УДК 517.927.6+517.984.52

Я. О. Баранецький[✉], І. І. Демків, П. І. Каленюк

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА З БАГАТОТОЧКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНИХ ЗА БІРКГОФОМ КРАЙОВИХ УМОВ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПАРНОГО ПОРЯДКУ

Досліджено спектральні властивості несамоспряженої задачі для оператора диференціювання порядку $2n$ *з нелокальними умовами, що є багатоточковими збуреннями сильно регулярних за Біркгофом самоспряжених умов. Встановлено достатні умови, за яких система власних функцій є повною і при деяких додаткових припущеннях утворює базис Рісса. Побудовано множину операторів перетворення, кожен елемент якої відображає систему власних функцій незбуреної задачі у систему власних функцій деякої ізоспектральної задачі. Вивчено випадки задач з регулярними та нерегулярними за Біркгофом двоточковими збуреннями. Визначено умови існування і єдиності розв'язку задачі.*

Ключові слова: *регулярні за Біркгофом крайові умови, оператор перетворення, базис Рісса.*

Вступ. Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь на скінченному інтервалі почала формуватися в працях [21, 22, 26–28]. Фундаментальні результати спектральної теорії операторів крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь отримано в роботах [6–8, 11–14, 23, 25]. Основи теорії операторів перетворення та її різноманітні застосування висвітлено в роботах [10, 24].

У цій роботі продовжено розпочаті в працях [1–5, 9, 15–20] дослідження методами операторів перетворення спектральних властивостей та умов розв'язності нелокальних багатоточкових задач для диференціальних операторів парного порядку. Зокрема, для звичайних диференціальних рівнянь нелокальні задачі вивчено в роботах [1–4, 9]. Для звичайних диференціальних рівнянь, які містять оператор інволюції в працях [16, 20]. Нелокальні задачі для диференціально-операторних рівнянь з інволюцією досліджено в статтях [15, 17]. Властивості розвязків задач для еліптичних рівнянь зі сталими коефіцієнтами вивчено в роботах [18, 19].

1. Основні позначення. Нехай

$$W_2^{2n}(0,1) := \{y \in L_2(0,1) : y^{(m)} \in C[0,1],\ y^{(2n)} \in L_2(0,1),\ m = 0,1,\dots,2n-1\},$$

$$(y;u)_{W_2^{2n}(0,1)} := \sum_{k=0}^{2n} (y^{(k)};u^{(k)})_{L_2(0,1)},$$

$$\|y\|^2_{W_2^{2n}(0,1)} := (y;y)_{W_2^{2n}(0,1)},$$

$W^*(0,1)$ – простір лінійних неперервних функціоналів над $W_2^{2n}(0,1)$;

E – тотожне перетворення в просторі $L_2(0,1)$;

$I : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $Iy(x) \equiv y(1-x)$ – оператор інволюції у просторі $L_2(0,1)$;

$p_j := \frac{1}{2}(E + (-1)^j I)$ – ортопроектори простору $L_2(0,1)$;

$L_{j,2}(0,1) := \{y \in L_2(0,1) : y = p_j y\}$;

[✉] baryarom@ukr.net

$K_j \equiv \{e^{icx} + (-1)^j e^{ic(1-x)}, c \in \mathbb{R}\}$, $j = 0,1$;

$[L_2(0,1)]$ − алгебра лінійних обмежених операторів $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$.

Означення 1. Функцію із простору $L_2(0,1)$ ($L_{1,2}(0,1)$) будемо називати симетричною (антисиметричною) відповідно. Крайову умову будемо називати симетричною (антисиметричною), якщо до ядра відповідного функціонала належить довільна функція із K_1 (K_0). Наприклад, симетричною є умова $y(0) + y(1) = 0$. Аналогічно, антисиметричною є умова $y(0) - y(1) = 0$.

Вивчається багатоточкова задача

$$(-1)^n y^{(2n)}(x) + cy(x) = f(x), \qquad c > 0, \qquad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$\ell_j y := y^{(m_j)}(0) + (-1)^{m_j} y^{(m_j)}(1) + \ell_j^0 y = 0,$$

$$\ell_{n+j} y := y^{(m_{n+j})}(0) - (-1)^{m_{n+j}} y^{(m_{n+j})}(1) = 0, \qquad j = 1,\dots,n, \tag{2}$$

де

$$\ell_j^0 y := \sum_{r=0}^{k_0} \sum_{m=0}^{k_j} b_{r,m,j} y^{(m)}(x_r),$$

$$b_{r,m,j} \in \mathbb{R}, \quad r = 0,1,\dots,k_0, \quad m = 0,1,\dots,k_j, \qquad j = 1,\dots,n,$$

$$M_0 := \{m_1, m_2, \dots, m_n\}, \qquad m_1 < m_2 < \dots < m_n,$$

$$M_1 := \{m_{n+1}, m_{n+2}, \dots, m_{2n}\}, \qquad m_{n+1} < m_{n+2} < \dots < m_{2n}.$$

Нехай L − оператор задачі (1), (2):

$$Ly := (-1)^n y^{(2n)}(x), \qquad y \in D(L) \subset W_2^{2n}(0,1),$$

$$D(L) := \left\{y \in W_2^{2n}(0,1) : \ell_j y = 0,\ j = 1,\dots,2n\right\}.$$

Нагадаємо деякі означення.

Нехай H − сепарабельний гільбертовий простір.

Означення 3. Систему елементів $\{e_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$ називають замкнутою (повною) в просторі H, якщо лінійна оболонка цієї системи всюди щільна в H, тобто будь-який елемент простору H можна наблизити лінійною комбінацією елементів цієї системи з будь-якою точністю за нормою простору H.

Означення 4. Систему елементів $\{e_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$ називають тотальною в H, якщо лише нульовий елемент простору H є ортогональним до всіх елементів цієї системи.

Означення 5. Систему елементів $\{g_s\}_{s=1}^{\infty} \subset H$ називають біортогональною в H до системи елементів $\{e_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$, якщо $(g_s; e_m)_H = \delta_{s,m}$, $s, m \in \mathbb{N}$.

Означення 6. Систему елементів $\{e_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$ називають базисом Рісса простору H, якщо існує обмежений разом з оберненим оператор $A : H \to H$ такий, що система $\{Ae_m\}_{m=1}^{\infty}$ є ортонормованим базисом в H.

Нехай виконуються такі основні припущення.

Припущення P_1: $\quad b_{r,m,j} = -(-1)^m b_{k_0-r,m,j}, \qquad x_j = 1 - x_{k_0-j},$

$$r = 0,1,\dots,k_0, \quad m = 0,1,\dots,k_j, \quad j = 1,\dots,n.$$

Припущення P_2: $\forall m \in \{0,1,\ldots,2n-1\} \quad m \in M_s \Rightarrow 2n-m-1 \in M_{1-s}$, $s = 0,1$.

Припущення P_3: умови (2) є сильно регулярними за Біркгофом.

Припущення P_4: $k_j \le m_j - 1, \quad j = 1,\ldots,n$.

Припущення P_5: $b_{r,m,j} = 0,\ r \ne 0,\ r \ne k_0,\ m = 0,1,\ldots,k_j,\ j = 1,\ldots,n$.

