УДК 519.6

А. В. Кунинець[1], М. В. Кутнів[2,3✉], Н. В. Хоменко[2]

АЛГОРИТМІЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТОЧНОЇ ТРИТОЧКОВОЇ РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ ДЛЯ ЗАДАЧІ ШТУРМА – ЛІУВІЛЛЯ

Розроблено нову алгоритмічну реалізацію точних триточкових різницевих схем на нерівномірній сітці для задачі Штурма – Ліувілля. Показано, що для обчислення коефіцієнтів точної схеми в довільному вузлі сітки потрібно розв'язати дві допоміжні задачі Коші для лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку: одну на відрізку $[x_{j-1}, x_j]$ *(вперед) і одну на відрізку* $[x_j, x_{j+1}]$ *(назад). Доведено теорему про коефіцієнтну стійкість точної триточкової різницевої схеми.*

Ключові слова: *задача Штурма – Ліувілля, шаблонні функції, точна триточкова різницева схема, коефіцієнтна стійкість.*

Вступ. У роботі [8] для лінійних крайових задач побудовано точну триточкову різницеву схему (ТТРС) на рівномірній сітці, а також розроблено та обґрунтовано алгоритмічну реалізацію точної схеми через усічені триточкові різницеві схеми будь-якого порядку точності. Ці результати узагальнено в [9] на нерівномірну сітку і крайові умови третього роду, а в [5] розповсюджено на випадок, коли коефіцієнти диференціального рівняння є узагальненими функціями. Однак практичне використання таких схем у випадку змінних коефіцієнтів диференціального рівняння вимагають обчислення багатократних інтегралів у кожному вузлі сітки, наприклад, методом Монте-Карло. У роботах [6, 7] показано, що коефіцієнти ТТРС і праву частину в довільному вузлі сітки можна виразити через розв'язки чотирьох допоміжних задач Коші, кожна з яких наближено розв'язується за один крок методом розвинення у ряд Тейлора або методом Рунґе – Кутта. Цей підхід знайшов широке застосування і для випадку нелінійних крайових задач (див., наприклад, [11]), а також у практичних розрахунках.

В [1, 3] результати [8, 9] перенесено на задачі Штурма – Ліувілля, а в роботі [2] отримано вагові апріорні оцінки точності для різницевих схем, які апроксимують задачу Штурма – Ліувілля.

У цій роботі покажемо, що ТТРС для задачі Штурма – Ліувілля можна виразити через розв'язки допоміжних задач Коші.

1. Точна триточкова різницева схема для задачі Штурма – Ліувілля. Задача Штурма – Ліувілля полягає у знаходженні значень параметра λ (власних значень), для яких крайова задача

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u(x) = -\lambda r(x)u(x), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0, \qquad (1)$$

має нетривіальні розв'язки $u(x)$ (власні функції). Тут коефіцієнти $k(x)$, $q(x)$, $r(x) \in Q[0,1]$ – кусково-неперервні функції, які задовольняють умови

$$0 < C_1 \le k(x) \le C_2, \qquad 0 \le q(x) \le C_3, \qquad 0 < C_4 \le r(x) \le C_5, \qquad (2)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – сталі.

Введемо нерівномірну сітку

$$\hat{\omega}_h = \left\{ x_j \in (0,1),\ j = 1,2,\ldots,N-1, \quad x_j - x_{j-1} = h_j > 0,\ \sum_{j=1}^{N} h_j = 1 \right\},$$

✉ kutniv@yahoo.com

$$\hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2}, \qquad h = \max_{1\le j\le N} h_j,$$

так, щоб точки розриву функцій $k(x)$, $q(x)$, $r(x)$ збігалися з вузлами сітки $\hat{\omega}_h$. Множину всіх точок розриву позначимо через σ і припустимо, що N таке, що $\sigma \subset \hat{\omega}_h$. Будемо вважати, що в точках розриву розв'язок задачі (1) задовольняє умови неперервності

$$u(x_j - 0) = u(x_j + 0), \qquad k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_j-0} = k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_j+0}. \tag{3}$$

Означимо шаблонні функції $v_\alpha^j(x,\lambda)$, $\alpha = 1,2$, як розв'язки задач Коші

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dv_\alpha^j}{dx}\right] - q(x)v_\alpha^j(x,\lambda) + \lambda r(x)v_\alpha^j(x,\lambda) = 0, \quad x \in (x_{j-1}, x_{j+1}), \tag{4}$$

$$v_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, \lambda) = 0, \qquad k(x)\frac{dv_\alpha^j(x,\lambda)}{dx}\bigg|_{x=x_j+(-1)^\alpha} = (-1)^{\alpha+1},$$

$$\alpha = 1,2, \qquad j = 1,2,\dots,N-1, \tag{5}$$

для яких також будемо вимагати виконання умов (3). Функції $v_\alpha^j(x,\lambda)$, $\alpha = 1,2$, мають такі властивості:

1°) для них справджуються співвідношення

$$v_1^j(x_{j+1},\lambda) = v_2^j(x_{j-1},\lambda), \qquad v_2^j(x_j,\lambda) = v_1^{j+1}(x_{j+1},\lambda),$$

$$v_1^j(x_{j+1},\lambda) = v_1^j(x_j,\lambda) + v_2^j(x_j,\lambda) + v_2^j(x_j,\lambda)\int_{x_{j-1}}^{x_j} v_1^j(\xi,\lambda)[q(\xi) - \lambda r(\xi)]\,d\xi +$$

$$+ v_1^j(x_j,\lambda)\int_{x_j}^{x_{j+1}} v_2^j(\xi,\lambda)[q(\xi) - \lambda r(\xi)]\,d\xi;$$

2°) функції $v_\alpha^j(x,\lambda)$, $\alpha = 1,2$, є лінійно незалежними.

Д о в е д е н н я властивостей ***1***° проводиться аналогічно до доведення відповідних властивостей з роботи [4, с. 141].

Доведемо, що функції $v_\alpha^j(x,\lambda)$, $\alpha = 1,2$, є лінійно незалежними. Відомо, що для лінійної незалежності розв'язків задачі (4), (5) необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського був відмінний від нуля хоча би в одній точці відрізка $[x_{j-1}, x_{j+1}]$. Припустивши протилежне, маємо, що вронскіан $W[v_1^j(x,\lambda), v_2^j(x,\lambda)]$ тотожно дорівнює нулеві на відрізку $[x_{j-1}, x_{j+1}]$. Обчислюючи вронскіан у точках $x_{j+(-1)^\alpha}$, $\alpha = 1,2$, з урахуванням, що $v_2^j(x_{j-1},\lambda) = v_1^j(x_{j+1},\lambda)$, отримаємо

$$W[v_1^j(x,\lambda), v_2^j(x,\lambda)]_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = -\frac{v_1^j(x_{j+1},\lambda)}{k(x_{j+(-1)^\alpha})}.$$

Звідси випливає, що $v_1^j(x_{j+1},\lambda) = 0$, тобто $v_1^j(x,\lambda)$ є розв'язком крайової задачі

