

АНАЛІЗ ЗАДАЧІ ПРО ГАРМОНІЧНІ ХВИЛІ В ПРУЖНИХ ТІЛАХ І ЇЇ h -АДАПТИВНА СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНА АПРОКСИМАЦІЯ

Сформульовано варіаційну задачу про гармонічну хвилю у в'язкопружному тілі з короткочасною пам'яттю, породжену розподіленими навантаженнями заданої частоти. Встановлено умови її коректності та еквівалентність задачі про сідлову точку відповідного лагранжіана. Побудовано h -адаптивну схему методу скінченних елементів розв'язання сформульованої задачі з поелементно визначеним апостеріорним оцінювачем похибки і критерієм локального покращення триангуляцій Делоне для обчислення апроксимацій з наперед гарантованою точністю. Ефективність запропонованої методики проілюстровано на прикладі чисельного дослідження резонансних частот квадратної пластини з квадратним отвором.

Ключові слова: в'язкопружне тіло, гармонічна хвиля, варіаційна задача, сідлова точка, h -адаптивна схема методу скінченних елементів.

Вступ. Роль гармонічних хвиль (коливань) є дуже важливою в багатьох сферах людської діяльності, сучасних технологіях та інженерних застосуваннях. Оскільки ці хвилі можуть приносити як користь в одних випадках, так і шкоду в інших, пізнання їхньої структури і керування їхніми характеристиками складають актуальну наукову проблему як в розумінні формулювання моделей хвильових явищ, так і методів розв'язання (див., наприклад, [9, 11, 15]). Складність аналізу і відшукування розв'язків таких задач вже декілька десятиліть привертає увагу фахівців методу скінченних елементів (МСЕ) [4], для якого розроблено математичну основу [10–13] і потужний комп'ютерний інструментарій [4, 13], доповнений адаптивними процедурами з можливістю побудови розв'язків з наперед заданою точністю [6, 7, 16].

Мета цього дослідження полягає у постановці задачі про гармонічну хвилю, яку породжують розподілені та поверхневі гармонічні навантаження заданої кругової частоти в пружному тілі з короткочасною пам'яттю, аналізі коректності її формулювання і розробці числових методів знаходження її наближених розв'язків з наперед гарантованою точністю. Певною мірою результати та положення цієї статті розвивають і доповнюють методику аналізу, розроблену авторами в статтях [1–3] (див. також [4, с. 59–73]), і її застосування в [5].

У **п. 1** описано початково-крайову задачу еластодинаміки, а також наведено її варіаційне формулювання, рівняння балансу енергії і достатні умови розв'язності. Побудові варіаційної задачі про гармонічну хвилю в термінах амплітуди вектора переміщень присвячено **п. 2**. Коректність сформульованої задачі та її еквівалентність задачі про сідлову точку лагранжіана встановлено у **п. 3**. Енергетичні характеристики розв'язку задачі та спосіб їх обчислення визначено у **п. 4**. Короткий опис класичної схеми МСЕ подано у **п. 5**, а **п. 6** присвячено апостеріорному оцінювачу похибок і h -адаптивній схемі МСЕ. Результати числових експериментів, подані в **п. 7**, ілюструють можливості запропонованої методики.

1. Задача еластодинаміки і попередні результати. Розглянемо в'язкопружне тіло з короткочасною пам'яттю, яке займає обмежену зв'язну область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ або 3 , з неперервною за Ліпшицем границею $\partial\Omega = \Gamma$, і одиничним вектором $\mathbf{n} = \{n_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^d$, $n_i = \cos(\mathbf{n}, x_i)$, зовнішньої нормалі до

✉ halyna.kvasnytsya@lnu.edu.ua

Γ у точці $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^d$. Приймаємо, що тіло перебуває під дією об'ємних сил $\mathbf{f} = \{f_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$, $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^d \in \Omega$, поверхневих сил $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\hat{\sigma}_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$ на частині Γ_σ поверхні $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ і заданих початкових переміщень \mathbf{u}_0 і швидкостей \mathbf{v}_0 на частині поверхні Γ_u , час $t \in [0, T]$, $0 < T < +\infty$.

Визначимо компоненти вектора пружних зміщень $\mathbf{u} = \{u_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$, тензора напружень $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^d$ і лінеаризованого тензора деформацій $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1}^d$ із системи рівнянь руху

$$\rho(u_i'' - f_i) - \sigma_{ji,j} = 0 \quad (1)$$

(тут і надалі за індексами, що повторюються, виконується звичайне підсумовування),

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{km}(\mathbf{u}) + a_{ijkl} \varepsilon_{km}(\mathbf{u}'), \quad (2)$$

$$\varepsilon_{km}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{k,m} + u_{m,k}), \quad (3)$$

за відомих крайових

$$\begin{aligned} u_i &= 0, & \Gamma_u \times [0, T], \Gamma_u \subset \Gamma, \text{mes}(\Gamma_u) > 0, \\ \sigma_{ij} n_j &= \hat{\sigma}_i, & \Gamma_\sigma \times [0, T], \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u \end{aligned} \quad (4)$$

і початкових

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}'|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \quad \text{в} \quad \Omega. \quad (5)$$

умов. Тут $\rho = \rho(\mathbf{x}) > 0$ – густина матеріалу тіла; кома в індексі означає частинну похідну за просторовою змінною (наприклад, $g_{,k} = \partial g / \partial x_k$), штрихом позначено похідну за часом: $g' = \partial g / \partial t$; c_{ijkl} і a_{ijkl} – відповідно модулі пружності і в'язкості тіла, які задовольняють звичайні співвідношення симетрії і додатної визначеності:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{kmi j} = c_{jikm}, \\ c_{ijkl} e_{ij} e_{km} &\geq c_0 e_{km} e_{km} \quad \forall e_{km} = e_{mk} \in \mathbb{R}, \quad c_0 = \text{const} > 0, \\ a_{ijkl} &= a_{kmi j} = a_{jikm}, \\ a_{ijkl} e_{ij} e_{km} &\geq a_0 e_{km} e_{km} \quad \forall e_{km} = e_{mk} \in \mathbb{R}, \quad a_0 = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Запишемо варіаційне формулювання початково-крайової задачі (1)–(6). Для цього введемо простір комплекснозначних допустимих переміщень

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d : \mathbf{v} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_u\}, \quad (7)$$

де $H^m(\Omega)$ – простір Соболева, наділений скалярним добутком

$$\begin{aligned} (u, v)_{m, \Omega} &:= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha \bar{v} dx, \\ D^\alpha w &:= \frac{\partial^{|\alpha|} w}{\partial^{a_1} x_1 \dots \partial^{a_d} x_d}, \quad \alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^d, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d, \quad \alpha_i \geq 0, \end{aligned}$$