2. Самоспряжена задача. Розглянемо спектральну задачу

$$(-1)^n y^{(2n)}(x) = \lambda y(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

$$\ell_{0,j} y := y^{(m_j)}(0) + (-1)^{m_j} y^{(m_j)}(1) = 0,$$

$$\ell_{0,n+j} y = y^{(m_{n+j})}(0) - (-1)^{m_{n+j}} y^{(m_{n+j})}(1) = 0, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{4}$$

Нехай $L_0 : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ − оператор задачі (3), (4):

$$L_0 y := (-1)^n y^{(2n)}(x), \quad y \in D(L_0) \subset W_2^{2n}(0,1),$$

$$D(L_0) := \{ y \in W_2^{2n}(0,1) : \ell_{0,s} y = 0,\ s = 1,\ldots,2n \}.$$

Зауваження 1. Крайові умови (4) вибрано так, що справджуються співвідношення

$$\ell_{0,j} \in W_0^*(0,1), \quad \ell_{0,n+j} \in W_1^*(0,1), \quad j = 1,\ldots,n, \tag{5}$$

де $W_0^*(0,1)$ та $W_1^*(0,1)$ − відповідно сукупність симетричних та асиметричних функціоналів із $W^*(0,1)$.

Визначимо власні функції оператора L_0. Корені ρ_j, $j = 1,\ldots,n$, характеристичного рівняння $(-1)^n \rho^{2n} = \lambda$, $|\arg \rho| \le \frac{1}{2n}\pi$, яке відповідає диференціальному рівнянню (3), означимо співвідношеннями $\rho_j = \omega_j \rho$, де

$$\omega_1 = i, \quad \omega_j = \omega_1 \exp i \frac{1}{n} \pi (j-1), \quad \omega_{n+q} = -\omega_q,$$
$$j = 2,3,\ldots,n, \quad q = 1,\ldots,n.$$

Розглянемо фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (3):

$$y_q(x,\rho) := e^{\omega_q \rho x} + e^{\omega_q \rho (1-x)} \in L_{0,2}(0,1),$$

$$y_{n+q}(x,\rho) := e^{\omega_q \rho x} - e^{\omega_q \rho (1-x)} \in L_{1,2}(0,1), \quad q = 1,\ldots,n. \tag{6}$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$y(x,\rho) = \sum_{s=1}^{2n} C_s y_s(x,\rho), \quad C_s \in \mathbb{C}, \tag{7}$$

диференціального рівняння (3) у крайові умови (4), отримаємо рівняння для визначення власних значень оператора L_0:

$$\Delta(\rho, L_0) := \det [\ell_{0,r} y_s]_{r,s=1,\ldots,2n} = 0.$$

Зі співвідношень (4)−(7) отримуємо рівності

$$\ell_{0,j} y_{n+q}(x,\rho) = 0,$$

$$\ell_{0,n+j} y_q(x,\rho) = 0, \quad j,q = 1,\ldots,n.$$

Тому

$$\Delta(\rho, L_0) = \Delta_0(\rho, L_0)\Delta_1(\rho, L_0),$$

де

$$\Delta_0(\rho, L_0) := \det[\ell_{0,j} y_q]_{j,q=1,\dots,n},$$

$$\Delta_1(\rho, L_0) := \det[\ell_{0,n+j} y_{n+q}]_{j,q=1,\dots,n}.$$

Нехай $\rho_{s,k}$ – розв'язки рівняння $\Delta_s(\rho, L_0) = 0$, а $\lambda_{s,k} = (-1)^n \rho_{s,k}^{2n}$ – відповідні власні значення оператора L_0, пронумеровані в порядку зростання, $s = 0,1$, $k = 0,1,\dots$.

Побудуємо систему власних функцій оператора L_0.

За елементами систем (5), (6) визначимо функції $v_{0,k}(x, L_0) \in L_{0,2}(0,1)$:

$$v_{0,k}(x, L_0) := \gamma_{0,k} \begin{Vmatrix} y_1(x, \rho_{0,k}) & \dots & y_n(x, \rho_{0,k}) \\ \ell_{0,2} y_1 & \dots & \ell_{0,2} y_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \ell_{0,n} y_1 & \dots & \ell_{0,n} y_n \end{Vmatrix}, \qquad k = 0,1,\dots,$$

які після деяких перетворень набудуть вигляду

$$v_{0,k}(x, L_0) = \gamma_{1,k} \rho_{0,k}^{\beta_0} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} y_1(x, \rho_{0,k}) & \dots & y_r(x, \rho_{0,k}) & \dots & y_n(x, \rho_{0,k}) \\ \omega_1^{m_2}\left(1+(-1)^{m_2} e^{\omega_1 \rho_{0,k}}\right) & \dots & \omega_r^{m_2}\left(1+(-1)^{m_2} e^{\omega_r \rho_{0,k}}\right) & \dots & \omega_n^{m_2}\left(1+(-1)^{m_2} e^{\omega_n \rho_{0,k}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{m_n}\left(1+(-1)^{m_n} e^{\omega_1 \rho_{0,k}}\right) & \dots & \omega_r^{m_n}\left(1+(-1)^{m_n} e^{\omega_r \rho_{0,k}}\right) & \dots & \omega_n^{m_n}\left(1+(-1)^{m_n} e^{\omega_n \rho_{0,k}}\right) \end{Vmatrix},$$

$$k = 0,1,\dots. \tag{8}$$

Аналогічно визначаємо власні функції $v_{1,k}(x, L_0) \in L_{1,2}(0,1)$:

$$v_{1,k}(x, L_0) := \gamma_{2,k} \begin{Vmatrix} y_{n+1}(x, \rho_{1,k}) & \dots & y_{2n}(x, \rho_{1,k}) \\ \ell_{0,n+2} y_{n+1} & \dots & \ell_{0,n+2} y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \ell_{0,2n} y_{n+1} & \dots & \ell_{0,2n} y_{2n} \end{Vmatrix}, \qquad k = 0,1,\dots,$$

$$v_{1,k}(x, L_0) = \gamma_{3,k} \rho_{1,k}^{\beta_1} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} \omega_1^{m_{n+1}}\left(1-(-1)^{m_{n+2}} e^{\omega_1 \rho_{1,k}}\right) & \dots & \omega_q^{m_{n+1}}\left(1-(-1)^{m_{n+1}} e^{\omega_q \rho_{1,k}}\right) & \dots & \omega_n^{m_{n+1}}\left(1-(-1)^{m_{n+1}} e^{\omega_n \rho_{1,k}}\right) \\ \omega_1^{m_{n+2}}\left(1-(-1)^{m_{n+3}} e^{\omega_1 \rho_{1,k}}\right) & \dots & \omega_q^{m_{n+2}}\left(1-(-1)^{m_{n+1}} e^{\omega_q \rho_{1,k}}\right) & \dots & \omega_n^{m_{n+2}}\left(1-(-1)^{m_{n+2}} e^{\omega_n \rho_{1,k}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{m_{2n}}\left(1-(-1)^{m_{2n}} e^{\omega_1 \rho_{1,k}}\right) & \dots & \omega_q^{m_{2n}}\left(1-(-1)^{m_{2n}} e^{\omega_q \rho_{1,k}}\right) & \dots & \omega_n^{m_{2n}}\left(1-(-1)^{m_{2n}} e^{\omega_n \rho_{1,k}}\right) \end{Vmatrix},$$

$$k = 0,1,\dots, \tag{9}$$

де $\beta_s = m_{s,n+1} + m_{s,n+2} + \dots + m_{s,n+n}$, а параметри $\gamma_{2s+1,k}$ вибираємо таким чином, щоб виконувались рівності $\|v_{s,k}(x, L_0)\|_{L_2(0,1)} = 1$, $s = 0,1$, $k = 0,1,\dots$.