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dv_1^j}{dx}\right]-q(x)v_1^j(x,\lambda)+\lambda r(x)v_1^j(x,\lambda)=0, \qquad x\in(x_{j-1},x_{j+1})\,, \quad (6)$$

$$v_1^j(x_{j-1},\lambda)=v_1^j(x_{j+1},\lambda)=0, \qquad j=1,2,\dots,N-1\,. \quad (7)$$

Покажемо, що при достатньо малих $h<h_0$ і при $\lambda=\lambda_m$, $1\le m\le k$, $k\ll N$, задача (6), (7) має тільки тривіальний розв'язок. Для цього достатньо показати, що при $h<h_0$ виконується нерівність

$$-[q(x)-\lambda r(x)]\le\lambda r(x)<\underline{\mu}_1 \qquad \forall x\in[x_{j-1},x_{j+1}]\,, \quad (8)$$

де $\underline{\mu}_1$ – оцінка знизу найменшого власного значення задачі

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dv}{dx}\right]+\mu v(x)=0, \qquad x\in(x_{j-1},x_{j+1}), \qquad v(x_{j-1})=v(x_{j+1})=0\,.$$

З еквівалентної варіаційної задачі за умови

$$\|v\|^2=\int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}v^2(x)\,dx=1$$

випливає, що

$$\mu_1=\min\int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}k(\xi)[v'(\xi)]^2\,d\xi\ge C_1\min\int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}[v'(\xi)]^2\,d\xi=$$

$$=\frac{C_1\pi^2}{4\hbar_j^2}\ge\frac{C_1\pi^2}{4h^2}=\underline{\mu}_1\,.$$

Отже, існує h_0 таке, що при всіх $h<h_0$ виконується нерівність

$$h^2\lambda r(x)<\frac{C_1\pi^2}{4} \qquad \forall x\in[x_{j-1},x_{j+1}], \qquad j=1,2,\dots,N-1\,.$$

Звідси випливає, що $v_1^j(x,\lambda)\equiv 0$, $x\in[x_{j-1},x_{j+1}]$, при $h<h_0=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{C_1}{\lambda C_5}}$, що суперечить умові $\left.k(x)\frac{dv_1^j(x,\lambda)}{dx}\right|_{x=x_{j-1}}=1$. Це означає, що $v_1^j(x_{j+1},\lambda)\ne 0$. Отже, $v_1^j(x,\lambda)$, $v_2^j(x,\lambda)$ – лінійно незалежні на інтервалі $[x_{j-1},x_{j+1}]$.

Міркуючи аналогічно, легко показати, що $v_1^j(x,\lambda)\ne 0$ ні в одній точці інтервалу $(x_{j-1},x_{j+1}]$, тобто функція є знакосталою на цьому інтервалі. Більше того, покажемо, що $v_1^j(x,\lambda)>0$, $x\in(x_{j-1},x_{j+1}]$. Для цього достатньо довести, що ця функція додатна на інтервалі $(x_{j-1},x_{j-1}+\delta)$ при як завгодно малому $\delta>0$. Із (4), (5) випливає

$$k(x)\frac{dv_1^j(x,\lambda)}{dx}=1+\int\limits_{x_{j-1}}^{x}(q(\xi)-\lambda r(\xi))v_1^j(\xi,\lambda)\,d\xi\,, \quad (9)$$

$$v_1^j(x,\lambda)=\int\limits_{x_{j-1}}^{x}\frac{dt}{k(t)}+\int\limits_{x_{j-1}}^{x}\frac{1}{k(t)}\int\limits_{x_{j-1}}^{t}(q(\xi)-\lambda r(\xi))v_1^j(\xi,\lambda)\,d\xi\,dt\,. \quad (10)$$

Співвідношення (10) з урахуванням припущень (2) приводить до нерівності

$$\left|v_1^j(x,\lambda)\right| \le (x - x_{j-1})\left[\frac{1}{C_1} + \frac{C_3 + \lambda C_5}{C_1}\int\limits_{x_{j-1}}^{x}\left|v_1^j(t,\lambda)\right| dt\right]$$

при будь-якому обмеженому λ. Зробимо заміну

$$\bar{v}_1^j(x,\lambda) = \frac{\left|v_1^j(x,\lambda)\right|}{x - x_{j-1}}.$$

Тоді

$$\bar{v}_1^j(x,\lambda) \le \frac{1}{C_1} + \frac{C_3 + \lambda C_5}{C_1}\int\limits_{x_{j-1}}^{x}(t - x_{j-1})\bar{v}_1^j(t,\lambda)\,dt.$$

Застосовуючи нерівність Ґронуолла (див., наприклад, [10, с. 37]), отримаємо

$$\bar{v}_1^j(x,\lambda) \le \frac{1}{C_1} e^{\frac{(C_3+\lambda C_5)(x-x_{j-1})^2}{2C_1}}$$

або

$$\left|v_1^j(x,\lambda)\right| \le \frac{x - x_{j-1}}{C_1} e^{\frac{(C_3+\lambda C_5)(x-x_{j-1})^2}{2C_1}} \qquad \forall x \in [x_{j-1}, x_{j+1}]. \tag{11}$$

З рівняння (10) і нерівності (11) випливає оцінка

$$v_1^j(x,\lambda) \ge \int\limits_{x_{j-1}}^{x}\frac{dt}{k(t)} - \int\limits_{x_{j-1}}^{x}\frac{1}{k(t)}\int\limits_{x_{j-1}}^{t}\left|\lambda r(\xi) - q(\xi)\right|\left|v_1^j(\xi,\lambda)\right| d\xi\, dt \ge$$

$$\ge \int\limits_{x_{j-1}}^{x}\frac{dt}{k(t)}\left[1 - (C_3 + \lambda C_5)\int\limits_{x_{j-1}}^{x}\left|v_1^j(\xi,\lambda)\right| d\xi\right] \ge$$

$$\ge \int\limits_{x_{j-1}}^{x}\frac{dt}{k(t)}\left[1 - \frac{C_3 + \lambda C_5}{C_1}\int\limits_{x_{j-1}}^{x}(\xi - x_{j-1})e^{\frac{(C_3+\lambda C_5)(\xi-x_{j-1})^2}{2C_1}} d\xi\right] \ge$$

$$\ge \frac{1}{C_2}\left[2 - e^{\frac{(C_3+\lambda C_5)(x-x_{j-1})^2}{2C_1}}\right].$$

Отже, $v_1^j(x,\lambda) > 0$ при x, достатньо близьких до x_{j-1}, а оскільки $v_1^j(x,\lambda)$ – знакостала функція, то вона додатна на всьому інтервалі (x_{j-1}, x_{j+1}). Доведення того, що $v_2^j(x,\lambda) > 0$, є аналогічним. Таким чином, властивість ***2°*** доведено.

