$G_1 = \overline{R(U_0 - \mathbb{I}_G)}, \qquad G_2 = G \,\Theta\, G_1,$$

$$\gamma_{11} = P_1\Gamma_1, \qquad \gamma_{12} = P_2\Gamma_1, \qquad \gamma_{21} = P_1\Gamma_2, \qquad \gamma_{22} = P_2\Gamma_2,$$

де P_i – ортопроектор $G \to G_i$, $i = 1, 2$,

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} m(\lambda) & m_{12}(\lambda) \\ m_{21}(\lambda) & m_{22}(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}$$

– матричні зображення відповідних операторів як відображень $G_1 \oplus G_2 \to \to G_1 \oplus G_2$ (див. [9]), $\mathbb{I}_i = \mathbb{I}_{G_i}$, $i = 1, 2$.

Легко бачити, що

$$L_F = \{\hat{y} \in L : \gamma_{21}\hat{y} = 0, \gamma_{22}\hat{y} = 0\},$$

$$L_K = \{\hat{y} \in L : (u_0 - \mathbb{I}_1)\gamma_{11}\hat{y} + i(u_0 + \mathbb{I}_1)\gamma_{21}\hat{y} = 0, \gamma_{22}\hat{y} = 0\},$$

$$L_{\min} = \{\hat{y} \in L : \gamma_{21}\hat{y} = \gamma_{22}\hat{y} = \gamma_{11}\hat{y} = 0\},$$

$$\overline{L_{\max}} = \{\hat{y} \in L : \gamma_{22}\hat{y} = 0\},$$

і $(G_1, \gamma_{11}, \gamma_{21})$ є ПГЗ відношення $L_{\min}$. Тому будь-яке власне максимально акретивне розширення L_1 відношення L_0, з огляду на теорему 5, можемо подати у такому вигляді:

$$L_1 = \{\hat{y} \in \overline{L_{\max}} : \alpha_1\gamma_{11}\hat{y} + \alpha_2\gamma_{21}\hat{y} = 0\}, \tag{23}$$

де $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{B}(G_1)$, так що задача, сформульована на початку статті, по суті, зведена до випадку, коли $G = G_1$, тобто, коли $L_{\min} = L_0$.

Лема 4. *Якщо* $h \in R(u_0 - \mathbb{I}_1)$, *то існує* $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} (m(-\varepsilon)h \mid h)_{G_1}$ *і*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (m(-\varepsilon)h \mid h)_{G_1} \le (-i(u_0 + \mathbb{I}_1)(u_0 - \mathbb{I}_1)^{-1}h \mid h)_{G_1}.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки L_K є власним максимально невід'ємним розширенням відношення L_0, то з (3) і з теореми 4 (точніше, з її доведення) випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall g \in G \quad \Big((U_0 - \mathbb{I}_G)M(-\varepsilon)(U_0 - \mathbb{I}_G)^* g \mid g \Big)_G \le$$

$$\le \Big(i(U_0 - \mathbb{I}_G)(U_0 + \mathbb{I}_G)^* g \mid g \Big)_G =$$

$$= \Big(-i(U_0 + \mathbb{I}_G)(U_0 - \mathbb{I}_G)^* g \mid g \Big)_G \tag{24}$$

(остання рівність є наслідком самоспряженості оператора $i(U_0 - \mathbb{I}_G)(U_0 + \mathbb{I}_G)^*$). Припустимо, що h належить до

$$R(u_0 - \mathbb{I}_1) \ \Big(= R(U_0 - \mathbb{I}_G) = R((U_0 - \mathbb{I}_G)^*) = R((u_0 - \mathbb{I}_1)^*) \Big).$$