та асоційованою з ним нормою $\|u\|_{m, \Omega} = \sqrt{(u, u)_{m, \Omega}}$. Тут через $\bar{v} = \bar{v}(\mathbf{x})$ позначено функцію, комплексно-спряжену до функції $v = v(\mathbf{x})$. Введемо та-

кож простір $\mathbf{H} = [L^2(\Omega)]^d$ і простір антилінійних обмежених функціоналів \mathbf{V}' , визначених на \mathbf{V} (\mathbf{V}' – простір, двоїстий до простору \mathbf{V}) [8, 12]. Тоді задачу (1)–(6) можемо переписати у такому варіаційному формулюванні:

$$\text{задано:} \quad \mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}, \quad \ell \in L^2(0, T; \mathbf{V}'),$$

$$\text{знайти:} \quad \mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \quad \text{такий, що}$$

$$\begin{aligned} m(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) &= \langle \ell(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall t \in (0, T), \\ m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad c(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут півторалінійні та антилінійні форми означено таким чином [8, 12]:

$$m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \rho u_i \bar{v}_i \, dx = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} \, dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \quad (9)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{kl}(\bar{\mathbf{v}}) \, dx,$$

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{kl}(\bar{\mathbf{v}}) \, dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (10)$$

$$\langle \ell, \bar{\mathbf{v}} \rangle := \int_{\Omega} \rho f_i \bar{v}_i \, dx + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{\sigma}_i \bar{v}_i \, d\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}. \quad (11)$$

За допущень (4) і регулярності густини та модулів пружності і в'язкості

$$\rho, c_{ijkl}, a_{ijkl} \in L^{\infty}(\Omega) \quad (12)$$

можна показати [4, 10, 13], що півторалінійні форми (9) і (10) неперервні, більше цього, форма (9) є \mathbf{H} -еліптичною, а форми (10) – \mathbf{V} -еліптичними. Ці фундаментальні властивості дозволяють ввести енергетичні норми

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_m^2 &= m(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \\ \|\mathbf{v}\|_c^2 &= c(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad \|\mathbf{v}\|_a^2 = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Доповнюючи об'ємне і поверхневе навантаження умовами регулярності

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{H}), \quad \hat{\sigma} \in L^2(0, T; [L^2(\Gamma_{\sigma})]^d), \quad (13)$$

можна довести [10, 13], що $\ell \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$. У працях [4, 10] встановлено, що задача (8) має єдиний розв'язок $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$. Цей результат ґрунтується на аналізі рівняння балансу енергії

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\mathbf{u}'(t)\|_m^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_c^2 \right] + \|\mathbf{u}'(t)\|_a^2 = \langle \ell(t), \bar{\mathbf{u}}'(t) \rangle \quad \forall t \in (0, T), \quad (14)$$

яке після інтегрування на довільному інтервалі часу $[0, t] \subseteq [0, T]$ і врахування початкових умов із (8) набуває такого вигляду [4, с. 87, 88]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{u}'(t)\|_m^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_c^2 \right] + \int_0^t \|\mathbf{u}'(\tau)\|_a^2 \, d\tau &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{v}_0\|_m^2 + \|\mathbf{u}_0\|_c^2 \right] + \int_0^t \langle \ell(\tau), \bar{\mathbf{u}}'(\tau) \rangle \, d\tau \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут вираз $\frac{1}{2} \|\mathbf{u}'(t)\|_m^2$ визначає кінетичну енергію, $\frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_c^2$ – потенці-

альну енергію, $\|\mathbf{u}'(t)\|_a^2$ – енергію дисипації, а права частина (15) – енергію зовнішніх навантажень на момент часу t .

2. Задача про вимушені гармонічні коливання. Припустимо, що на пружне тіло діють гармонічні навантаження із заданою круговою частотою $\omega > 0$ такого вигляду:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) &= [\mathbf{f}_R(\mathbf{x}) + i\mathbf{f}_I(\mathbf{x})]e^{-i\omega t} = \mathbf{F}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, & i &= \sqrt{-1}, \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) &= [\hat{\boldsymbol{\sigma}}_R(\mathbf{x}) + i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_I(\mathbf{x})]e^{-i\omega t} = \mathbf{S}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \\ \ell(t) &= (\ell_R + i\ell_I)e^{-i\omega t} = \mathbf{L}e^{-i\omega t} & \forall t \in (0, T].\end{aligned}\quad (16)$$

З огляду на ефекти в'язкості знехтуємо початковими умовами задачі (8) і шукатимемо її наближений розв'язок у вигляді такого розвинення:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cong [\mathbf{u}_R(\mathbf{x}) + i\mathbf{u}_I(\mathbf{x})]e^{-i\omega t} = \mathbf{U}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad (17)$$

де вектори $\mathbf{u}_R = \mathbf{u}_R(\mathbf{x})$ і $\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_I(\mathbf{x})$ є дійсними складовими шуканої амплітуди пружного зміщення. Надалі нас буде цікавити лише дійсна частина цього комплекснозначного розв'язку:

$$\mathbf{u}_*(\mathbf{x}, t) := \mathbf{u}_R(\mathbf{x}) \cos \omega t + \mathbf{u}_I(\mathbf{x}) \sin \omega t. \quad (18)$$

Підставляючи вирази (16) і (17) у (8) і нехтуючи початковими умовами, приходимо до варіаційної задачі про гармонічні коливання:

$$\begin{aligned}\text{задано:} & \quad \omega \geq 0 \quad i \quad \mathbf{L} \in \mathbf{V}'; \\ \text{знайти:} & \quad \mathbf{U} \in \mathbf{V} \quad \text{такий, що}\end{aligned}$$

$$c(\mathbf{w}, \mathbf{v}) - \omega^2 m(\mathbf{w}, \mathbf{v}) - i\omega a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{L}, \bar{\mathbf{v}} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (19)$$

або в розширеному записі:

$$\text{задано:} \quad \omega > 0 \quad i \quad (\ell_R, \ell_I) \in \mathbf{W}' = \mathbf{V}' \times \mathbf{V}';$$

$$\text{знайти:} \quad \boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I) \in \mathbf{W} \quad \text{такий, що для всіх} \quad \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{W}$$

$$\begin{aligned}c_*(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) - \omega^2 m_*(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) + \omega [a(\mathbf{u}_I, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_R, \mathbf{w})] + \\ + i [\pi_\omega(\mathbf{u}_I, \mathbf{v}) - \pi_\omega(\mathbf{u}_R, \mathbf{w}) - \omega a_*(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi})] = \\ = \langle \ell_R, \mathbf{v} \rangle + \langle \ell_I, \mathbf{w} \rangle + i [\langle \ell_I, \mathbf{v} \rangle - \langle \ell_R, \mathbf{w} \rangle],\end{aligned}\quad (20)$$

де

$$\begin{aligned}\pi_\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= c(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \omega^2 m(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \\ c_*(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) &= c(\mathbf{u}_R, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_I, \mathbf{w}), \quad m_*(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) = m(\mathbf{u}_R, \mathbf{v}) + m(\mathbf{u}_I, \mathbf{w}), \\ a_*(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) &= a(\mathbf{u}_R, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}_I, \mathbf{w}) \quad \forall \boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I), \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{W}.\end{aligned}\quad (21)$$

Відокремлюючи дійсну та уявну частини (20), приходимо до задачі з дійсними змінними, яка надалі буде основним об'єктом цього дослідження.