Справджується

Лема 1. *Нехай* $k(x) \in Q^1[0,1]$, $q(x)$, $r(x) \in Q[0,1]$. *Тоді при*

$$h = \max_{1\le j\le N} h_j \le h_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_3 + \lambda C_5}} \tag{12}$$

є правильними такі твердження:

(***i***) *шаблонні функції мають властивості*: $v_1^j(x,\lambda)$ *монотонно зростає на* $(x_{j-1}, x_{j+1}]$, *а функція* $v_2^j(x,\lambda)$ *монотонно спадає на* $[x_{j-1}, x_{j+1})$;

(***ii***) *виконуються оцінки*

$$\frac{2}{3C_2} \le \frac{v_\alpha^j(x,\lambda)}{\left|x - x_{j+(-1)^\alpha}\right|} \le \frac{2}{C_1}, \qquad \alpha = 1,2, \quad j = 1,2,\ldots,N-1. \tag{13}$$

Д о в е д е н н я проведемо тільки для першої шаблонної функції $v_1^j(x,\lambda)$ (для $v_2^j(x,\lambda)$ воно аналогічне). З оцінки (11) і рівності (9) випливає нерівність

$$k(x)\frac{dv_1^j(x,\lambda)}{dx} \ge 1 - \int\limits_{x_{j-1}}^{x} \left|\lambda r(\xi) - q(\xi)\right| v_1^j(\xi,\lambda)\, d\xi \ge$$

$$\ge 1 - \frac{C_3 + \lambda C_5}{C_1} \int\limits_{x_{j-1}}^{x} (\xi - x_{j-1})\, e^{\frac{(C_3+\lambda C_5)(\xi - x_{j-1})^2}{2C_1}}\, d\xi \ge$$

$$\ge 2 - e^{\frac{(C_3+\lambda C_5)(x - x_{j-1})^2}{2C_1}} \ge 2 - e^{\frac{2(C_3+\lambda C_5)h^2}{C_1}},$$

яка з урахуванням того, що функція $g(t) = 2 - e^t$ монотонно спадає і $g(1/2) > 0$, доводить за умови (12) твердження (***i***) леми 1.

Повертаючись знову до (10), за допомогою доведеного твердження (***i***) отримаємо

$$v_1^j(x,\lambda) \le \frac{x - x_{j-1}}{C_1} + \frac{C_3 + \lambda C_5}{C_1} v_1^j(x,\lambda) \frac{(x - x_{j-1})^2}{2},$$

$$v_1^j(x,\lambda) \ge \frac{x - x_{j-1}}{C_2} - \frac{C_3 + \lambda C_5}{C_1} v_1^j(x,\lambda) \frac{(x - x_{j-1})^2}{2},$$

звідки

$$\frac{v_1^j(x,\lambda)}{x - x_{j-1}} \left(1 - \frac{2(C_3 + \lambda C_5)h^2}{C_1}\right) \le \frac{1}{C_1},$$

$$\frac{v_1^j(x,\lambda)}{x - x_{j-1}} \left(1 + \frac{2(C_3 + \lambda C_5)h^2}{C_1}\right) \ge \frac{1}{C_2},$$

що разом з умовою (12) доводить оцінку (13). ♦

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми* 1. *Тоді для задачі* (1) *існує єдина ТТРС вигляду*

$$\Lambda y + \lambda\rho y \equiv (a y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \lambda\rho y = 0, \qquad x \in \hat{\omega}_h, \quad y_0 = y_N = 0, \tag{14}$$

де

$$y_{\bar{x},j} = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}, \qquad y_{\hat{x},j} = \frac{y_{j+1} - y_j}{\hbar_j}, \qquad \hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2},$$

$$a_j = \left[\frac{1}{h_j} v_1^j(x_j,\lambda)\right]^{-1}, \qquad d_j = \hat{T}^{x_j}(q,\lambda), \qquad \rho_j = \hat{T}^{x_j}(r,\lambda),$$

$$\hat{T}^{x_j}(w(\xi),\lambda) = \frac{1}{\hbar_j v_1^j(x_j,\lambda)} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} v_1^j(\xi,\lambda) w(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\hbar_j v_2^j(x_j,\lambda)} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} v_2^j(\xi,\lambda) w(\xi)\, d\xi, \tag{15}$$

причому

$$0 < C_1' \le a_j \le C_2', \qquad C_1' = \frac{C_1}{2}, \qquad C_2' = \frac{3C_2}{2}, \tag{16}$$

$$0 \le d_j \le C_3', \qquad C_3' = 2C_3, \tag{17}$$

$$0 < C_4' \le \rho_j \le C_5', \qquad C_4' = \frac{C_1 C_4}{3C_2}, \qquad C_5' = 2C_5. \tag{18}$$

Розв'язок $y(x)$ *задачі* (14) *збігається з розв'язком* $u(x)$ *вихідної задачі* (1) *у вузлах сітки* $\hat{\omega}_h$ *з точністю до сталого множника.*

Д о в е д е н н я. Розглянемо задачу

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u(x) = -\lambda r(x)u(x), \qquad x \in (x_{j-1}, x_{j+1}), \tag{19}$$

$$u(x_{j-1}) = u_{j-1}, \qquad u(x_{j+1}) = u_{j+1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{20}$$

функція Ґріна якої має вигляд

$$G^j(x,\xi) = \frac{1}{v_1^j(x_{j+1},\lambda)} \begin{cases} v_1^j(x,\lambda)v_2^j(\xi,\lambda), & x_{j-1} \le x \le \xi, \\ v_1^j(\xi,\lambda)v_2^j(x,\lambda), & \xi \le x \le x_{j+1}. \end{cases}$$

Побудуємо точну триточкову різницеву схему. Для цього запишемо очевидний інтегральний наслідок (19), (20):

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^j(x,\xi)\frac{d}{d\xi}\left[k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi -$$

$$- \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^j(x,\xi)[q(\xi)u(\xi) - \lambda r(\xi)]u(\xi)\,d\xi = 0. \tag{21}$$

Якщо інтеграл, який входить до лівої частини (21), проінтегрувати частинами з урахуванням (4), (5), то отримаємо

$$\frac{v_1^j(x,\lambda)}{v_1^j(x_{j+1},\lambda)}\left[u_{j+1} + k(x)\frac{dv_2^j(x,\lambda)}{dx}u(x)\right] +$$

$$+ \frac{v_2^j(x,\lambda)}{v_1^j(x_{j+1},\lambda)}\left[u_{j-1} - k(x)\frac{dv_1^j(x,\lambda)}{dx}u(x)\right] = 0.$$

Оскільки з (4), (5) випливає, що

$$k(x)\frac{dv_\alpha^j(x,\lambda)}{dx} = (-1)^{\alpha+1} + \int_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x} [q(\xi) - \lambda r(\xi)]v_\alpha^j(\xi,\lambda)\,d\xi, \quad \alpha = 1, 2, \tag{22}$$

то

$$\frac{v_1^j(x,\lambda)}{v_1^j(x_{j+1},\lambda)}\left[u_{j+1} - \left(1 + \int_x^{x_{j+1}} [q(\xi) - \lambda r(\xi)]v_2^j(\xi,\lambda)\,d\xi\right)u(x)\right] + \frac{v_2^j(x,\lambda)}{v_1^j(x_{j+1},\lambda)} \times$$

$$\times \left[u_{j-1} - \left(1 + \int_{x_{j-1}}^{x} [q(\xi) - \lambda r(\xi)]v_1^j(\xi,\lambda)\,d\xi\right)u(x)\right] = 0. \tag{23}$$

Покладемо в (23) $x = x_j$ і помножимо отриману рівність на

$\dfrac{v_1^j(x_{j+1},\lambda)}{\hbar_j v_1^j(x_j,\lambda)v_2^j(x_j,\lambda)}$. Використовуючи властивості шаблонних функцій $v_1^j(x_{j+1},\lambda)=v_2^j(x_{j-1},\lambda)$, $v_2^j(x_j,\lambda)=v_1^{j+1}(x_{j+1},\lambda)$, отримаємо точну триточкову різницеву схему (14).