Існує $g \in G_1$ таке, що

$$h = (U_0 - \mathbb{I}_G)^* = (u_0 - \mathbb{I}_1)^* g. \tag{25}$$

Беручи до уваги (24), (25), отримуємо

$$(m(-\varepsilon)h \mid h)_{G_1} = (M(-\varepsilon)h \mid h)_G = \Big(M(-\varepsilon)(U_0 - \mathbb{I}_G)^* g \mid (U_0 - \mathbb{I}_G)^* g\Big)_G =$$

$$= \Big((U_0 - \mathbb{I}_G)M(-\varepsilon)(U_0 - \mathbb{I}_G)^* g \mid g\Big)_G \le$$

$$\le \Big(-i(U_0 + \mathbb{I}_G)(U_0 - \mathbb{I}_G)^* g \mid g\Big)_G =$$

$$= \Big(-i(u_0 + \mathbb{I}_1)(u_0 - \mathbb{I}_1)^* g \mid g\Big)_{G_1} =$$

$$= \Big(-i(u_0 + \mathbb{I}_1)h \mid ((u_0 - \mathbb{I}_1)^*)^{-1} h\Big)_{G_1} =$$

$$= \Big(-i(u_0 - \mathbb{I}_1)^{-1}(u_0 + \mathbb{I}_1)h \mid h\Big)_{G_1} =$$

$$= \Big(-i(u_0 + \mathbb{I}_1)(u_0 - \mathbb{I}_1)^{-1} h \mid h\Big)_{G_1}.$$

Для завершення доведення достатньо застосувати теорему про границю монотонної обмеженої оператор-функції. ♦

Зауваження 5. Легко бачити, що $m(\lambda)$ є функцією Вейля відношення $L_{\min}$, яка відповідає його ПГЗ $(G_1, \gamma_{11,}\gamma_{21})$. Далі, оскільки L_F та L_K – відповідно жорстке і м'яке розширення цього відношення, то

$$u_0 = s - \lim_{\lambda \to -0} (m(\lambda) - i\mathbb{I}_1)(m(\lambda) + i\mathbb{I}_1)^{-1}$$

(це випливає з означення функції $U(\lambda)$ і теореми 1), а отже,

$$u_0 - \mathbb{I}_1 = s - \lim_{\lambda \to -0} (-2i)(m(\lambda) + i\mathbb{I}_1)^{-1}. \tag{26}$$

Лема 5. *Якщо існує* $\lim_{\varepsilon \to +0} m(-\varepsilon)h$, *то* $h \in R(u_0 - \mathbb{I}_1)$ *і*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} m(-\varepsilon)h = -i(u_0 + \mathbb{I}_1)(u_0 - \mathbb{I}_1)^{-1} h. \tag{27}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\lim_{\varepsilon \to +0} m(-\varepsilon)h = g$. Тоді $\lim_{\varepsilon \to +0} (m(-\varepsilon) + i\mathbb{I}_1)h = g + ih$. Далі, справджуються тотожності

$$-2i(m(-\varepsilon) + i\mathbb{I}_1)^{-1}(m(-\varepsilon) + i\mathbb{I}_1)h = -2ih,$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (-2i)(m(-\varepsilon) + i\mathbb{I}_1)^{-1}(g + ih) = (u_0 - \mathbb{I}_1)(g + ih)$$

(див. (26)). Оскільки для кожного $\varepsilon > 0$

$$\left\|(m(-\varepsilon) + i\mathbb{I}_1)^{-1}(m(-\varepsilon) + i\mathbb{I}_1)h - (m(-\varepsilon) + i\mathbb{I}_1)^{-1}(g + ih)\right\| \le$$

$$\le \left\|(m(-\varepsilon) + i\mathbb{I}_1)^{-1}\right\| \left\|m(-\varepsilon)h + ih - g - ih\right\| =$$

$$= \left\|(m(-\varepsilon) + i\mathbb{I}_1)^{-1}\right\| \left\|m(-\varepsilon)h - g\right\| \le \left\|m(-\varepsilon)h - g\right\| \underset{\varepsilon \to +0}{\to} 0$$

(тут застосовуємо теорему про спектр самоспряженого оператора), тобто

$$-2i(m(-\varepsilon)+i\mathbb{I}_1)^{-1}(g+ih) \underset{\varepsilon\to+0}{\to} -2ih$$

і, як випливає з (26),

$$-2i(m(-\varepsilon)+i\mathbb{I}_1)^{-1}(g+ih) \underset{\varepsilon\to+0}{\to} (u_0-\mathbb{I}_1)(g+ih),$$