Теорема 1 (про дійсні складові амплітуди зміщень). Варіаційна задача (20) еквівалентна такій задачі:

$$\text{знайти:} \quad \boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I) \in \mathbf{W} = \mathbf{V} \times \mathbf{V} \quad \text{такий, що}$$

$$\begin{aligned}\pi_\omega(\mathbf{u}_R, \mathbf{v}) + \omega a(\mathbf{u}_I, \mathbf{v}) &= \langle \ell_R, \mathbf{v} \rangle, \\ \pi_\omega(\mathbf{u}_I, \mathbf{w}) - \omega a(\mathbf{u}_R, \mathbf{w}) &= \langle \ell_I, \mathbf{w} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{W}.\end{aligned}\quad (22)$$

Із задачі (22) видно, що її рівняння взаємно пов'язані лише доданками, які описують ефекти в'язкості. Нехтування ними приводить до незалежного відшукання компонент амплітуди переміщень як розв'язків такої задачі:

знайти вектори $\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I \in \mathbf{V}$ такі, що

$$\begin{aligned}\pi_\omega(\mathbf{u}_R, \mathbf{v}) &= \langle \ell_R, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \pi_\omega(\mathbf{u}_I, \mathbf{v}) &= \langle \ell_I, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.\end{aligned}\tag{23}$$

Зауважимо, що при $\omega = 0$ задача (23) вироджується у дві задачі еластостатики, розв'язанню яких h -адаптивними схемами МСЕ присвячено праці авторів [2, 3].

3. Коректність задачі про гармонічну хвилю. Щоб переконатися у розв'язності задачі (22), введемо такі лінійний функціонал $\chi : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{R}$ і білінійну форму $\Pi_\omega : \mathbf{W} \times \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\langle \chi, \boldsymbol{\varphi} \rangle &:= -\langle \ell_I, \mathbf{v} \rangle + \langle \ell_R, \mathbf{w} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{W}, \\ \Pi_\omega(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) &:= \omega a_*(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) + \pi_\omega(\mathbf{u}_R, \mathbf{w}) - \pi_\omega(\mathbf{u}_I, \mathbf{v}) \\ &\quad \forall \boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I), \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{W}.\end{aligned}$$

У цих позначеннях варіаційну задачу (22) перепишемо так:

задано: $\omega > 0, \quad \chi \in \mathbf{W}'$;

знайти: $\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I) \in \mathbf{W}$ такий, що

$$\Pi_\omega(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) = \langle \chi, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{W}.\tag{24}$$

Означимо на просторі \mathbf{W} скалярний добуток

$$(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi})_a := a_*(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) \equiv a(\mathbf{u}_R, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}_I, \mathbf{w}) \quad \forall \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}$$

і асоційовану з ним норму $\|\boldsymbol{\varphi}\|_a^2 = a_*(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}$.

Повторюючи міркування з [10, 13], одержимо такі апріорні оцінки:

$$\begin{aligned}|\Pi_\omega(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi})| &\leq M(\omega) \|\boldsymbol{\psi}\|_a \cdot \|\boldsymbol{\varphi}\|_a \quad \forall \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}, \\ M(\omega) &= \max\{1, \omega, \omega^2\},\end{aligned}\tag{25}$$

$$|\langle \chi, \boldsymbol{\varphi} \rangle| \leq \|\chi\|_* \cdot \|\boldsymbol{\varphi}\|_a, \quad \|\chi\|_* = \sup_{0 \neq \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}} \frac{|\langle \chi, \boldsymbol{\varphi} \rangle|}{\|\boldsymbol{\varphi}\|_a}.\tag{26}$$

Зазначимо, що білінійна форма $\Pi_\omega : \mathbf{W} \times \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{R}$ є \mathbf{W} -еліптичною:

$$\Pi_\omega(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}) = \omega \|\boldsymbol{\varphi}\|_a^2 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}, \quad \forall \omega > 0.\tag{27}$$

Як наслідок одержаних оцінок (25)–(27) і теореми Лакса – Мільграма – Вишика (див., наприклад, [4, 8, 12, 13]) сформулюємо таке твердження.

Теорема 2 (стосовно коректності задачі про гармонічні коливання). Для кожного $\omega > 0$ варіаційна задача (24) або еквівалентна їй задача (22) має єдиний розв'язок $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{W}$ такий, що

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_a \leq \omega^{-1} \|\chi\|_*.$$

На завершення аналізу варіаційної задачі (24) відмітимо факт, який характеризує її хвильову природу.

Теорема 3 (про еквівалентність). *Варіаційна задача (24) еквівалентна такій задачі про сідлову точку:*

задано: $\omega \geq 0$;

знайти: $\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I) \in \mathbf{W}$ такий, що

$$\mathcal{L}(\omega; \mathbf{v}, \mathbf{u}_I) \leq \mathcal{L}(\omega; \mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I) \leq \mathcal{L}(\omega; \mathbf{u}_R, \mathbf{w}) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{W}, \quad (28)$$

де лагранжіан $\mathcal{L} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{R}$ визначається згідно з правилом

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\omega; \mathbf{v}, \mathbf{w}) := & \pi_\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \frac{1}{2} \omega [a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - a(\mathbf{v}, \mathbf{v})] + \\ & + \langle \ell_R, \mathbf{w} \rangle - \langle \ell_I, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (29)$$

На додаток, $\mathcal{L}(\omega; \mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I) = -\frac{1}{2} [\langle \ell_R, \mathbf{u}_I \rangle + \langle \ell_I, \mathbf{u}_R \rangle]$.