Нерівність (16) випливає з (13). Доведемо оцінку (17). Оскільки

$$d_j=\frac{1}{\hbar_j v_1^j(x_j,\lambda)}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} v_1^j(\xi,\lambda)q(\xi)\,d\xi+\frac{1}{\hbar_j v_2^j(x_j,\lambda)}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} v_2^j(\xi,\lambda)q(\xi)\,d\xi\,,$$

то з урахуванням додатності та монотонності функцій $v_1^j(x,\lambda)$, $v_2^j(x,\lambda)$ матимемо

$$0\le d_j\le\frac{2C_3}{h_j+h_{j+1}}\left[\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{v_1^j(\xi,\lambda)}{v_1^j(x_j,\lambda)}d\xi+\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{v_2^j(\xi,\lambda)}{v_2^j(x_j,\lambda)}d\xi\right]\le 2C_3\,.$$

Аналогічно доводимо нерівність $\rho_j\le 2C_5$. Крім того, використовуючи оцінки (13), отримаємо

$$\rho_j=\frac{1}{\hbar_j v_1^j(x_j,\lambda)}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} v_1^j(\xi,\lambda)r(\xi)\,d\xi+\frac{1}{\hbar_j v_2^j(x_j,\lambda)}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} v_2^j(\xi,\lambda)r(\xi)\,d\xi\ge$$

$$\ge\frac{2C_4}{h_j+h_{j+1}}\left[\frac{1}{v_1^j(x_j,\lambda)}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} v_1^j(\xi,\lambda)\,d\xi+\frac{1}{v_2^j(x_j,\lambda)}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} v_2^j(\xi,\lambda)\,d\xi\right]\ge$$

$$\ge\frac{4C_4}{3C_2(h_j+h_{j+1})}\left[\frac{1}{v_1^j(x_j,\lambda)}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}(\xi-x_{j-1})\,d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{v_2^j(x_j,\lambda)}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}(x_{j+1}-\xi)\,d\xi\right]\ge$$

$$\ge\frac{2C_4}{3C_2(h_j+h_{j+1})}\left[\frac{h_j^2}{v_1^j(x_j,\lambda)}+\frac{h_{j+1}^2}{v_2^j(x_j,\lambda)}\right]\ge\frac{C_1C_4}{3C_2}>0\,.$$

Лему доведено. ♦

Зауважимо, якщо розв'язок задачі (1) нормовано умовою

$$\int\limits_0^1 r(x)u^2(x)\,dx=1\,,$$

то для точного нормування на сітці маємо

$$\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} r(x)\left[\frac{v_1^j(x,\lambda)}{v_1^j(x_j,\lambda)}y_j+\frac{v_2^{j-1}(x,\lambda)}{v_2^{j-1}(x_{j-1},\lambda)}y_{j-1}\right]^2dx=1\,.$$

3. Коефіцієнтна стійкість ТТРС. Різницеву задачу (14) будемо розглядати у просторі $\overset{\circ}{H}_h$ сіткових функцій y таких, що $y(0)=y(1)=0$, зі скалярними добутками та нормами:

$$(y,v)=\sum_{\xi\in\hat{\omega}_h}\hbar(\xi)y(\xi)v(\xi)\,,\qquad (y,v]=\sum_{\xi\in\hat{\omega}_h^+}h(\xi)y(\xi)v(\xi)\,,\qquad \hat{\omega}_h^+=\hat{\omega}_h\cup x_N\,,$$

$$\|y\|=(y,y)^{1/2},\qquad \|y]|=(y,y]^{1/2},\qquad \|y\|_C=\max_{\xi\in\hat{\omega}_h}|y(\xi)|\,.$$

Нехай $\lambda^h=\lambda_n^h$ − n-не власне значення цієї задачі, а $y=y_n$ − нормована власна функція. Існує $N-1$ дійсних власних значень $\lambda_1^h,\lambda_2^h,\ldots,\lambda_{N-1}^h$, яким відповідають відповідні власні функції $y_1,y_2,\ldots,y_{N-1}$, ортонормовані з вагою ρ, тобто такі, що $(\rho y_n,y_m)=0$ при $n\neq m$ і $(\rho y_n,y_n)=1$.

Помноживши (14) скалярно на y і врахувавши різницеву формулу Ґріна (див. [4, с. 47]), знаходимо

$$\lambda^h=R_N(y)=\frac{(a,y_{\bar{x}}^2]+(d,y^2)}{(\rho,y^2)}\,.$$

Легко бачити, що різницева задача (14) еквівалентна варіаційній задачі

$$\lambda_1^h=\min_y R_N(y)\,,$$

$$\lambda_n^h=\max_{y_m}\min_{(\rho y,y_m)=0}R_N(y),\quad m=1,2,\ldots,n-1,\quad n=2,3,\ldots,N-1\,. \tag{24}$$

Лема 3. *Для власних функцій задачі* (14)–(18) *виконуються оцінки*

$$\|y\|_C\le M_1(\lambda^h)^{1/4},\qquad \|y_{\bar{x}}]|_C\le M_2(\lambda^h)^{3/4}\,, \tag{25}$$

де сталі M_1, M_2 *залежать від сталих* C_i', $i=1,2,\ldots,5$, *які входять у* (16)–(18).