У роботі [9] встановлено, що, якщо припущення P_1, P_2 справджуються, то умови (2) є самоспряженими.

Отже, оператор L_0 породжується самоспряженим виразом $(-1)^n y^{(2n)}(x)$ і самоспряженими крайовими умовами (4).

Тому правильною є

Лема 1. *Нехай виконуються припущення* $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$. *Тоді оператор* L_0 *є самоспряженим.*

Отже, згідно з лемою 1, система

$$V(L_0) := \{v_{s,k}(x, L_0) \in L_2(0,1),\ s = 0,1,\ k = 0,1,\ldots\}$$

власних функцій самоспряженого оператора L_0 є ортонормованим базисом простору $L_2(0,1)$.

Зауваження 2. Системи функцій

$$V_s(L_0) := \{v_{s,k}(x, L_0) \in L_2(0,1),\ s = 0,1,\ k = 0,1,\ldots\},$$

є ортонормованими базисами в просторах $L_{0,2}(0,1)$, $L_{1,2}(0,1)$ відповідно.

3. Несамоспряжені крайові задачі.

Лема 2. *Нехай виконуються припущення* $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$. *Тоді оператори* L_0 *та* L *мають однакові власні значення.*

Д о в е д е н н я. Підставляючи загальний розв'язок диференціального рівняння (3) у крайові умови (4), отримаємо рівняння для визначення власних значень оператора L:

$$\Delta(\rho, L) := \det[\ell_r y_s]_{r,s=1,\ldots,2n} = 0.$$

Зі співвідношень (2), (4), (6), отримуємо

$$\ell_j^0 \in W_1^*(0,1),$$

$$\ell_j y_{n+q}(x,\rho) = 0,$$

$$\ell_{n+j} y_q(x,\rho) = 0, \qquad j,q = 1,\ldots,n.$$

Тому $\Delta(\rho, L) = \Delta_0(\rho, L)\Delta_1(\rho, L)$, де

$$\Delta_0(\rho, L) := \det[\ell_j y_q]_{j,q=1,\ldots,n} = \Delta_0(\rho, L_0),$$

$$\Delta_1(\rho, L) := \det[\ell_{n+j} y_{n+q}]_{j,q=1,\ldots,n} = \Delta_1(\rho, L_0).$$

Отже, $\Delta(\rho, L) \equiv \Delta(\rho, L_0)$, $\rho \in \mathbb{C}$. ♦

Розглянемо при кожному $b \in \mathbb{R}$ і $p \in \{1,\ldots,n\}$ для рівняння (3) задачу з крайовими умовами

$$\ell_{1,p,j} y := y^{(m_j)}(0) + (-1)^{m_j} y^{(m_j)}(1) = 0,$$

$$\ell_{1,p,p} y = y^{(m_p)}(0) + (-1)^{m_{n+j}} y^{(m_p)}(1) = 0, \qquad j \neq p,$$

$$\ell_{1,p,n+j} y = y^{(m_{n+j})}(0) - (-1)^{m_{n+j}} y^{(m_{n+j})}(1) = 0,$$

$$\ell_p^1 y := b\big(y^{(m_p)}(0) - (-1)^{m_p} y^{(m_p)}(1)\big), \qquad j = 1,\ldots,n. \tag{10}$$

Нехай $L_{1,p} : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ − оператор задачі (3), (10):

$$L_{1,p} y := (-1)^n y^{(2n)}(x), \qquad y \in D(L_{1,p}) \subset W_2^{2n}(0,1),$$

$$D(L_{1,p}) := \{y \in W_2^{2n}(0,1) : \ell_{1,p,s} y = 0,\ s = 1,\ldots,2n\}.$$

Лема 3. *Система власних функцій* $V(L_{1,p})$ *оператора* $L_{1,p}$ *є базисом Рісса простору* $L_2(0,1)$.

Д о в е д е н н я. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $\ell_p^1 v_{0,k}(x,L_0)=0$, $k=0,1,\ldots$.

Отже, $v_{0,k}(x,L_{1,p}):=v_{0,k}(x,L_0)$, $k=0,1,\ldots$.

Побудуємо власні функції $v_{1,k}(x,L_{1,p})$ оператора $L_{1,p}$, які відповідають власним значенням $\lambda_{1,k}(L_{1,p})=\lambda_{1,k}(L_0)$, $k=0,1,\ldots$.

Нехай $\rho_{1,k}$ – корені рівняння

$$\Delta_1(\rho,L_{1,p}):=\det[\ell_{1,p,n+j}y_{n+q}]_{j,q=1,\ldots,n}=0.$$

Розглянемо функції

$$y_{1,q}(x,\rho_{1,k}):=e^{\omega_q\rho_{1,k}x}+e^{\omega_q\rho_{1,k}(1-x)}\in L_{0,2}(0,1),$$

$$y_{2,p}(x,\rho_{1,k}):=\sum_{q=1}^{n}\Delta_{p,q}(\rho_{1,k})y_{1,q}(x,\rho_{1,k}), \tag{11}$$

де

$$\Delta_{p,q}(\rho_{1,k}):=\det[\ell_{1,p,j}y_{1,s}(x,\rho_{1,k})]_{\substack{j,s=1,\ldots,n,\\ j\neq p,s\neq q}},\qquad k=0,1,\ldots.$$

Безпосередньою підстановкою функцій (11) у крайові умови (10) отримуємо рівності

$$\ell_{1,j}y_{2,p}(x,\rho_{1,k})=0,\quad j\neq p,\quad j=1,\ldots,2n,\quad k=0,1,\ldots.$$

Власні функції $v_{1,k}(x,L_{1,p})$ оператора $L_{1,p}$ означимо співвідношенням

$$v_{1,k}(x,L_{1,p}):=v_{1,k}(x,L_0)+\eta_{p,k}y_{2,p}(x,\rho_{1,k}),\qquad k=0,1,\ldots. \tag{12}$$

Підставляючи вираз (12) у крайові умови (10), маємо

$$\eta_{p,k}=-(\ell_{1,p,p}y_{2,p}(x,\rho_{1,k}))^{-1}\ell_{1,p,p}v_{1,k}(x,L_0).$$

Нехай $y_{3,p}(x,\rho_{1,k}):=\eta_{p,k}y_{2,p}(x,\rho_{1,k})$, якщо $b=1$.