Д о в е д е н н я цього альтернативного формулювання задачі про гармонічні хвилі проводимо аналізуючи приріст лагранжіана в околі розв'язку $\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I) \in \mathbf{W}$ задачі (24) або еквівалентної їй задачі (22). Зокрема, з огляду на перше з її рівнянь отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\omega; \mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I + \varepsilon \mathbf{v}) - \mathcal{L}(\omega; \mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I) = & \varepsilon [\pi_\omega(\mathbf{u}_R, \mathbf{v}) + \omega a(\mathbf{u}_I, \mathbf{v}) - \langle \ell_R, \mathbf{v} \rangle] + \\ & + \frac{1}{2} \omega \varepsilon^2 a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \omega \varepsilon^2 a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0 \\ & \forall \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{0}, \mathbf{v}) \in \mathbf{W}, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Подібно отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\omega; \mathbf{u}_R + \varepsilon \mathbf{v}, \mathbf{u}_I) - \mathcal{L}(\omega; \mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I) = & \varepsilon [\pi_\omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}_I) - \omega a(\mathbf{u}_R, \mathbf{v}) - \langle \ell_I, \mathbf{v} \rangle] - \\ & - \frac{1}{2} \omega \varepsilon^2 a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2} \omega \varepsilon^2 a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0 \\ & \forall \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{v}, \mathbf{0}) \in \mathbf{W}, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Одержані нерівності показують, що $\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I) \in \mathbf{W}$ одночасно є розв'язком (29). Обернене твердження теж є наслідком цих нерівностей. \blacklozenge

4. Енергетичні характеристики гармонічних хвиль.

Теорема 4 (про енергетичні характеристики). *Нехай $\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I) \in \mathbf{W}$ – розв'язок задачі (24), а отже, і задачі (22). Нехай*

$$\mathfrak{R}(\omega; \boldsymbol{\varphi}) := \|\boldsymbol{\varphi}\|_c^2 - \omega^2 \|\boldsymbol{\varphi}\|_m^2 \quad \forall \omega \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}. \quad (30)$$

Тоді будуть правильними рівності

$$\mathfrak{R}(\omega; \boldsymbol{\psi}) = \langle \ell_R, \mathbf{u}_R \rangle + \langle \ell_I, \mathbf{u}_I \rangle, \quad (31)$$

$$\omega \|\boldsymbol{\psi}\|_a^2 = \langle \ell_R, \mathbf{u}_I \rangle - \langle \ell_I, \mathbf{u}_R \rangle, \quad (32)$$

$$2\omega a(\mathbf{u}_I, \mathbf{u}_R) + \pi_\omega(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_R) - \pi_\omega(\mathbf{u}_I, \mathbf{u}_I) = \langle \ell_R, \mathbf{u}_R \rangle - \langle \ell_I, \mathbf{u}_I \rangle, \quad (33)$$

$$2\pi_\omega(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I) + \omega [a(\mathbf{u}_I, \mathbf{u}_I) - a(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_R)] = \langle \ell_R, \mathbf{u}_I \rangle + \langle \ell_I, \mathbf{u}_R \rangle. \quad (34)$$

Тут, крім норми $\|\boldsymbol{\varphi}\|_a^2 = a_*(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi})$, впроваджено такі норми:

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_c^2 := c_*(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}), \quad \|\boldsymbol{\varphi}\|_m^2 := m_*(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}. \quad (35)$$

Д о в е д е н н я кожного із тверджень (31)–(34) зводиться до таких алгебричних обчислень. Додавши результати підстановок $\mathbf{v} = \mathbf{u}_R$, $\mathbf{w} = \mathbf{u}_I$ у

рівняння задачі (22), приходимо до рівності (31). Віднімаючи результат підстановки $\mathbf{w} = \mathbf{u}_R$ у друге з рівнянь (22) від результату підстановки $\mathbf{v} = \mathbf{u}_I$ у перше з них, одержимо (32) і т. д. \blacklozenge

Зауваження. (i) Рівності (32)–(34) також можна одержати як результат підстановки розвинень (16) і (17) у рівняння енергетичного балансу (14).

(ii) Рівностями (31) і (32) подаються двоїсті правила обчислення значень $\mathfrak{R}(\omega; \boldsymbol{\psi})$ і норми $\|\boldsymbol{\psi}\|_a^2$ як певні комбінації значень лінійних функціоналів $\ell_R \in \mathbf{V}'$ і $\ell_I \in \mathbf{V}'$ на розв'язку задачі (24). Цей факт дозволяє значно знизити обчислювальні витрати на використання $\mathfrak{R}(\omega; \cdot)$ та $\|\cdot\|_a^2$ як важливих інструментів контролю якості наближених розв'язків.

5. Дискретизація методом скінченних елементів. Наближений розв'язок варіаційної задачі (24) за допомогою методу скінченних елементів [4, 14] будемо у скінченновимірному просторі

$$\mathbf{W}_h := \Phi_h \times \Phi_h, \quad \Phi_h \subset \Phi, \quad \dim \mathbf{W}_h = N(h) < +\infty,$$

базисні функції якого конструюються з використанням певної триангуляції $\mathfrak{T}_h = \{K\}$ області Ω , $h_K = \text{diam } K$, $h = \max_{K \in \mathfrak{T}_h} h_K$. Отже, апроксимація МСЕ є розв'язком коректно сформульованої задачі:

$$\text{задано:} \quad \omega > 0, \quad \chi \in \mathbf{W}', \quad \mathbf{W}_h \subset \mathbf{W}, \quad \dim \mathbf{W}_h < +\infty;$$

$$\text{знайти:} \quad \boldsymbol{\psi}_h = (\mathbf{u}_R^h, \mathbf{u}_I^h) \in \mathbf{W}_h \quad \text{такий, що}$$

$$\Pi_\omega(\boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\phi}) = \langle \chi, \boldsymbol{\phi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{W}_h. \quad (36)$$

Як і в статті [2], виберемо множину лінійно незалежних кусково-визначених поліномів $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbf{V}$, $n = n(h) \rightarrow \infty$, з $h \rightarrow 0$, побудованих на триангуляції $\mathfrak{T}_h = \{K\}$, і утворимо підпростір $\mathbf{V}_h = \text{span}[\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n]$. Тоді шукана апроксимація $\boldsymbol{\psi}_h = (\mathbf{u}_R^h, \mathbf{u}_I^h)$ матиме вигляд

$$\boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}_R^h(\mathbf{x}), \mathbf{u}_I^h(\mathbf{x})) = \left(\sum_{i=1}^n q_i \mathbf{v}_i(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) \right), \quad (37)$$

і з огляду на (36) вектори невідомих коефіцієнтів $\mathbf{Q}_R = \{q_i\}_{i=1}^n$ та $\mathbf{Q}_I = \{z_i\}_{i=1}^n$ будуть розв'язками системи алгебричних рівнянь

$$\left\| \begin{array}{cc} \omega \mathbf{A} & \omega^2 \mathbf{M} - \mathbf{C} \\ -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C} & \omega \mathbf{A} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{Q}_R \\ \mathbf{Q}_I \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{L}_I \\ \mathbf{L}_R \end{array} \right\|. \quad (38)$$

Тут матриці і вектори правих частин обчислюються за формулами

$$\mathbf{A} = \{a(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)\}_{i,j=1}^n, \quad \mathbf{M} = \{m(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)\}_{i,j=1}^n, \quad \mathbf{C} = \{c(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)\}_{i,j=1}^n,$$

$$\mathbf{L}_I = \{\langle \ell_I, \mathbf{v}_i \rangle\}_{i=1}^n, \quad \mathbf{L}_R = \{\langle \ell_R, \mathbf{v}_i \rangle\}_{i=1}^n.$$