Д о в е д е н н я. Нехай x, x' − довільні вузли сітки $\hat{\hat{\omega}}_h$. Розглянемо тотожності

$$y^2(x)=\sum_{\xi=x_1}^{x}h(\xi)[y^2(\xi)]\Big|_{\bar{\xi}}=\sum_{\xi=x_1}^{x}h(\xi)[y(\xi)+y(\xi-h(\xi))]y_{\bar{\xi}}(\xi)\,, \tag{26}$$

$$\begin{aligned}(a(x)y_{\bar{x}}(x))^2-(a(x')y_{\bar{x}}(x'))^2&=\sum_{\xi=x'}^{x-h(x)}\hbar(\xi)\big[(a(\xi)y_{\bar{\xi}}(\xi))^2\big]\Big|_{\hat{\xi}}=\\&=\sum_{\xi=x'}^{x-h(x)}\hbar(\xi)\big[a(\xi)y_{\bar{\xi}}(\xi)+a(\xi+h(\xi))y_{\xi}(\xi)\big]\big(a(\xi)y_{\bar{\xi}}(\xi)\big)\Big|_{\hat{\xi}}=\\&=\sum_{\xi=x'}^{x-h(x)}\hbar(\xi)\big[a(\xi)y_{\bar{\xi}}(\xi)+a(\xi+h(\xi))y_{\xi}(\xi)\big]\big(d(\xi)-\lambda^h\rho(\xi)\big)y(\xi)\,.\end{aligned} \tag{27}$$

Застосовуючи до правої частини (26) нерівність Коші − Буняковського і враховуючи, що

$$(\rho,y^2)=1,\qquad (a,y_{\bar{x}}^2]\le\lambda^h\,, \tag{28}$$

отримаємо

$$y^2(x)\le\frac{2}{\sqrt{C_1'C_4'}}\left(\sum_{\xi=x_1}^{x}h(\xi)a(\xi)y_{\bar{\xi}}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\xi=x_1}^{x}\hbar(\xi)\rho(\xi)y^2(\xi)\right)^{1/2}\le$$

$$\le\frac{2}{\sqrt{C_1'C_4'}}(a,y_{\bar{x}}^2]^{1/2}(\rho,y^2)^{1/2}\le\frac{2}{\sqrt{C_1'C_4'}}(\lambda^h)^{1/2}\,.$$

Звідси випливає нерівність – перша з оцінок (25).

Далі, із (28) випливає, що існує така точка $x' \in \hat{\omega}_h$, в якій $a(x')y_{\bar{x}}^2(x') \le \lambda^h$, і отже, $(a(x')y_{\bar{x}}(x'))^2 \le C_2'\lambda^h$. Користуючись нерівністю Коші – Буняковського для перетворення правої частини тотожності (27), враховуючи (24) і нерівність $\hbar_j + \hbar_{j-1} \le Ch_j$, матимемо

$$y_{\bar{x}}^2(x) \le \frac{C_2'}{C_1'^2}\lambda^h + \frac{1}{C_1'^2}\left(\sum_{\xi=x'}^{x}\big(\hbar(\xi)+\hbar(\xi-h(\xi))\big)\big(a(\xi)y_{\bar{\xi}}(\xi)\big)^2\right)^{1/2} \times$$

$$\times\left[\left(\sum_{\xi=x'}^{x-h(x)}\hbar(\xi)\big(d(\xi)y(\xi)\big)^2\right)^{1/2} + \lambda^h\left(\sum_{\xi=x'}^{x-h(x)}\hbar(\xi)\big(\rho(\xi)y(\xi)\big)^2\right)^{1/2}\right] \le$$

$$\le \frac{C_2'}{C_1'^2}\lambda^h + \frac{C\sqrt{C_2'}}{C_1'^2}(a, y_{\bar{x}}^2(x)]^{1/2}\left(\frac{C_3'}{\sqrt{C_4'}} + \lambda^h\sqrt{C_5'}\right)(\rho, y^2)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{C_2'}{C_1'^2}\lambda^h + \frac{C\sqrt{C_2'}}{C_1'^2}(\lambda^h)^{1/2}\left(\frac{C_3'}{\sqrt{C_4'}} + \lambda^h\sqrt{C_5'}\right) \le$$

$$\le (\lambda^h)^{3/2}\left[\frac{C_2'}{C_1'^2(\lambda^h)^{1/2}} + \frac{CC_3'\sqrt{C_2'}}{C_1'^2\sqrt{C_4'}\cdot\lambda^h} + \frac{C\sqrt{C_2'C_5'}}{C_1'^2}\right]. \tag{29}$$

Оскільки $\|y_{\bar{x}}]|^2 \ge 4\|y\|^2$ (див., наприклад, [4, с. 55]), то для λ^h отримаємо оцінку

$$\lambda^h \ge \big(a, y_{\bar{x}}^2(x)\big] \ge C_1'\big(1, y_{\bar{x}}^2\big] \ge 4C_1'(1, y^2) \ge \frac{4C_1'}{C_5'}(\rho, y^2) = \frac{4C_1'}{C_5'}.$$

Тоді з (29) випливає друга з оцінок (25). Отже, лему доведено повністю. ♦

Розглянемо збурену задачу

$$\tilde{\Lambda}\tilde{y} + \tilde{\lambda}^h\tilde{\rho}\tilde{y} = 0, \qquad x \in \hat{\omega}_h, \qquad \tilde{y}(0) = \tilde{y}(1) = 0, \tag{30}$$

де

$$\tilde{\Lambda}\tilde{y} = (\tilde{a}\tilde{y}_{\bar{x}})_{\hat{x}} - \tilde{d}\tilde{y}.$$

Введемо функцію $z = y - \tilde{y}$. Тоді для z будемо мати крайову задачу

$$\Lambda z + \lambda^h\rho z = -\Psi(x), \qquad x \in \hat{\omega}_h, \qquad z(0) = z(1) = 0, \tag{31}$$

де

$$\Psi(x) = \Lambda\tilde{y} + \lambda^h\rho\tilde{y}.$$

За допомогою рівняння (30) функцію $\Psi(x)$ можемо перетворити до вигляду

$$\Psi(x) = \psi(x) + (\lambda^h - \tilde{\lambda}^h)\rho\tilde{y},$$

де

$$\psi(x) = \eta_{\hat{x}} + \psi^*(x),$$

$$\eta = (a - \tilde{a})\tilde{y}_{\bar{x}}, \qquad \psi^* = -(d - \tilde{d})\tilde{y} + \tilde{\lambda}^h(\rho - \tilde{\rho})\tilde{y}. \tag{32}$$

Оскільки параметр λ^h є власним значенням для різницевого оператора задачі (31), то неоднорідне рівняння (31) є розв'язним тільки в тому випадку, коли власна функція $y(x)$ є ортогональною до правої частини рівняння (31), або, точніше, коли виконується рівність

$$(\Psi, y) = (\psi, y) + (\lambda^h - \tilde{\lambda}^h)(\rho \tilde{y}, y) = 0 . \qquad (33)$$

Власному значенню λ^h відповідає тільки одна власна функція, визначена з точністю до довільного множника C_0. Виберемо цей множник таким чином, щоб функція $\overline{y} = C_0 y$ була ортогональною до різниці $\overline{z} = \overline{y} - \tilde{y}$:

$$(\rho \overline{y}, \overline{z}) = 0 . \qquad (34)$$

Звідси з урахуванням умови нормування $(\rho y, y) = 1$ отримуємо

$$(\rho \tilde{y}, y) = (\rho y, \overline{y} - \overline{z}) = (\rho y, \overline{y}) - (\rho y, \overline{z}) = C_0 (\rho y, y) = C_0 .$$

Якщо $\tilde{y} \to y$ при $h \to 0$, то можемо вважати, що $C_0 > 0$.