Тоді з формули (12) отримаємо

$$v_{1,k}(x,L_{1,p})=v_{1,k}(x,L_0)+by_{3,p}(x,\rho_{1,k}),\qquad k=0,1,\ldots. \tag{13}$$

Отже, оператор $L_{1,p}$ має систему $V(L_{1,p})$ власних функцій (13) і

$$v_{0,k}(x,L_{1,p})=v_{0,k}(x,L_0),\qquad k=0,1,\ldots. \tag{14}$$

Умови (10) є сильно регулярними за Біркгофом [13]. Тому [11, 12] система $V(L_{1,p})$ є базисом Рісса в просторі $L_2(0,1)$.

Лему доведено. ♦

Зауваження 3. Базис Рісса є майже нормованою системою [7].

Тому, беручи до уваги співвідношення

$$\left\|v_{1,k}(x,L_{2,p})\right\|_{L_2(0,1)}=1+|b|\left\|y_{3,p}(x,\rho_{1,k})\right\|_{L_2(0,1)}<\infty,\qquad k=0,1,\ldots,$$

отримуємо обмеженість послідовності чисел

$$\left\|y_{3,p}(x,\rho_{1,k})\right\|_{L_2(0,1)}\le C_{1,p}<\infty. \tag{15}$$

Нехай $m_{n+r}=2n-1-m_p$, $r\in\{0,1,\ldots,n\}$. Розглянемо вираз

$$y^{(s)}(1)z^{(2n-s-1)}(1)-y^{(s)}(0)z^{(2n-s-1)}(0),\qquad s=0,1,\ldots,2n-1,$$

і запишемо крайові умови задачі, спряженої до задачі (3), (10):

$$(-1)^n z^{(2n)}(x) = \bar{\lambda} z(x), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad x \in (0,1), \tag{16}$$

$$\ell^*_{1,n+r,j} z := z^{(m_j)}(0) + (-1)^{m_j} z^{(m_j)}(1) = 0,$$

$$\ell^*_{1,n+r,n+r} z := \left(z^{(m_{n+r})}(0) - (-1)^{m_{n+r}} z^{(m_{n+r})}(1)\right) + \ell^{2*}_{n+r} z = 0,$$

$$\ell^*_{1,n+r,n+j} z = z^{(m_{n+j})}(0) - (-1)^{m_{n+j}} z^{(m_{n+j})}(1) = 0, \quad j \neq r, \quad j, r = 1, \ldots, n,$$

$$\ell^{2*}_{n+r} z := b\left(z^{(m_{n+r})}(0) - (-1)^{m_{n+r}} z^{(m_{n+r})}(1)\right), \qquad r = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Розглянемо функції

$$y_{1,n+q}(x, \rho_{0,k}) := e^{\omega_q \rho_{0,k} x} - e^{\omega_q \rho_{0,k}(1-x)} \in L_{1,2}(0,1), \qquad q = 1, \ldots, n,$$

$$y_{2,n+r}(x, \rho_{0,k}) := \sum_{q=1}^{n} \Delta_{r,q}(\rho_{0,k}) y_{1,n+q}(x, \rho_{0,k}), \qquad r = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

де

$$\Delta_{r,q}(\rho_{0,k}) := \det\left[\ell_{1,n+r,j} y_{1,s}(x, \rho_{0,k})\right]_{\substack{j,s=1,\ldots,n \\ j \neq n+r, s \neq n+q}}, \quad q, r = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Безпосередньою підстановкою функцій (18) у крайові умови (17) отримуємо рівності

$$\ell^*_{1,n+r,j} y_{2,n+r}(x, \rho_{0,k}) = 0, \qquad j \neq n+r, \quad j = 1, \ldots, 2n, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

Власні функції $w_{s,m}(x, L^*_{1,p})$ оператора $L^*_{1,p} : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, спряженого до $L_{1,p}$, означимо співвідношенням

$$w_{0,m}(x, L^*_{1,p}) := v_{0,k}(x, L_0) + \eta_{n+r,k} y_{2,n+r}(x, \rho_{0,k}), \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{19}$$

Підставляючи вираз (19) у крайові умови (17), маємо

$$\eta_{n+r,k} = -\left(\ell^*_{1,n+r,n+r} y_{2,n+r}(x, \rho_{0,k})\right)^{-1} \ell^*_{1,n+r,n+r} v_{0,k}(x, L_0).$$

Нехай $y_{3,n+r}(x, \rho_{0,k}) := \eta_{n+r,k} y_{2,n+r}(x, \rho_{0,k})$, якщо $b = 1$.

Безпосередньою підстановкою переконуємося, що

$$w_{1,m}(x, L^*_{1,p}) = v_{1,m}(x, L_0) \in D(L^*_{1,p})$$

є власною функцією оператора $L^*_{1,p}$.

Отже, оператор $L^*_{1,p}$ має систему власних функцій

$$W(L^*_{1,p}) = \{w_{s,m}(x, L^*_{1,p}) \in L_2(0,1),\ s = 0, 1,\ m = 0, 1, \ldots\},$$

яка є базисом Рісса [7] у просторі $L_2(0,1)$.

4. Оператори перетворення. Розглянемо оператор $B_p : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, власні значення якого співпадають із власними значеннями оператора L_0, а власні функції визначаються співвідношеннями

$$v_{0,k}(x, B_p) := v_{0,k}(x, L_0),$$

$$v_{1,k}(x, B_p) := v_{1,k}(x, L_0) + y_{3,p}(x, \rho_{1,k}), \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{20}$$

Зауваження 4. Оператор B_p є частковим випадком оператора $L_{1,p}$ при $b = 1$. Тому, згідно з твердженням леми 3, система функцій $V(B_p)$ є базисом Рісса простору $L_2(0,1)$.

Виберемо будь-яку числову послідовність $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ і розглянемо оператор $B_{p,\theta} : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, власні значення якого співпадають з власними значеннями оператора L_0, а власні функції визначаються співвідношеннями

$$v_{0,k}(x, B_{p,\theta}) := v_{0,k}(x, L_0), \quad k = 0,1,\ldots, \tag{21}$$

$$v_{1,k}(x, B_{p,\theta}) := v_{1,k}(x, L_0) + \theta_k y_{3,p}(x, \rho_{1,k}), \quad k = 0,1,\ldots. \tag{22}$$

Розглянемо оператор $R(B_{p,\theta}) : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, який відображає $V(L_0)$ у систему функцій $V(B_{p,\theta})$:

$$R(B_{p,\theta}) v_{s,k}(x, L_0) := v_{s,k}(x, B_{p,\theta}), \quad s = 0,1, \quad k = 0,1,\ldots,$$

а також оператор $S(B_{p,\theta}) := R(B_{p,\theta}) - E$, де E – тотожне перетворення простору $L_2(0,1)$.

Беручи до уваги означення елементів системи $V(B_{p,\theta})$, отримаємо

$$S(B_{p,\theta}) : L_{1,2}(0,1) \to L_{0,2}(0,1), \quad S(B_{p,\theta}) : L_{0,2}(0,1) \to 0, \quad S^2(B_{p,\theta}) = 0.$$

Тому існує оператор $\left(R(B_{p,\theta})\right)^{-1} = E - S(B_{p,\theta})$.