Обчислена таким чином апроксимація $\boldsymbol{\psi}_h = (\mathbf{u}_R^h, \mathbf{u}_I^h)$ є квазіоптимальною, тобто

$$\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_a \leq \omega^{-1} M(\omega) \inf_{\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{W}_h} \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\phi}\|_a \quad \forall \omega > 0, \quad \forall h > 0. \quad (39)$$

Крім того, якщо точний розв'язок $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{W} \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{2d}$ з деяким $k \geq 1$, а базисні функції $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ на кожному скінченному елементі побудовано з

використанням повних поліномів порядку k , тоді з огляду на інтерполяційність такого базису оцінка (39) уточнюється до вигляду [4]

$$\|\Psi - \Psi_h\|_a \leq \omega^{-1} M(\omega) C \cdot h^k \|\Psi\|_{k+1, \Omega} \quad \forall \omega > 0, \quad \forall h > 0, \quad (40)$$

де $C = \text{const} > 0$ не залежить від величин, які нас цікавлять. Апріорна оцінка (40) визначає порядок збіжності $p(\Psi_h) = k$ послідовності похибок апроксимацій $\{\Psi_h\}$, але з огляду на наявність у ній невизначеного значення сталої C не надає детальнішої характеристики похибки стосовно конкретно обчисленої апроксимації Ψ_h .

6. Апостеріорний оцінювач похибок і h -адаптивний МСЕ. Щоб оцінити похибку $\mathbf{e}_h = \Psi - \Psi_h \in \mathbf{W} \setminus \mathbf{W}_h$ знайденої апроксимації Ψ_h , використаємо поелементно визначений апостеріорний оцінювач похибки (АОП) [1–5] $\boldsymbol{\varepsilon}_h = \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{x})$, норма якого обчислюється за правилом

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_h\| \equiv \eta(\Psi_h) := \left(\sum_{K \in \mathfrak{T}_h} \eta_K^2(\Psi_h) \right)^{1/2}. \quad (41)$$

Відшукування індикатора похибки $\|\boldsymbol{\varepsilon}_h\|_K = \eta_K(\Psi_h) = |\Re(\omega, \Psi_h)| \Big|_K$ на кожному елементі $K \in \mathfrak{T}_h$ зводиться до розв'язання дискретизованої за Гальоркінім задачі про лишок апроксимації МСЕ [6, 7, 16]:

$$\text{задано:} \quad \Psi_h = (\mathbf{u}_R^h, \mathbf{u}_I^h) \in \mathbf{W}_h \subset \mathbf{W}, \quad \dim \mathbf{W}_h < +\infty;$$

$$\text{знайти:} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_h = (\boldsymbol{\varepsilon}_R^h, \boldsymbol{\varepsilon}_I^h) \in \mathbf{E}_h, \quad \mathbf{W}_h \oplus \mathbf{E}_h \subset \mathbf{W}, \quad \text{такий, що}$$

$$\Pi_\omega(\boldsymbol{\varepsilon}_h, \boldsymbol{\varphi}) = \langle \chi, \boldsymbol{\varphi} \rangle - \Pi_\omega(\Psi_h, \boldsymbol{\varphi}) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{E}_h, \quad (42)$$

з використанням поелементно визначених кубічних бульбашкових функцій (див. [2, 5]). З огляду на природну ортогональність таких базисних функцій, розглядувана задача (42) зводиться [1] до послідовного розв'язування систем алгебричних рівнянь порядку $2d$ на кожному скінченному елементі $K \in \mathfrak{T}_h$.

Для отримання розв'язку вихідної задачі з наперед заданою точністю запропоновано такий алгоритм процедури рекурсивного уточнення апроксимацій за допомогою локального покращення триангуляцій:

- 1°) задаємо рівень толерантності tol ;
- 2°) будуємо початкову грубу триангуляцію \mathfrak{T}^0 області Ω і підпростір $\mathbf{W}^0 \subset \mathbf{W}$, $m = 0$;
- 3°) обчислюємо апроксимацію $\Psi_h \in \mathbf{W}^m$, розподіл індикаторів $\{\eta_K(\Psi_h)\}_{K \in \mathfrak{T}^m}$ і значення апостеріорного оцінювача $\eta(\Psi_h)$;
- 4°) якщо кожен елемент K триангуляції \mathfrak{T}^m задовольняє критерій

$$\alpha_K := \frac{\eta_K(\Psi_h) \sqrt{\text{card } \mathfrak{T}^m}}{\text{tol} \cdot \sqrt{|\Re(\omega; \Psi_h)| + \eta^2(\Psi_h)}} \leq 1, \quad (43)$$

то процес уточнення апроксимацій завершено;

- 5°) інакше, кожен елемент K підмножини $\mathfrak{T}_*^m := \{K \in \mathfrak{T}^m : \alpha_K \geq 1\}$ ділимо на α_K елементів однакової площі так, щоб локально покращена триангуляція \mathfrak{T}^{m+1} залишалася триангуляцією Делоне;
- 6°) повертаємось на крок 3° алгоритму.

7. Результати числових експериментів. У постановці плоскої задачі теорії пружності дослідимо поведінку гармонічних хвиль у квадратній плиті з отвором. Для дослідження вибрано квадратну алюмінієву плиту (з ребром $a = 1$ м), в центрі якої розміщено квадратний отвір (з ребром $b = 0.5$ м). Густина маси плити $\rho = 2698$ кг/м³, модуль Юнга $E = 70$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.33$. У площині x_1Ox_2 плита займає область $\Omega = \Omega_0 \setminus \Omega_1$, де

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 1 \leq x_1, x_2 \leq 2\},$$

$$\Omega_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : |x_i - 1.5| \leq 0.5, i = 1, 2\}.$$

Приймаємо, що зовнішнє нижнє ребро ($x_2 = 1$) жорстко зацемлене, зовнішнє лівє ребро ($x_1 = 1$) навантажене тиском $\hat{\sigma}(\mathbf{x}, t) = P \cos(\omega t)$, $P = 1$ МПа, решта ребер плити вільні від навантажень.