то

$$-2ih=(u_0-\mathbb{I}_1)(g+ih),$$

зокрема, $h \in R(u_0-\mathbb{I}_1)$. Крім цього, з останньої рівності випливає, що

$$g+ih=-2i(u_0-\mathbb{I}_1)^{-1}h,$$

$$g=-2i(u_0-\mathbb{I}_1)^{-1}h-ih=-i\big(2(u_0-\mathbb{I}_1)^{-1}h+(u_0-\mathbb{I}_1)^{-1}(u_0-\mathbb{I}_1)h\big)=$$

$$=-i(u_0-\mathbb{I}_1)^{-1}(2h+u_0h-h)=-i(u_0-\mathbb{I}_1)^{-1}(u_0+\mathbb{I}_1)h,$$

тобто справджується (27). ♦

Наслідок 5. $R(u_0-\mathbb{I}_1)=G_1$ *тоді й тільки тоді, коли для кожного* $h \in G_1$ *існує* $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} m(-\varepsilon)h$. *У цьому випадку*

$$s-\lim_{\varepsilon\to+0} m(-\varepsilon)=-i(u_0+\mathbb{I}_1)(u_0-\mathbb{I}_1)^{-1}\in\mathcal{B}(G_1). \tag{28}$$

Д о в е д е н н я. Необхідність умови $R(u_0-\mathbb{I}_1)=G_1$ і правильність співвідношення (28) випливає з леми 5. Навпаки, якщо $R(u_0-\mathbb{I}_1)=G_1$, то, з огляду на теорему Банаха про обернений оператор,

$$-i(u_0+\mathbb{I}_1)(u_0-\mathbb{I}_1)^{-1}\in\mathcal{B}(G_1).$$

Тому, як випливає з леми 4 і теореми про границю монотонної оператор-функції, існує оператор $m_0\in\mathcal{B}(G_1)$ такий, що $s-\lim\limits_{\varepsilon\to+0} m(-\varepsilon)=m_0$. Для завершення доведення залишається ще раз застосувати лему 5. ♦

Наслідок 6. *Нехай* $L_{\max}=\overline{L_{\max}}$, *а відношення* L_1 *визначається згідно з* (9)*:*

$$L_1=\{\hat{y}\in L: A_1\Gamma_1\hat{y}+A_2\Gamma_2\hat{y}=0\},$$

де $A_1, A_2\in\mathcal{B}(G)$, *причому* $\ker\Gamma_2=L_F$.

Відношення L_1 *є максимально акретивним* (*максимально невід'ємним*) *тоді й тільки тоді, коли*

i) $A_1M_0A_1^*+\operatorname{Re}(A_1A_2^*)\le 0$ (*відповідно* $A_1M_0A_1^*+A_1A_2^*\le 0$), *де*

$$M_0=\begin{pmatrix}-i(u_0-\mathbb{I}_1)^{-1}(u_0+\mathbb{I}_1) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

ii) *для деякого* (*а отже, для будь-якого*) $\varepsilon>0$

$$\ker\big(A_1-A_2-A_1M(-\varepsilon)\big)=\{0\}.$$

Д о в е д е н н я. З наслідків 2 і 5 випливає, що оператор $M_0\in\mathcal{B}(G)$ визначено коректно, а також, що $s-\lim\limits_{\varepsilon\to+0} M(-\varepsilon)=M_0$. Тому правильність твердження випливає безпосередньо з теореми 4. ♦

Зауваження 6. Нагадаємо (див. (23)), що у випадку, коли $L_{\max} = \overline{L_{\max}}$, будь-яке власне максимально акретивне розширення L_1 відношення L_0 можна подати у вигляді

$$L_1 = \{\hat{y} \in L_{\max} : \alpha_1 \Gamma_1 \hat{y} + \alpha_2 \Gamma_2 \hat{y} = 0\},$$

де $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{B}(G_1)$. З наслідку 6 випливає, що це відношення є максимально акретивним (максимально невід'ємним) тоді й тільки тоді, коли

i) $\alpha_1 m_0 \alpha_1^* + \mathrm{Re}(\alpha_1 \alpha_2^*) \le 0$,

ii) для деякого (а отже, для будь-якого) $\varepsilon > 0$

$$\ker(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_1 m(-\varepsilon)) = \{0\}.$$