Зауваження 5. Оператор $B_{p,\theta}$ породжується задачею для рівняння (3) та нелокальними умовами (10), де

$$\ell_p^1 y := -\sum_{k=0}^{\infty} \left(y, v_{1,k}(x, L_0)\right)_{L_2(0,1)} \left(v_{1,k}(x, L_0) + \theta_k y_{3,p}(x, \rho_{1,k})\right). \tag{23}$$

Лема 4. *Для будь-якої послідовності* $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *система функцій* $V(B_{p,\theta})$ *є повною і мінімальною у просторі* $L_2(0,1)$.

Д о в е д е н н я. Покажемо від протилежного, що система функцій $V(B_{p,\theta})$ є тотальною (повною) в просторі $L_2(0,1)$.

Нехай існує функція $h = h_0 + h_1$, $h_s \in L_{s,2}(0,1)$, $s = 0,1$, яка є ортогональною до всіх елементів системи $V(B_{p,\theta})$. Враховуючи, що за лемою 1 система (21) є ортонормованим базисом простору $L_{0,2}(0,1)$, отримуємо, що $h_0 \equiv 0$. Отже, $h = h_1 \in L_{1,2}(0,1)$.

Із припущення ортогональності функції h до елементів системи $V(B_{p,\theta})$ маємо рівності

$$\left(h; v_{1,k}(x, B_{p,\theta})\right)_{L_2(0,1)} = \left(h_0; v_{1,k}(x, L_0)\right)_{L_2(0,1)} = 0, \quad k = 0,1,\ldots.$$

Беручи до уваги, що система $V_1(L_0)$ є ортонормованим базисом простору $L_{0,2}(0,1)$, отримуємо, що $h_1 \equiv 0$, $h \equiv 0$.

Нехай

$$\theta_{k,0} = \begin{cases} 1, & \theta_k = 0, \\ \theta_k, & \theta_k \neq 0, \end{cases} \quad k = 0,1,\ldots,$$

$$H(B_{p,\theta}) := \left\{ h = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{1} h_{s,k} v_{1,k}(x, L_0) \in L_2(0,1) : \right.$$

$$\left. \|h\|_{H(B_{p,\theta})}^2 := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{1} \left|\theta_{k,0} h_{s,k}\right|^2 < \infty \right\}.$$

Зауваження 6. Якщо послідовність $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ обмежена, то $H(B_{p,\theta}) = L_2(0,1)$.

Зауваження 7. Згідно з означенням простору $H(B_{p,\theta})$ оператор $R(B_{p,\theta}) : H(B_{p,\theta}) \to L_2(0,1)$ є обмеженим.

Для подальшого доведення леми розглянемо співвідношення

$$h := \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{1} h_{s,k} v_{s,k}(x, L_0),$$

$$R(B_{p,\theta})h := \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{1} h_{s,k} v_{s,k}(x, B_{p,\theta}),$$

$$v_{1,k}(x, B_{p,\theta}) = (1-\theta_k)v_{1,k}(x, L_0) + \theta_k v_{1,k}(x, B_p),$$

$$\left\|R(B_{p,\theta})h\right\|^2_{L_2(0,1)} \le 2\|h\|^2_{L_2(0,1)} +$$

$$+ 2\left(\|h\|^2_{H(B_{p,\theta})} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{1} \left|\theta_{k,0} h_{s,k}\right|^2 \left\|R(B_p) v_{s,k}(x, L_0)\right\|^2_{L_2(0,1)}\right),$$

$$\left\|R(B_{p,\theta})h\right\|^2_{L_2(0,1)} \le 2\|h\|^2_{L_2(0,1)} + 2\left(1 + \left\|R(B_p)\right\|^2_{[L_2(0,1)]} \|h\|^2_{H(B_{p,\theta})}\right).$$

Тому [6] існують спряжений оператор $R^*(B_{p,\theta}) = E + S^*(B_{p,\theta})$ та оператор $(R^*(B_{p,\theta}))^{-1} = E - S^*(B_{p,\theta})$, який відображає систему $V_1(L_0)$ у систему функцій $W(B_{p,\theta})$, біортогональну до $V(B_{p,\theta})$.

Отже, $V(B_{p,\theta})$ − мінімальна в просторі $L_2(0,1)$ система функцій.

Лему доведено. ♦

Лема 5. *Система функцій $V(B_{p,\theta})$ є базисом Рісса в просторі $L_2(0,1)$ тоді й лише тоді, коли послідовність $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$ є обмеженою.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Якщо система функцій $V(B_{p,\theta})$ є базисом Рісса, то вона є майже нормованою [7].

Тому, враховуючи (22), отримуємо співвідношення

$$0 < C_{2,p} \le \left\|v_{1,k}(x, B_{p,\theta})\right\|_{L_2(0,1)} = C_{1,p}\left(1 + |\theta_k|\right) \le C_{3,p} < \infty.$$

Достатність. Якщо послідовність $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ обмежена, то беручи до уваги зауваження 6, отримуємо $H(B_{p,\theta}) = L_2(0,1)$.

Тому, враховуючи зауваження 7, маємо $R(B_{p,\theta}) \in [L_2(0,1)]$.

Отже, система $V(B_{p,\theta})$ є базисом Рісса за означенням [7].

Лему доведено. ♦

Сукупність операторів $B_{p,\theta}$, власні функції яких визначаються формулами (21), (22), позначимо через $Q_{1,p}(L_0)$, $p = 1, \dots, n$.

Відповідну множину операторів перетворення $R(B_{p,\theta}) = E + S(B_{p,\theta})$ позначимо через $\Gamma_{1,p}(L_0)$, $p = 1, \dots, n$.

На множині $\Gamma_{1,p}(L_0)$ введемо операцію множення

$$R(B_{p,\theta_1})R(B_{p,\theta_2}) := E + S(B_{p,\theta_1}) + S(B_{p,\theta_2}) = R(B_{p,\theta_2})R(B_{p,\theta_1}),$$

а також обернений оператор

$$(R(B_{p,\theta}))^{-1} = E - S(B_{p,\theta}).$$

Отже, $\Gamma_{1,p}(L_0)$ є абелевою групою відносно множення.