Далі,

$$(\rho, \tilde{y}^2) = \left(\rho, (\overline{y} - \overline{z})^2\right) = (\rho, \overline{y}^2) - 2(\rho, \overline{z}\,\overline{y}) + (\rho, \overline{z}^2) =$$

$$= C_0^2 (\rho y, y) + (\rho, \overline{z}^2) = C_0^2 - (\rho, \overline{z}\tilde{y}) ,$$

так що

$$1 - C_0^2 = -(\rho, \overline{z}\tilde{y}) - \left[(\rho, \tilde{y}^2) - (\tilde{\rho}, \tilde{y}^2)\right]. \qquad (35)$$

Рівність (33) використаємо для визначення $\lambda^h - \tilde{\lambda}^h$:

$$\lambda^h - \tilde{\lambda}^h = -\frac{(\psi, y)}{(\rho \tilde{y}, y)} = -\frac{(\psi, \overline{y})}{C_0^2} . \qquad (36)$$

Перетворимо праву частину формули (36), враховуючи (32) і формулу підсумовування частинами (див., наприклад, [4, с. 47]):

$$(\psi, \overline{y}) = -(\eta, \overline{y}_{\overline{x}}] + (\psi^*, \overline{y}) .$$

Звідси і з оцінок (25) для $\overline{y}$, $\overline{y}_{\overline{x}}$ випливає

$$\left|\lambda^h - \tilde{\lambda}^h\right| \le \frac{|(\psi, \overline{y})|}{C_0^2} \le \frac{\left|(\eta, \overline{y}_{\overline{x}}]\right| + \left|(\psi^*, \overline{y})\right|}{C_0^2} \le \frac{\|\overline{y}_{\overline{x}}]|_C \,(1, |\eta|] + \|\overline{y}\|_C \,(1, \left|\psi^*\right|)}{C_0^2} \le$$

$$\le M (\lambda^h)^{3/4} \left[(1, |\eta|] + \|\overline{y}\|_C \,(1, \left|\psi^*\right|)\right] .$$

Отже, отримано таке твердження.

Лема 4. *Нехай для різницевої задачі Штурма – Ліувілля* (14) *виконуються умови* (16), (18). *Тоді правильною є оцінка*

$$\left|\lambda_n^h - \tilde{\lambda}_n^h\right| \le M (\lambda^h)^{3/4} \left[(1, |\eta|] + (1, \left|\psi^*\right|)\right], \qquad (37)$$

де $M = \mathrm{const} > 0$ *залежить від* C_i', $i = 1, 2, \ldots, 5$, *та* C_0.

Перейдемо до оцінки для $\overline{z}$. Оскільки $\overline{y} = C_0 y$, то $\overline{y}$ задовольняє рівняння (14) і $(\rho, \overline{y}^2) = C_0^2$, а для $\overline{z} = \overline{y} - \tilde{y}$ отримаємо задачу (31).

Зведемо цю задачу до дискретного аналога інтегрального рівняння

$$\overline{z}(x) = \lambda^h \left(G(x, \xi), \rho(\xi) \overline{z}(\xi)\right) + \left(G(x, \xi), \Psi(\xi)\right) , \qquad (38)$$

де $G(x, \xi) = G^h(x, \xi)$ – різницева функція Ґріна оператора $\Lambda y = (a y_{\overline{x}})_{\hat{x}} - dy$ з крайовими умовами $y(0) = y(1) = 0$.

Власна функція $\overline{y}$ задачі (14) задовольняє рівняння

$$\overline{y}(x) = \lambda^h \left(G(x, \xi), \rho(\xi) \overline{y}(\xi)\right) . \qquad (39)$$

Перетворимо рівняння (38), (39) до такого вигляду, щоб у них стали симетричними ядра. Для цього зробимо заміну

$$v(x) = \sqrt{\rho(x)}\,\bar{z}(x), \qquad \varphi(x) = \sqrt{\rho(x)}\,\bar{y}(x),$$

$$K(x,\xi) = \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}\,G(x,\xi).$$

Тоді рівняння (38), (39) набудуть вигляду

$$v_n(x) = \lambda_n^h\big(K(x,\xi), v_n(\xi)\big) + f(x),$$

$$f(x) = \big(K(x,\xi), \bar{\Psi}(\xi)\big), \qquad \bar{\Psi}(\xi) = \frac{\Psi(\xi)}{\sqrt{\rho(\xi)}}, \tag{40}$$

$$\varphi_n(x) = \lambda_n^h\big(K(x,\xi), \varphi_n(\xi)\big). \tag{41}$$

Умова ортогональності функції $f(x)$ до функцій $\varphi_n(x)$ виконується з огляду на умову (33):

$$\big(\varphi_n(x), f(x)\big) = \big(\varphi_n(x), (K(x,\xi), \bar{\Psi}(\xi))\big) = \big(\bar{\Psi}(\xi), (K(x,\xi), \varphi_n(x))\big) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^h}\big(\bar{\Psi}(\xi), \varphi_n(\xi)\big) = \frac{1}{\lambda_n^h}\left(\frac{\Psi}{\sqrt{\rho}}, \sqrt{\rho}\,\bar{y}\right) = \frac{1}{\lambda_n^h}(\Psi, \bar{y}) = 0.$$

Умову (34) запишемо так:

$$(\varphi_n, v_n) = 0. \tag{42}$$

Будемо шукати розв'язок $v(x) = v_n(x)$ рівняння (40) у вигляді

$$v_n(x) = f(x) + \sum_{k=1, k\neq n}^{N-1} c_k \varphi_k(x) \tag{43}$$

при додатковій умові (42).

Підставимо цей вираз у праву частину рівняння (40):

$$v_n(x) = f(x) + \lambda_n^h \sum_{k=1, k\neq n}^{N-1} c_k\big(K(x,\xi), \varphi_k(\xi)\big) + \lambda_n^h\big(K(x,\xi), f(\xi)\big). \tag{44}$$

Розвиваючи $f(x)$ за власними функціями $\{\varphi_k(x)\}$:

$$f(x) = \sum_{k=1, k\neq n}^{N-1} f_k \varphi_k(x), \qquad f_k = (f, \varphi_k),$$

отримаємо

$$\big(K(x,\xi), f(\xi)\big) = \sum_{k=1, k\neq n}^{N-1} \frac{f_k}{\lambda_k^h}\varphi_k(x).$$

Тоді з урахуванням (41) рівність (44) можемо записати у вигляді

$$v_n(x) = f(x) + \lambda_n^h \sum_{k=1, k\neq n}^{N-1}\left[\frac{c_k}{\lambda_k^h} + \frac{f_k}{\lambda_k^h}\right]\varphi_k(x). \tag{45}$$

З рівності (45) випливає, що

$$c_k = (v_n - f, \varphi_k) = \frac{\lambda_n^h}{\lambda_k^h} c_k + \frac{\lambda_n^h}{\lambda_k^h}(f, \varphi_k).$$

Підставивши $c_k = \dfrac{\lambda_n^h (f, \varphi_k)}{\lambda_k^h - \lambda_n^h}$ у (43), отримаємо

$$v_n(x) = f(x) + \sum_{k=1, k\neq n}^{N-1} \frac{\lambda_n^h (f, \varphi_k)}{\lambda_k^h - \lambda_n^h}\varphi_k(x). \tag{46}$$