1. *Арлінський Ю. М.* Максимальні акретивні розширення секторіальних операторів: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 2000. – 36 с.
2. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Теория расширений симметричных операторов и граничные задачи. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2017. – 573 с. – Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування: – Т. 104.
3. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией. – Донецк, 1985. – 52 с. – (Препр. / АН УССР. Донецк. физ.-техн. ин-т; 85–9).
4. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 1. – С. 41–48.
   Те саме: *Kochubei A. N.* Extensions of symmetric operators and symmetric binary relations // Math. Notes Acad. Sci. USSR. – 1975. – **17**, No. 1. – P. 25–28. – https://doi.org/10.1007/BF01093837.
5. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I, II // Мат. сб. – 1947. – **20**(**62**), № 3. – С. 431–495; **21**(**63**), № 3. – С. 365–404.
6. *Маламуд М. М.* Об одном подходе к теории расширений неплотно заданного эрмитова оператора // Докл. АН УССР. – 1990. – № 3. – С. 20–25.
7. *Михайлец В. А.* Спектры операторов и граничные задачи // Спектр. анализ дифференц. операторов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 106–131.
8. *Пігура О., Сторож О.* Резольвента й умови розв'язності власних розширень лінійного відношення у гільбертовому просторі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2016. – Вип. 82. – С. 174–185.
9. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – Москва: Мир, 1970. – 352 с.
   Те саме: *Halmos P. R.* A Hilbert space problem book. – Princeton: Van Nostrand Company, 1967. – xvii+365 p.
10. *Arens R.* Operational calculus of linear relations // Pacific J. Math. – 1961. – **11**, No. 1. – P. 9–23.
    – DOI: 10.2140/pjm.1961.11.9.
11. *Coddington E. A.* Selfadjoint subspace extensions of nondensely defined symmetric operators // Bull. Amer. Math. Soc. – 1973. – **79**, No. 4. – P. 712–715.
    – https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1973-13275-6.
12. *Coddington E. A., de Snoo H. S. V.* Positive selfadjoint extensions of positive symmetric subspaces // Math. Zeit. – 1978. – **159**, No. 3. – P. 203–214.
    – https://doi.org/10.1007/BF01214571.
13. *Dijksma A., de Snoo H. S. V.* Self-adjoint extensions of symmetric subspaces // Pacific J. Math. – 1974. – **54**, No. 1. – P. 71–100.
    – DOI: 10.2140/pjm.1974.54.71.
14. *Storozh O. G.* Maximal accretive extensions of positively definite linear relation a Hilbert space// In: Book of abstracts of the Int. Conf. dedicated to the 70th anniversary of prof. Oleh Lopushansky «Infinite Dimensional Analysis and Topology». – Ivano-Frankivsk, 2019. – P. 49–50.
15. *Storozh O. G.* On an approach to the construction of the Friedrichs and Neumann – Krein extensions of nonnegative linear relations // Карпат. мат. публікації. – 2018. – **10,** № 2. – P. 387–394.
    – https://doi.org/10.15330/cmp.10.2.387-394.

МАКСИМАЛЬНО АККРЕТИВНЫЕ И НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ОТНОШЕНИЯ

В терминах пространств граничных значений сформулированы и доказаны критерии максимальной θ-аккретивности и максимальной неотрицательности собственного расширения замкнутого неотрицательного линейного отношения в гильбертовом пространстве. В случае дифференциальных операторов это приводит непосредственно к краевым условиям.

Ключевые слова: *гильбертово пространство, линейное отношение, расширение, аккретивный, неотрицательный.*

MAXIMAL ACCRETIVE AND NONNEGATIVE EXTENSIONS OF NONNEGATIVE LINEAR RELATION

In the terms of the boundary value spaces the criteria of maximal θ-accretivity and maximal nonnegativity for proper extension of nonnegative linear relation in a Hilbert space are formulated and proved. In the case of differential operators it leas immediately to boundary conditions.

Key words: *Hilbert space, linear relation, extension, accretive, nonnegative.*

Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів

Одержано
21.01.20