Виберемо n послідовностей дійсних чисел $\{\theta_{p,k}\}_{k=0}^{\infty}$, $p = 1,\dots,n$, які позначимо через Θ, і розглянемо оператор $B_\Theta : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, власні значення якого співпадають з власними значеннями оператора L_0, а власні функції визначаються співвідношеннями

$$v_{0,k}(x, B_\Theta) = v_{0,k}(x, L_0),$$

$$v_{1,k}(x, B_\Theta) = v_{1,k}(x, L_0) + \sum_{p=1}^{n} \theta_{p,k} y_{3,p}(x, \rho_{1,k}), \qquad k = 0,1,\dots. \tag{24}$$

Розглянемо оператор перетворення

$$R(B_\Theta) := E + S(B_\Theta) : L_2(0,1) \to L_2(0,1),$$

який відображає систему власних функцій $V(L_0)$ оператора L_0 у систему власних функцій $V(B_\Theta)$ оператора B_Θ:

$$R(B_\Theta) v_{s,k}(x, L_0) := v_{s,k}(x, B_\Theta), \qquad s = 0,1, \qquad k = 0,1,\dots.$$

З означення оператора B_Θ отримуємо

$$S(B_\Theta) : L_{1,2}(0,1) \to L_{0,2}(0,1), \qquad S(B_\Theta) : L_{0,2}(0,1) \to 0, \qquad S^2(B_\Theta) = 0.$$

Тому існує оператор

$$(R(B_\Theta))^{-1} = E - S(B_\Theta) : L_2(0,1) \to L_2(0,1).$$

Зауваження 8. Оператор B_Θ породжується задачею для рівняння (3) і нелокальними умовами

$$\ell_p y := y^{(m_p)}(0) + (-1)^{m_p} y^{(m_p)}(1) + \ell_p^2 y = 0,$$

$$\ell_{n+j} y := y^{(m_{n+j})}(0) - (-1)^{m_{n+j}} y^{(m_{n+j})}(1) = 0,$$

$$\ell_p^2 y := -\sum_{k=0}^{\infty} \left(y, v_{1,k}(x, L_0)\right)_{L_2(0,1)} \left(v_{1,k}(x, L_0) + \theta_{p,k} y_{3,p}(x, \rho_{1,k})\right),$$

$$p = 1,\dots,n. \tag{25}$$

Лема 6. *Для будь-яких послідовностей* $\{\theta_{p,k}\}_{k=0}^{\infty}$, $p = 1,\dots,n$, *система* $V(B_\Theta)$ *власних функцій оператора* B_Θ *є повною і мінімальною у просторі* $L_2(0,1)$.

Система функцій $V(B_\Theta)$ *є базисом Рісса в просторі* $L_2(0,1)$ *тоді й лише тоді, коли послідовності* $\{\theta_{p,k}\}_{k=0}^{\infty}$, $p = 1,\dots,n$, *є обмеженими.*

Д о в е д е н н я леми проводиться аналогічно до доведення лем 4, 5. Для доведення мінімальності системи $V(B_\Theta)$ власних функцій у $L_2(0,1)$ означимо простір

$$H(B_\Theta) := \left\{ h = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{1} h_{s,k} v_{1,k}(x, L_0) \in L_2(0,1) : \right.$$

$$\|h\|^2_{H(B_\Theta)} := \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}\sum_{p=1}^{n}\left|\theta_{p,k}h_{s,k}\right|^2 < \infty \Bigg\}$$

та встановлюємо, що $R(B_\Theta) \in [L_2(0,1); H(B_\Theta)]$.

Друга частина твердження леми доводиться на основі

Зауваження 9. Якщо послідовності $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ є обмеженими, то $H(B_\Theta) = L_2(0,1)$ та $R(B_\Theta) : H(B_\Theta) \to L_2(0,1)$ – обмежений оператор. ♦

Сукупність операторів B_Θ, власні функції яких визначені формулами (24), позначимо через $Q_1(L_0)$. Відповідну множину операторів перетворення позначимо через $\Gamma_1(L_0)$.

На множині $\Gamma_1(L_0)$ можна визначити операцію множення і довести, що множина $\Gamma_1(L_0)$ є абелевою групою.

Зауваження 10. За допомогою оператора $L^*_{1,p}$ і системи функцій $W(L_{1,p})$ можна побудувати комутативні групи $\Gamma_{0,n+r}(L_0)$, $\Gamma_1(L_0)$ і вивчити їх властивості.

5. Багатоточкові задачі. Розглянемо для рівняння (1) нелокальну задачу з багатоточковими умовами

$$\ell_{2,j,p}y := y^{(m_j)}(0) + (-1)^{m_j} y^{(m_j)}(1) = 0, \qquad j \neq p,$$

$$\ell_{2,p,p}y := y^{(m_p)}(0) - (-1)^{m_p} y^{(m_p)}(1) + \ell^0_p y = 0,$$

$$\ell_{2,p,n+j,p}y := y^{(m_{n+j})}(0) - (-1)^{m_{n+j}} y^{(m_{n+j})}(1) = 0, \qquad j = 1,\ldots,n. \tag{26}$$

Нехай $L_{2,p}$ – оператор задачі (1), (26):

$$L_{2,p}y := (-1)^n y^{(2n)}(x), \qquad y \in D(L_{2,p}) \subset W_2^{2n}(0,1),$$

$$D(L_{2,p}) := \{y \in W_2^{2n}(0,1) : \ell_{2,s,p}y = 0,\ s = 1,\ldots,2n\}.$$

Лема 7. *Нехай припущення $\boldsymbol{P}_1$ справджується для умов* (26) *при деякому $p \in \{1,\ldots,n\}$. Тоді система власних функцій $V(L_{2,p})$ оператора $L_{2,p}$ є повною і мінімальною у просторі $L_2(0,1)$.*

Якщо при $p \in \{1,\ldots,n\}$ справджуються припущення $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, тоді система $V(L_{2,p})$ є базисом Рісса простору $L_2(0,1)$.

Д о в е д е н н я. Безпосередньою підстановкою можна переконатися, що

$$v_{0,k}(x, L_0) \in D(L_{2,p}).$$

Отже,

$$v_{0,k}(x, L_{2,p}) = v_{0,k}(x, L_0), \qquad k = 0,1,\ldots.$$

Враховуючи рівності (12), власні функції $v_{1,k}(x, L_{2,p})$ оператора $L_{2,p}$ визначаємо формулами

$$v_{1,k}(x, L_{2,p}) := v_{1,k}(x, L_0) + \eta_{1,p,k}y_{3,p}(x, \rho_{1,k}), \qquad k = 0,1,\ldots.$$

Підставляючи цей вираз у багатоточкову умову (26), маємо

$$\eta_{1,p,k} = -(\ell_{2,p,p} y_{3,p}(x,\rho_{1,k}))^{-1} \ell_{2,p,p} v_{1,k}(x,L_0), \qquad k = 0,1,\ldots. \qquad (27)$$

Отже, оператор $L_{2,p}$ є елементом множини $Q_{1,p}(L_0)$. Тому, з огляду на твердження леми 4, отримаємо повноту і мінімальність системи функцій власних функцій $V(L_{2,p})$ у просторі $L_2(0,1)$.

У випадку, коли справджуються припущення $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, безпосередніми обчисленнями встановлюємо обмеженість послідовності $\{\eta_{1,p,k}\}_{k=0}^{\infty}$.

Тому, застосовуючи лему 5, отримуємо друге з тверджень леми 7. ♦

Зауважимо, що багатоточкові умови (26) є частковим випадком умов (10), (25), якщо $\theta_k = \eta_{1,p,k}$, $k = 0,1,\ldots$.

6. Доведення основних результатів.

Теорема 1. *Нехай справджуються припущення* $\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_3$. *Тоді оператор* L *має додатний дискретний спектр і повну та мінімальну в просторі* $L_2(0,1)$ *систему* $V(L)$ *власних функцій.*

Якщо виконуються припущення $\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_4$, *тоді система* $V(L)$ *є базисом Рісса простору* $L_2(0,1)$.

Д о в е д е н н я. Ізоспектральність операторів L_0 і L встановлено при доведенні леми 2.