Оцінимо другий доданок у правій частині (46):

$$\left|\sum_{k=1,k\neq n}^{N-1}\frac{\lambda_n^h(f,\varphi_k)}{\lambda_k^h-\lambda_n^h}\varphi_k(x)\right|\le \|f\|\|\varphi_k\|\lambda_n^h\sum_{k=1,k\neq n}^{N-1}\frac{|\varphi_k|}{\left|\lambda_k^h-\lambda_n^h\right|}\le$$

$$\le M\|f\|\lambda_n^h\sum_{k=1,k\neq n}^{N-1}\frac{(\lambda_k^h)^{1/4}}{\left|\lambda_k^h-\lambda_n^h\right|}.$$

Нехай $\varepsilon>0$ – будь-яке число, яке не залежить від h. Виберемо номер n_0 так, щоб $\lambda_{n_0}^h\ge(1+\varepsilon)\lambda_n^h$. Тоді

$$\sum_{k=n_0}^{N-1}\frac{(\lambda_k^h)^{1/4}}{\left|\lambda_k^h-\lambda_n^h\right|}\le\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\sum_{k=n_0}^{N-1}\frac{(\lambda_k^h)^{1/4}}{\lambda_k^h}\le\frac{M'}{\varepsilon}\sum_{k=n_0}^{N-1}\frac{1}{(\lambda_k^h)^{3/4}}\le M,$$

де $M=\text{const}>0$ не залежить від h.

Оскільки $\lambda_k^h\to\lambda_k$ для $k\le n_0$ при $h\to 0$, то при достатньо малому $h\le h_0$ маємо

$$\sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{(\lambda_k^h)^{1/4}}{\left|\lambda_k^h-\lambda_n^h\right|}\le M,$$

де M не залежить від h.

Таким чином, справджується оцінка

$$\|v_n\|_C\le M\|f\|_C. \tag{47}$$

Перетворимо вираз для $f(x)$:

$$f(x)=\left(K(x,\xi),\bar{\Psi}(\xi)\right)=\left(\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(\xi)}\,G(x,\xi),\frac{\Psi(\xi)}{\sqrt{\rho(\xi)}}\right)=$$

$$=\sqrt{\rho(x)}\left(G(x,\xi),\Psi(\xi)\right)=(\lambda^h-\tilde{\lambda}^h)\sqrt{\rho(x)}\left(G(x,\xi),\rho(\xi)\tilde{y}(\xi)\right)+$$

$$+\sqrt{\rho(x)}\left(G(x,\xi),\eta_{\bar{\xi}}(\xi)+\psi^*(\xi)\right)=$$

$$=(\lambda^h-\tilde{\lambda}^h)\sqrt{\rho(x)}\left(G(x,\xi),\rho(\xi)\tilde{y}(\xi)\right)+$$

$$+\sqrt{\rho(x)}\left\{-\left(G_{\bar{\xi}}(x,\xi),\eta(\xi)\right]+\left(G(x,\xi),\psi^*(\xi)\right)\right\}.$$

Звідси, враховуючи обмеженість $G(x,\xi)$, $G_{\bar{\xi}}(x,\xi)$ (див. [4, с. 123]):

$$|G(x,\xi)|\le\frac{1}{C_1},\qquad \left|G_{\bar{\xi}}(x,\xi)\right|\le\frac{2}{C_1},$$

отримаємо оцінку

$$\|f\|_C\le M_1\left\{(1,|\eta|]+(1,\left|\psi^*\right|)\right\}+M_2\left|\lambda^h-\tilde{\lambda}^h\right|.$$

Підставимо цю оцінку в (47), повернемося до функції $\bar{z}(x)=\dfrac{v(x)}{\sqrt{\rho(x)}}$ і врахуємо нерівність (25), а також лему 4:

$$\|\bar{z}\|_C\le M\left\{(1,|\eta|]+(1,\left|\psi^*\right|)\right\}.$$

Нас цікавить різниця $z=y-\tilde{y}$, яка виражається наступним чином:

$$z = \frac{\bar{z}}{C_0} + \frac{1 - C_0}{C_0}\tilde{y} = \frac{\bar{z}}{C_0} + \frac{1 - C_0^2}{C_0(1 + C_0)}\tilde{y}.$$

Оскільки $\|\tilde{y}\|_C$ обмежена, то звідси випливає, що при достатньо малому h маємо

$$\|z\|_C \le \frac{\|\bar{z}\|_C}{C_0} + \left|\frac{1 - C_0^2}{C_0(1 + C_0)}\right| \|\tilde{y}\|_C \le M(C_0)(\|\bar{z}\|_C + \left|1 - C_0^2\right|).$$

З формули (35) бачимо, що

$$\left|1 - C_0^2\right| \le (\rho, \bar{z}^2)^{1/2}(\rho, \tilde{y}^2)^{1/2} + \left|(\rho, \tilde{y}^2) - (\tilde{\rho}, \tilde{y}^2)\right| \le$$

$$\le M_1 \|\bar{z}\|_C + \left|(\rho, \tilde{y}^2) - (\tilde{\rho}, \tilde{y}^2)\right|.$$

Отже,

$$\|z\|_C \le M\left(\|\bar{z}\|_C + \left|(\rho, \tilde{y}^2) - (\tilde{\rho}, \tilde{y}^2)\right|\right).$$

Підставляючи оцінку для $\|\bar{z}\|_C$, переконуємося, що правильною є

Теорема 1. *Нехай виконуються умови леми* 4. *Тоді при достатньо малому* $h \le h_0$ *маємо такі оцінки*:

$$\|y_n - \tilde{y}_n\|_C \le \|z_n\|_C \le M_1\{(1, |\eta|] + (1, \left|\psi^*\right|)\} + M_2\left|(\rho, \tilde{y}^2) - (\tilde{\rho}, \tilde{y}^2)\right|,$$

$$\left|\lambda_n^h - \tilde{\lambda}_n^h\right| \le M_3\{(1, |\eta|] + (1, \left|\psi^*\right|)\},$$

де сталі M_i, $i = 1, 2, 3$, *залежать тільки від* C_i', $i = 1, 2, \ldots, 5$, *та* C_0.

Ця теорема доводить неперервну залежність розв'язку задачі (14) від коефіцієнтів, тобто коефіцієнтну стійкість (див. [8]).