Спочатку задачу аналізували в постановці статички ($\omega = 0$). Щоб досягнути рівня допустимої похибки (толерантності) $\text{tol} = 3\%$, було виконано 15 кроків адаптування тріангуляцій Делоне $\text{card } \mathfrak{Z}_h^{15} = 1425$ з переобчисленнями кусково-квадратичних апроксимацій переміщень. (Тут \mathfrak{Z}_h^m – тріангуляція, обчислена на m -му кроці адаптування.) На рис. 1 наведено розподіли модулів переміщень $|\psi_h|$ (рис. 1а) і головних напружень $\sigma_{\max}(\psi_h(\mathbf{x}))$ (рис. 1б), обчислених за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \left[\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \right].$$

В околах концентраторів напружень (вершини внутрішніх кутів і точки переходу від жорсткого зацемлення до силового навантаження) спостерігаємо різкі піки значень головних напружень

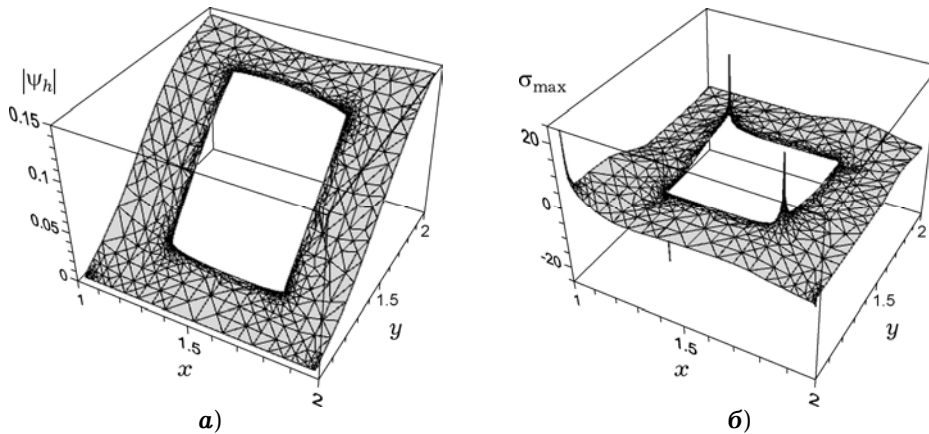


Рис. 1. Розподіл на сітці з $\text{card } \mathfrak{Z}_h^{15} = 1425$, $\omega = 0$: а) – модуль переміщень $|\psi_h(\mathbf{x})| \cdot 10^3$ [м]; б) – напружень $\sigma_{\max}(\psi_h(\mathbf{x}))$ [МПа].

Мета наших експериментів при значеннях $\omega > 0$: 1) визначити околи найменших частот резонансу конструкції при обчисленнях з $\text{tol} = 3\%$; 2) в околах резонансів оцінити ефективність h -адаптивної схеми МСЕ порівнянням зі схемою з рівномірним згущенням сіток; 3) охарактеризувати зміни механічних полів в конструкції при переході через точки резонансу.

Залежності характерної частоти конструкції від кругової частоти ω обчислювали як нульові значення $\Re(\omega; \psi_h)$. При цьому апроксимації ψ_h знаходили з толеранцією $\text{tol} = 3\%$ до похибки згідно з критерієм (43). На проміжку $0 \leq \omega \leq 6000$ було виявлено дві частоти резонансу з такими околами: $1970 \leq \omega_1 \leq 1980$ та $5840 \leq \omega_2 \leq 5850$.

На рис. 2 наведено залежність функції

$$\mathfrak{R}(\omega; \boldsymbol{\psi}_h) := \|\boldsymbol{\psi}_h\|_c^2 - \omega^2 \|\boldsymbol{\psi}_h\|_m^2$$

від кругової частоти ω . Добре видно, що в околах резонансів функція \mathfrak{R} стрибкоподібно змінює знак з додатних значень на від'ємні. На дорезонансних частотах значення потенціальної енергії значно перевищує значення кінетичної енергії, на резонансній частоті їхні значення раптово врівноважуються і на післярезонансних – значення кінетичної енергії значно перевищує значення потенціальної енергії. У такому порядку вони приходять до нульових значень на частоті антирезонансу, після чого спостерігається знову прискорений ріст потенціальної енергії і т. д.

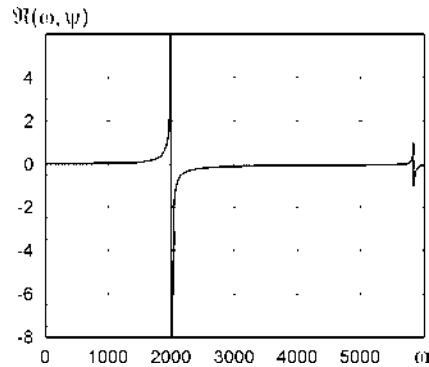


Рис. 2. Залежність функції $\mathfrak{R}(\omega; \boldsymbol{\psi}_h)$ від кругової частоти ω .

На рис. 3а, б показано, як змінюються дорезонансні, $\omega = 1970 < \omega_1$, та післярезонансні, $\omega = 1980 > \omega_1$, максимальні головні напруження σ_{\max} , обчислені з використанням h -адаптивної схеми МСЕ.

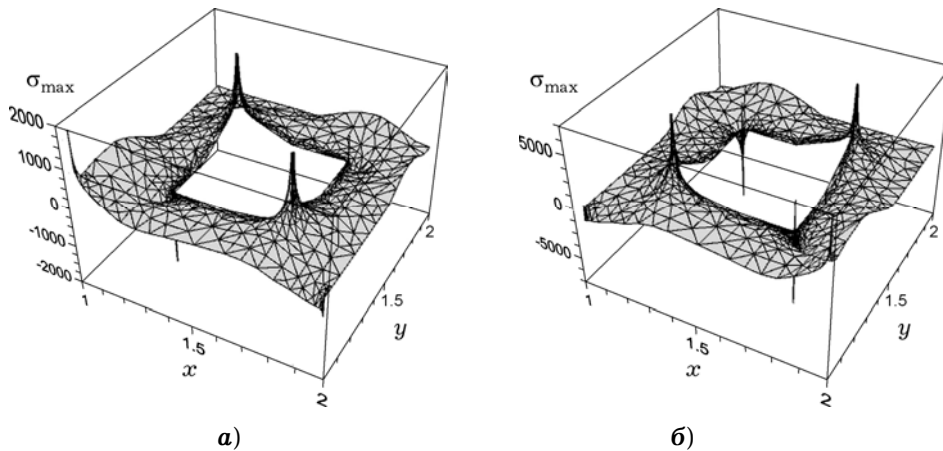


Рис. 3. Максимальні головні напруження σ_{\max} [МПа], адаптовані сітки, $\text{tol} = 3\%$:

а) – $\omega = 1970 < \omega_1$, $\text{card } \mathfrak{T}_h^{14} = 1277$, $\mathfrak{R}(\omega; \boldsymbol{\psi}_h) = 8775.52$, $p(\boldsymbol{\psi}_h) = 3.81$;

б) – $\omega = 1980 > \omega_1$, $\text{card } \mathfrak{T}_h^{14} = 1273$, $\mathfrak{R}(\omega; \boldsymbol{\psi}_h) = -35958$, $p(\boldsymbol{\psi}_h) = 2.65$.