Оператор L означимо як елемент множини $Q_1(L_0)$.

Безпосередньою підстановкою можемо переконатися, що

$$v_{0,k}(x,L_0) \in D(L).$$

Отже, $v_{0,k}(x,L) = v_{0,k}(x,L_0)$, $k = 0,1,\ldots$.

Власні функції $v_{1,k}(x,L)$ оператора L означаємо формулами

$$v_{1,k}(x,L) := v_{1,k}(x,L_0) + \sum_{p=1}^{n} \eta_{1,p,k} y_{3,p}(x,\rho_{1,k}), \qquad k = 0,1,\ldots.$$

Враховуючи умови (26), для параметрів $\eta_{1,p,k}$ отримуємо рівності (27).

Отже, згідно з лемою 7 система $V(L)$ власних функцій є повною і мінімальною у просторі $L_2(0,1)$.

У випадку, коли справджуються припущення $\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_5$, оператори перетворення $R(L_{2,p}) : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ є обмеженими.

Тому, враховуючи рівність $R(L) = \prod_{p=1}^{n} R(L_{2,p})$, маємо $R(L) \in [L_2(0,1)]$.

Таким чином, беручи до уваги друге з тверджень леми 5, отримуємо, що система $V(L)$ власних функцій є базисом Рісса у просторі $L_2(0,1)$.

Теорему доведено. ♦

Зауваження 11. Багатоточкові умови (2) є частковим випадком умов (26), якщо $\theta_{k,p} = \eta_{1,p,k}$, $p = 1,2,\ldots$, $k = 0,1,\ldots$.

Нехай $\zeta = \max\{k_j - m_j,\ j = 1,\ldots,n\}$,

$$\zeta_{k,s} = \begin{cases} 1, & \sum_{p=1}^{n} |\eta_{1,p,k}| = 0, \\ k^s, & k = 0,1,\ldots, \end{cases}$$

$$H_s(L) := \Bigg\{ h = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{1} h_{s,k} v_{1,k}(x, L_0) \in L_2(0,1) :$$

$$\|h\|_{H(L)}^2 := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{1} \left|\zeta_{k,s} h_{s,k}\right|^2 < \infty \Bigg\},$$

$$H(L) := H_{\zeta}(L).$$

Лема 8. *Нехай виконуються припущення* $\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_3$. *Тоді*

1°) $R(L)$ *− неперервний оператор* $H(L) \to L_2(0,1)$.

2°) $R(L)$ *− неперервний оператор* $H_s(L) \to H_{s-\zeta}(L)$, $s \ge \zeta$.

3°) $H(L) = L_2(0,1)$, *якщо* $\zeta = 0$.

Д о в е д е н н я леми аналогічне до доведення неперервності оператора $R(B_{p,\theta}) : H(B_{p,\theta}) \to L_2(0,1)$ у лемі 4 з урахуванням зауваження 11 і леми 6.

Теорема 2.

(i). *Нехай справджуються припущення* $\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_3$ *та* $-c \notin \sigma(L)$. *Тоді для будь-якої функції* $h \in H(L)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *у вигляді ряду за системою* $V(L)$ *власних функцій, де* $f = R(L)h$.

(ii). *Нехай справджуються припущення* $\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_4$. *Тоді для будь-якої функції* $h \in L_2(0,1)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *у вигляді ряду за системою* $V(L)$ *власних функцій, де* $f = R(L)h$.

(iii). *Нехай справджуються припущення* $\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_5$ та $-c \notin \sigma(L)$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in L_2(0,1)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *у вигляді ряду за системою* $V(L)$ *власних функцій.*

Д о в е д е н н я. Подамо розв'язок $u(x)$ і функцію $f(x)$ у вигляді ряду за системою $V(L)$:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{1} u_{s,k} v_{1,k}(x, L), \qquad f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{1} f_{s,k} v_{1,k}(x, L).$$

Підставляючи ці розвинення у рівняння (1) і враховуючи повноту та мінімальність системи $V(L)$ у просторі $L_2(0,1)$, отримаємо рівності

$$u_{s,k} = (\lambda_{s,k} - c)^{-1} f_{s,k}, \qquad s = 0,1, \qquad k = 0,1,\ldots.$$

Беручи до уваги означення норми у просторі та лему 8, отримаємо для розв'язку оцінку

$$\|u\|_{W_2^{2n}(0,1)} \le C \|h\|_{H_{\zeta}(L)}. \tag{28}$$

Доведемо другу частину теореми.

Нехай

$$\ell_p^1 y := b\big(y^{(j)}(0) - (-1)^j y^j(1)\big), \qquad j = 0,1,\ldots,2n-1,$$

$L_{p,j}$ − оператор задачі (3), (10), а $V(L_{p,j})$ − система його власних функцій.

Нехай $W(L_{p,j})$ − система функцій, біортогональна до $V(L_{p,j})$.

При виконанні припущень $\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_4$ умови (2) означимо співвідношенням

$$\ell_j^0 y := 2 \sum_{m=0}^{k_j} (-1)^m b_{0,m,j} y^{(m)}(0).$$

Для системи власних функцій $W(L)$ задачі, спряженої до (1), (2), отримаємо подання

$$W(L) = \prod_{j=1}^{n} \prod_{m=0}^{k_j} W(L_{p,j}) .$$

Отже, маючи біортогональну систему до $V(L)$, можемо обчислити коефіцієнти $f_{s,k}$, $s = 0,1$, $k = 0,1,\ldots$, розвинення функції $f(x)$.

Якщо виконуються припущення $P_1 - P_5$, то система $V(L)$ є базисом Рісса та можна побудувати елементи біортогональної системи $W(L)$.

Тому нерівність (28) можна подати співвідношенням

$$\|u\|_{W_2^{2n}(0,1)} \le C\|f\|_{L_2(0,1)} .$$

Теорему доведено. ♦

1. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І.* Крайові задачі з регулярними, але не сильно регулярними за Біркгофом умовами для оператора двократного диференціювання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59,** № 4. – С. 7–23.
   Те саме: *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I.* Boundary-value problems with Birkhoff regular but not strongly regular conditions for a second-order differential operator // J. Math. Sci. – 2019. – **238**, No. 1. – P. 1–21.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-019-04214-z.
2. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І.* Нелокальна багатоточкова задача з кратним спектром для звичайного диференціального рівняння порядку $2n$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 3. – С. 32–45.
   Те саме: *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I.* Nonlocal multipoint problem with multiple spectrum for an ordinary $(2n)$th order differential equation // J. Math. Sci. – 2020. – **246**, No. 2. – P. 152–169.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-020-04727-y.
3. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І.* Нелокальна задача з багатоточковими збуреннями крайових умов типу Штурма для звичайного диференціального рівняння парного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62,** № 1. – С. 25–36.
4. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І., Коляса Л. І.* Спектральні властивості несамоспряжених нелокальних крайових задач для оператора диференціювання парного порядку // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 6. – С. 739–751.
   Те саме: *Baranets'kyi Ya. O., Kalenyuk P. I., Kolyasa L. I.* Spectral properties of nonself-adjoint nonlocal boundary-value problems for the operator of differentiation of even order // Ukr. Math. J. – 2018. – **70**, No. 6. – P. 851–865.
   – https://doi.org/10.1007/s11253-018-1538-4.
5. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І., Копач М. І.* Нелокальна багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними з постійними коефіцієнтами парного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61,** № 1. – С. 11–30.
   Те саме: *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kopach M. I.* Nonlocal multipoint problem for partial differential equations of even order with constant coefficients // J. Math. Sci. – 2020. – **249**, No. 3. – P. 307–332.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-020-04945-4.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 799 с.
   Те саме: *Berezanskii Ju. M.* Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators. – Providence: Amer. Math. Soc., 1968. – ix+809 p.
7. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – Москва: Наука, 1965. – 448 с.
   Те саме: *Gohberg I. C., Krein M. G.* Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators. – Providence: Amer. Math. Soc., 1969. – xv+378 p.
8. *Ильин В. А., Крицков Л. В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил. Темат. обзор. Функц. анализ. – **96**. – Москва: ВИНИТИ, 2006. – С. 5–105.