4. Алгоритмічна реалізація ТТРС. Перейдемо до алгоритмічної реалізації ТТРС (14). Насамперед зауважимо, що цю схему можемо записати у вигляді

$$(a y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - (d - \lambda\rho) y = 0, \qquad x \in \hat{\omega}_h, \qquad y_0 = y_N = 0, \tag{48}$$

де

$$a_j = \left[\frac{1}{h_j} v_1^j(x_j, \lambda)\right]^{-1}, \tag{49}$$

$$d_j - \lambda\rho_j = \frac{1}{\hbar_j v_1^j(x_j, \lambda)} \int_{x_{j-1}}^{x_j} v_1^j(\xi, \lambda)[q(\xi) - \lambda r(\xi)]\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\hbar_j v_2^j(x_j, \lambda)} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v_2^j(\xi, \lambda)[q(\xi) - \lambda r(\xi)]\, d\xi. \tag{50}$$

Згідно з основною ідеєю (див. Вступ) необхідно виразити коефіцієнти різницевої схеми a_j, $d_j - \lambda\rho_j$ тільки через розв'язки задач Коші (4), (5). Як випливає з (49), для a_j вже маємо необхідне представлення. Враховуючи рівності (22), рівність (50) перепишемо у вигляді

$$d_j - \lambda\rho_j = \frac{1}{\hbar_j v_1^j(x_j, \lambda)}\left[k(x_j)\frac{dv_1^j(x_j, \lambda)}{dx} - 1\right] +$$

$$+ \frac{1}{\hbar_j v_2^j(x_j, \lambda)}\left[-k(x_j)\frac{dv_2^j(x_j, \lambda)}{dx} - 1\right] =$$

$$= \hbar_j^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{v_\alpha^j(x_j, \lambda)} \left[(-1)^{\alpha+1} m_\alpha^j(x_j, \lambda) - 1 \right],$$

де

$$m_\alpha^j(x, \lambda) = k(x) \frac{dv_\alpha^j(x, \lambda)}{dx}.$$

Отже, для обчислення коефіцієнтів a_j, $d_j - \lambda\rho_j$ ТТРС (48) для будь-якого вузла x_j сітки $\hat{\omega}_h$ потрібно розв'язати дві задачі Коші (4), (5) з гладкими коефіцієнтами: при $\alpha = 1$ на інтервалі $[x_{j-1}, x_j]$ (вперед) і при $\alpha = 2$ на інтервалі $[x_j, x_{j+1}]$ (назад).

Кожну з вказаних задач Коші можна наближено розв'язувати за один крок методом розкладу в ряд Тейлора або методом Рунґе – Кутта порядку точності $\bar{m} = 2\left[\frac{m+1}{2}\right]$ (де m – ціле додатне число, $[\cdot]$ – ціла частина). Тоді отримаємо різницеву схему рангу $\bar{m}$. Дослідження точності та розробка алгоритму знаходження розв'язку такої схеми будуть проведені в подальшому.

1. *Макаров В. Л., Гаврилюк И. П., Лужных В. М.* Точная и усеченные разностные схемы для одного класса задач Штурма – Лиувилля с вырождением // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 7. – С. 1265–1275.
2. *Макаров В. Л., Гураль М. М., Кутнів М. В.* Вагові оцінки точності різницевих схем для задачі Штурма – Ліувілля // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 1. – С. 7–22.
   Те саме: *Makarov V. L., Gural' M. M., Kutniv M. V.* Weight estimates of the accuracy of difference schemes for the Sturm–Liouville problem // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, No. 1. – P. 1–25. – https://doi.org/10.1007/s10958-017-3278-7.
3. *Приказчиков В. Г.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма–Лиувилля // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1969. – **9**, № 2. – С. 315–336.
   Те саме: *Prikazchikov V. G.* High-accuracy homogeneous difference schemes for the Sturm–Liouville problem // USSR Comput. Math. & Math. Phys. – 1969. – **9**, No. 2. – P. 76–106.– https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90095-0.
4. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. – Москва: Наука, 1971. – 553 с.
5. *Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – Москва: Высш. шк., 1987. – 296 с.
6. *Макаров В. Л., Самарский А. А.* О реализации точных трехточечных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с кусочно-гладкими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1990. – **312**, № 3. – С. 538–543.
   Те саме: *Samarskii A. A., Makarov V. L.* On the realization of exact three-point difference schemes for second- order ordinary differential equations with piecewise smooth coefficients // Sov. Math. Dokl. – 1990. – **41**, No. 3. – P. 463–467.
7. *Самарский А. А., Макаров В. Л.* О реализации точных трехточечных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-гладкими коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 7. – С. 1254–1265.
   Те саме: *Samarskii A. A., Makarov V. L.* Realization of exact three–point difference schemes for second–order ordinary differential equations with piecewise–smooth coefficients // Differ. Equat. – 1991. – **26**, No. 7. – P. 922–930.
8. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1961. – **1**, № 1. – С. 5–63.
   Те саме: *Tikhonov A. N. Samarskii A. A.* Homogeneous difference schemes // USSR Comput. Math. & Math. Phys. – 1961. – **1**, No. 1. – P. 5–67.
   – https://doi.org/10.1016/0041-5553(62)90005-8.

9. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // Журн. вычисл. математики и мат. физики. − 1961. − **1**, № 3. − С. 425−440.
Те саме: *Tikhonov A. N. Samarskii A. A.* Homogeneous difference schemes of a high degree of accuracy on non-uniform nets // USSR Comput. Math. & Math. Phys. − 1961. − **1**, No. 3. − P. 465−486. − https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90148-4.
10. *Хартман. Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. − Москва: Мир, 1970. − 720 с.
Те саме: *Hartman Ph.* Ordinary differential equations. − New York etc.: John Wiley & Sons, 1964. − xiv + 612 p.
11. *Gavrilyuk I. P., Hermann M., Makarov V. L., Kutniv M. V.* Exact and truncated difference schemes for boundary value ODEs. − Springer−Basel AG: Birkhäuser, 2011. − xi+247 p. − Int. Series of Numer. Math. − Vol. 159. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0107.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ТОЧНОЙ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Разработана новая алгоритмическая реализация точных трехточечных разностных схем на неравномерной сетке для задачи Штурма − Лиувилля. Показано, что для вычисления коэффициентов точной схемы в произвольном узле сетки необходимо решить две вспомогательные задач Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка: одну на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ *(вперед) и одну на отрезке* $[x_j, x_{j+1}]$ *(назад). Доказана теорема о коэффициентной устойчивости точной трехточечной разностной схемы.*

Ключевые слова: *задача Штурма − Лиувилля, шаблонные функции, точная трехточечная разностная схема, коэффициентная устойчивость.*

ALGORITMIC REALIZATION OF EXACT THREE-POINT DIFFERENCE SCHEME FOR STURM – LIOUVILLE PROBLEM

A new algorithmic implementation of exact three-point difference schemes on irregular greed for the Sturm − Liouville problem is developed. It is shown that to compute the coefficients of the exact scheme in an arbitrary grid node, it is necessary to solve two auxiliary Cauchy problems for the second order linear ordinary differential equations: one problem on the interval $[x_{j-1}, x_j]$ *(forward) and one problem on the interval* $[x_j, x_{j+1}]$ *(back). The theorem on the coefficient stability of exact three-point difference scheme is proved.*

Key words: *Sturm − Liouville problem, pattern functions, exact three-point difference scheme, coefficient stability.*

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[3] Жешув. технолог. ун-т, Жешув, Польща

Одержано
01.02.20