Деякі числові результати, які характеризують відмінність адаптивного та рівномірного згущення сіток, наведено в табл. 1 та табл. 2 відповідно. Тут $N_{\text{el}} = \text{card } \mathfrak{T}_h$, N_{nod} – кількість вузлів триангуляції \mathfrak{T}_h , $p_k = p_k(\boldsymbol{\psi}_h)$ – порядки збіжності схем у нормах $[H^k(\Omega)]^2$, $k = 0, 1$, $\delta_h := \|\boldsymbol{\epsilon}_h\| \cdot \|\boldsymbol{\psi}_h\|^{-1} \cdot 100\%$.

Таблиця 1. Збіжність апроксимацій h -адаптивної схеми, $\text{tol} = 1\%$, $\omega = 1970$.

| m | N_{el} | N_{nod} | $\Re_h(\omega; \Psi_h)$ | $\ \varepsilon_h\ $ | p_1 | $\ \varepsilon_h\ _H \cdot 10^6$ | p_0 | δ_h |
|-----|-----------------|------------------|-------------------------|---------------------|-------|----------------------------------|-------|------------|
| 0 | 12 | 36 | 213.688 | 7.4959 | | 1.53030 | | 25.42 |
| 1 | 449 | 991 | 2485.27 | 17.7553 | -0.48 | 0.62604 | 0.49 | 5.30 |
| 2 | 1790 | 3766 | 6390.99 | 20.9453 | -0.24 | 0.20707 | 1.60 | 2.43 |
| 3 | 2865 | 5987 | 8668.90 | 12.4495 | 2.21 | 0.10923 | 2.72 | 1.07 |
| 4 | 3429 | 7171 | 9402.69 | 8.09627 | 4.79 | 0.10046 | 0.93 | 0.64 |
| 5 | 3713 | 7765 | 9548.90 | 6.71635 | 4.70 | 0.09118 | 2.44 | 0.52 |

Таблиця 2. Збіжність апроксимацій MSE на рівномірно згущуваних сітках, $\omega = 1970$.

| m | N_{el} | N_{nod} | $\Re_h(\omega; \Psi_h)$ | $\ \varepsilon_h\ $ | p_1 | $\ \varepsilon_h\ _H \cdot 10^6$ | p_0 | δ_h |
|-----|-----------------|------------------|-------------------------|---------------------|-------|----------------------------------|-------|------------|
| 0 | 12 | 36 | 213.688 | 7.4959 | | 1.53030 | | 25.42 |
| 1 | 48 | 120 | 668.384 | 11.5746 | -0.63 | 1.26192 | 0.28 | 13.01 |
| 2 | 192 | 432 | 1555.77 | 14.1221 | -0.29 | 0.75962 | 0.73 | 6.79 |
| 3 | 768 | 1632 | 2926.01 | 16.8979 | -0.26 | 0.45451 | 0.74 | 4.28 |
| 4 | 3072 | 6336 | 4689.36 | 18.2290 | -0.11 | 0.24532 | 0.89 | 2.88 |
| 5 | 12288 | 24960 | 6485.80 | 17.1921 | 0.08 | 0.11572 | 1.08 | 1.97 |

Відмітимо, що адаптивна схема: **1)** з $\text{tol} = 1\%$ демонструє монотонну збіжність послідовності апроксимацій з ефектом суперзбіжності (перевищенням передбачуваного теорією порядку збіжності, в нашому випадку $p_1 = 2$); **2)** завершує обчислення за 5 кроків локального покращення структури сіток зі значно меншими похибками (приблизно втричі), ніж в апроксимаціях на рівномірних сітках; **3)** вимагає на останньому кроці приблизно втричі меншої кількості скінченних елементів.

На рис 4 і рис. 5 подано розподіли знайдених апроксимацій максимальних головних напружень σ_{max} і модуля переміщень $|\Psi_h(\mathbf{x})| \cdot 10^3$ в околах резонансних частот ω_1, ω_2 .

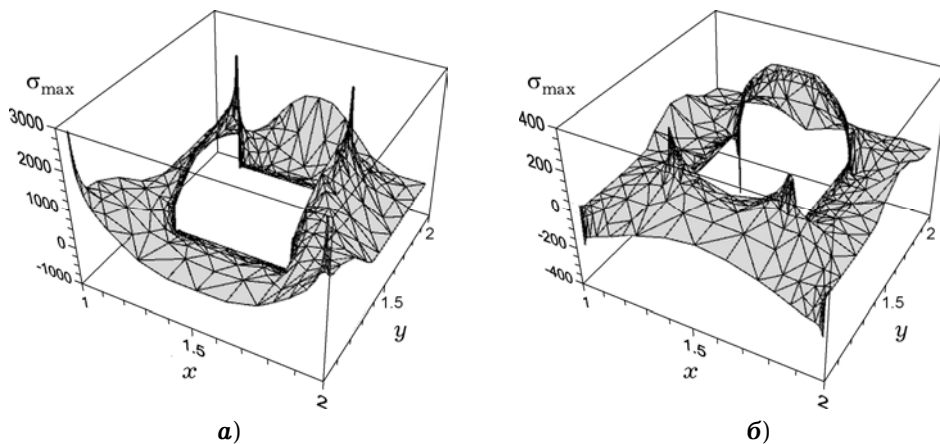


Рис. 4. Напруження σ_{max} [МПа], адаптовані сітки, $\text{tol} = 3\%$:

а) – $\omega = 5840 < \omega_2$, $\text{card } \mathfrak{I}_h^{10} = 564$, $\Re(\omega; \Psi_h) = 3805.3$, $p(\Psi_h) = -1.56$;

б) – $\omega = 5850 > \omega_2$, $\text{card } \mathfrak{I}_h^{11} = 547$, $\Re(\omega; \Psi_h) = -987.216$, $p(\Psi_h) = 3.24$.

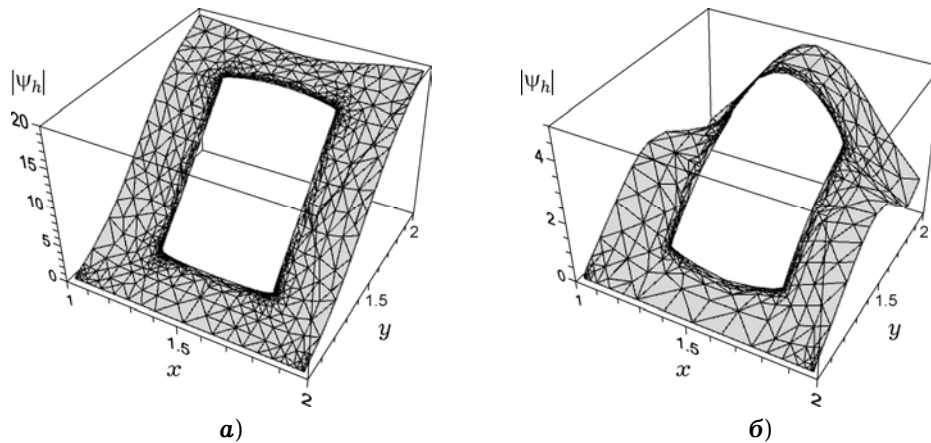


Рис. 5. Розподіл модуля переміщень $|\psi_h(\mathbf{x})| \cdot 10^3$ [м], адаптовані сітки, $\text{tol} = 3\%$:
 а) – $\omega = 1970 < \omega_1$, б) – $\omega = 5850 > \omega_2$.