Те саме: *Il'in V. A., Kritskov L. V.* Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators // J. Math. Sci. – 2003. – **116**, No. 5. – P. 3489–3550. – https://doi.org/10.1023/A:1024180807502.

9. *Каленюк П., Баранецький Я., Коляса Л.* Нелокальна крайова задача для оператора диференціювання парного порядку // Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць, присвячений 80-річчю Б. Й. Пташника. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. – С. 91–109.
10. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Совр. математика. Фундамент. направления. – 2018. – **64**, № 2. – С. 211–426. – DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426.
11. *Кесельман Г. М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. – 1964. – **39**, №. 2. – С 82–93.
12. *Михайлов В. П.* О базисах Рисса в $\mathfrak{L}_2(0,1)$ // Докл. АН СССР. – 1962. – **144**, № 5. – С. 981–984.
13. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.

    Те саме: *Naimark M. A.* Linear differential operators. – Part I: Elementary theory of linear differential operators. – New York: Frederick Ungar Publ. Co., 1967. – xiii+144 p.
14. *Шкаликов А. А.* Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром // Успехи мат. наук. – 2016. – **71**, № 5(431). – Р. 113–174. – https://doi.org/10.4213/rm9740.

    Те саме: *Shkalikov A. A.* Perturbations of self-adjoint and normal operators with discrete spectrum // Russ. Math. Surv. – 2016. – **71**, No. 5. – P. 907–964. – https://doi.org/10.1070/RM9740.
15. *Baranetskij Ya. O., Demkiv. I. I., Ivasiuk I. Ya,, Kopach M. I.* The nonlocal problem for the 2n differential equations with unbounded operator coefficients and involution // Карпат. мат. публікації. – 2018. – **10**, № 1. – С. 14–30. – https://doi.org/10.15330/cmp.10.1.14-30.
16. *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kolyasa L. I., Kopach M. I.* Nonlocal multipoint problem for an ordinary differential equations of even order involution // Мат. студії. – 2018. – **49**, № 1. – С. 80–94. – https://doi.org/10.15330/ms.49.1.80-94.
17. *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kolyasa L. I., Kopach M. I.* The nonlocal problem for the differential-operator equation of the even order with involution // Карпат. мат. публікації. – 2017. – **9**, No. 2. – С. 109–119. – https://doi.org/10.15330/cmp.9.2.109-119.
18. *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kopach M. I., Solomko A. V.* The nonlocal boundary value problem with perturbations of mixed boundary conditions for an elliptic equation with constant coefficients. I // Карпат. мат. публікації. – 2019. – **11**, № 2. – С. 228–239. – https://doi.org/10.15330/cmp.11.2.228-239.
19. *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kopach M. I., Solomko A. V.* The nonlocal boundary value problem with perturbations of mixed boundary conditions for an elliptic equation with constant coefficients. II // Карпат. мат. публікації. – 2020. – **12**, № 1. – С. 173–188. – https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.173-188.
20. *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kopach M. I., Solomko A. V.* The nonlocal multipoint problem with Dirichlet-type conditions for an ordinary differential equation of even order with involution // Мат. студії. – 2020. – **54**, № 1. – С. 64–78. – https://doi.org/10.30970/ms.54.1.64-78.
21. *Birkhoff G. D.* Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – **9**, No. 4. – P. 373–395. – https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1908-1500818-6.
22. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – **9**, No. 2. – P. 219–231. – https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1908-1500810-1.
23. *Freiling G.* Irregular boundary value problems revisited // Results Math. – 2012. – **62**, No. 3-4. – P. 265–294. – https://doi.org/10.1007/s00025-012-0281-7.
24. *Kravchenko V. V., Sitnik S. M.* (eds). Transmutation operators and applications. – Basel: Birkhäuser, 2020. – xvii+686 pp. – DOI:10.1007/978-3-030-35914-0.
25. *Locker J.* Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two-point differential operators // Mem. Am. Math. Soc. – 2008. – **195**, No. 911. – viii+177 p.

– http://doi.org/10.1090/memo/0911.
26. *Stone M. H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. – 1926. – **28**. – P. 695–761. – http://doi.org/10.2307/1989072.
27. *Stone M. H.* Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. – Ser. Colloquium Publications. Vol. XV. – New York: Amer. Math. Soc., 1932. – vi+622 p.
28. *Tamarkin J.* Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // Math. Zeit. – 1928. – **27**, No. 1. – P. 1–54. – https://doi.org/10.1007/BF01171084.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ПО БИРКГОФУ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Исследованы спектральные свойства несамосопряженной задачи для оператора дифференцирования порядку $2n$ *с нелокальными условиями, являющимися многоточечными возмущениями сильно регулярных по Биркгофу самосопряженных условий. Получены достаточные условия, при которых система собственных функций является полной и при некоторых дополнительных предположениях образует базис Рисса. Построено множество операторов преобразования, каждый элемент которой отображает систему собственных функций невозмущенной задачи в систему собственных функций некоторой изоспектральной задачи. Изучены случаи задач с регулярными и нерегулярными по Биркгофу возмущениями. Определены условия существования и единственности решения задачи.*

Ключевые слова: *регулярные по Биркгофу краевые условия, оператор преобразования, базис Рисса.*

A NONLOCAL PROBLEM WITH MULTIPOINT PERTURBATIONS OF STRONGLY REGULAR BIRKHOFF BOUNDARY CONDITIONS FOR AN EVEN-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR

The spectral properties of the nonself-adjoint problem for the $2n$ *-th order differentiation operator with nonlocal conditions that are multipoint perturbations of Birkhoff strongly selfadjoint conditions are investigated. Sufficient conditions are obtained under which the system of eigenfunctions is complete and, under certain additional assumptions, forms a Riesz basis. The set of transformation operators is constructed, each element of which maps the system of eigenfunctions of the unperturbed problem into the system of eigenfunctions of some isospectral problem. Cases of problems with regular and irregular Birkhoff perturbations are studied. The conditions of the existence and uniqueness of the solution to the problem are established.*

Keywords: *Birkhoff regular boundary conditions, transformation operator, Riesz basis.*

Ін-т прикл. математики та фундам. наук
нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів

Одержано
15.01.20