Висновки і заключні зауваження. На основі задачі еластодинаміки в'язкопружного тіла з короткочасною пам'яттю в термінах вектора амплітуд пружних зміщень сформульовано варіаційну задачу про гармонічну хвилю, яка породжується розподіленими навантаженнями заданої кругової частоти. Показано, що гіперболічна природа цієї задачі породжує еквівалентну задачу про сідлову точку лагранжіана. Доведено коректність і однозначну розв'язність цієї задачі в термінах вектора амплітуд пружних зміщень.

Серед енергетичних характеристик гармонічних хвиль вирізнено дисипативну норму $\|\cdot\|_a$ та різницю $\mathfrak{R}(\omega; \cdot) = \|\cdot\|_c^2 - \omega^2 \|\cdot\|_m^2$, які, з одного боку, легко обчислюються як значення лінійних функціоналів на апроксимаціях розв'язків, а з іншого боку, дозволяють розпізнати до- і післярезонансні частоти та локалізувати їх околиці з необхідною точністю. За відсутності в'язкості $\mathfrak{R}(\omega; \cdot)$ стає основним інструментом обчислення апостеріорних оцінок похибок і критерію адаптування.

Аналіз числових результатів показав, що розглядувані задачі ефективно розв'язуються h -адаптивним МСЕ з використанням $\mathfrak{R}(\omega; \cdot)$ як норми, а також продемонстрував ефекти суперзбіжності скрізь, крім вузьких околиць резонансів. Більше цього, ці числові експерименти засвідчили значну перебудову структури розподілу максимальних головних напружень при переході через точки резонансів, у той же час модуль амплітуд переміщень змінює свою форму в околицях точок антирезонансів.

1. Квасниця Г., Чабан Ф., Шинкаренко Г. Аналіз задач про вимушені гармонійні вібрування пружних тіл та побудова надійних апроксимацій МСЕ для їхніх розв'язків // Вісн. Львів. ун-ту. Сер.: Прикл. математика та інформатика. – 2013. – Вип. 20. – С. 19–33.
2. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2002. – Вип. 5. – С. 95–106.
3. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Порівняння простих апостеріорних оцінювачів похибок методу скінченних елементів для задач еластостатики // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2003. – Вип. 7. – С. 162–174.
4. Трушевський В. М., Шинкаренко Г. А., Щербина Н. М. Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі: теоретичні аспекти та застосування. – Львів: Видавн. центр Львів. нац. ун-ту ім. І. Франка, 2014. – 394 с.
5. Чабан Ф. В., Шинкаренко Г. А. Апостеріорні оцінювачі похибок скінченноелементних апроксимацій для задачі про вимушені гармонічні коливання п'єзоелектриків // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 4. – С. 88–98.

- Te same: Chaban F. V., Shynkarenko H. A. A posteriori error estimators of finite-element approximations for problems of forced harmonic vibrations of piezoelectrics // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 2. – P. 229–242.
6. Ainsworth M., Oden J. T. A posteriori error estimation in finite element analysis. – New York: Wiley, 2000. – 240 p.
 7. Babuška I., Whiteman J. R., Strouboulis T. Finite elements: an introduction to the method and error estimation. – Oxford: Oxford University Press, 2011. – 336 p.
 8. Dautray R., Lions J.-L. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 2. Functional and variational methods. – Berlin: Springer, 2000. – xvi+590 p.
 9. De Silva C. W. Vibration damping, control, and design. – Boca Raton: CRC Press, 2007. – 634 p.
 10. Duvaut G., Lions J.-L. Inequalities in mechanics and physics. – Berlin: Springer, 1976. – xvi+397 p.
 11. Ebrahimi F. (ed.) Advances in vibration analysis research. – Rijeka: InTech, 2011. – 456 p.
 12. Nečas J. Direct methods in the theory of elliptic equations. – Berlin: Springer, 2012. – xvi+372 p.
 13. Nečas J., Hlaváček I. Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies: An introduction. – Amsterdam: Elsevier, 1981. – 342 p.
 14. Ohayon R., Soize C. Structural acoustic and vibration. – London: Academic Press, 1998. – 424 p.
 15. Petyt M. Introduction to finite element vibration analysis. – Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 1990. – xv+558 p. – <https://doi.org/10.1002/zamm.19920720323>.
 16. Verfürth R. A posteriori error estimation techniques for finite element methods. – Oxford: Oxford Univ. Press, 2013. – xviii+393 p. – DOI:10.1093/acprof:oso/9780199679423.001.0001.

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛНАХ В УПРУГИХ ТЕЛАХ И ЕЕ h -АДАПТИВНАЯ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Сформулирована вариационная задача о гармонической волне эластодинамики вязкоупругого тела с кратковременной памятью, порожденной распределенной нагрузкой заданной круговой частоты. Установлены условия ее корректности и эквивалентность задаче о седловой точке соответствующего лагранжиана. Построена h -адаптивная схема метода конечных элементов решения этой задачи с поэлементно определенным апостериорным оценителем погрешности и критерием локального улучшения триангуляций Делоне для вычисления аппроксимаций с заранее гарантированной точностью. Эффективность предложенной методики проиллюстрирована на примере численного исследования резонансных частот квадратной пластины с квадратным отверстием.

Ключевые слова: вязкоупругое тело, гармоническая волна, вариационная задача, седловая точка, h -адаптивная схема метода конечных элементов.

ANALYSIS OF THE PROBLEM ON HARMONIC WAVES IN ELASTIC BODY AND ITS h -ADAPTIVE FINITE ELEMENT APPROXIMATION

A variational problem on the harmonic wave of elastodynamics of a viscoelastic body with short-term memory generated by a distributed load of a given circular frequency is formulated. The conditions for its correctness and equivalence to the saddle point problem of the corresponding Lagrangian are established. The h -adaptive scheme of the finite element method for solving this problem with an element-by-element a posteriori error estimator and a criterion for the local improvement of Delaunay triangulations to construct approximations with pre-guaranteed accuracy is constructed. The effectiveness of the proposed technique is illustrated by the example of a numerical study of the resonance frequencies of a square plate with a square hole.

Keywords: viscoelastic body, harmonic wave, variational problem, saddle point, h -adaptive scheme of finite element method.

¹ Львів. нац ун-т ім. І. Франка, Львів,

² Політехніка Опольська, Опольце, Польща