

## ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ СТОП І ЗАКОНІВ РУХУ ДВОНОГОГО КРОКУЮЧОГО РОБОТА

*Досліджується задача сукупної оптимізації лінійних розмірів стоп і законів руху двоногого крокуючого робота. Робот моделюється плоскою системою дев'яти твердих тіл, хода розглядається на проміжку подвійного кроку, де враховуються основні ритмічні, кінематичні та динамічні умови антропоморфного переміщення. На опорні реакції стоп накладаються двосторонні нестационарні обмеження, за критерій оптимальності руху системи вибирається квадратичний (за керуваннями) функціонал. Запропоновано алгоритм побудови субоптимального розв'язку задачі, який ґрунтується на апроксимації узагальнених координат робота кубічними згладжувальними сплайнами з невідомими параметрами, а також використанні чисельних процедур нелінійного програмування.*

**Ключові слова:** хода двоногого робота, математичне моделювання, оптимальне керування, оптимізація розмірів стоп, сплайн-апроксимація, параметрична оптимізація, нелінійне програмування.

Серед експлуатаційних характеристик крокуючих роботів з автономним живленням важливим є рівень енергоспоживання. Обмеженість енергетичних ресурсів, зумовлених емністю акумуляторних батарей, спонукає до пошуку проектних рішень цих систем із низькими енерговитратами [38]. Продуктивним підходом тут є, поряд із побудовою оптимальних режимів керування, також і розрахунок відповідних параметрів конструкцій роботів, які би загалом забезпечили низькі витрати енергії на їхнє переміщення (оптимізаційне проектування [5]). Ефективним способом реалізації цього підходу є застосування математичного моделювання, теорії оптимізації і сучасної комп'ютерної техніки. Тому розробка математичних моделей крокуючих роботів і побудова відповідних алгоритмів та програмного забезпечення для оптимізації конструкцій і режимів керування є актуальними задачами робототехніки.

Серед крокуючих роботів чільне місце займають двоногі роботи. Двонога хода, особливо антропоморфного типу, завжди привертала увагу дослідників, про що свідчить значна кількість відповідних публікацій, чимало з яких присвячено задачам оптимізації ходи. Дослідження таких задач, крім наукової новизни в пізнанні об'єктивних закономірностей антропоморфної ходи, має важливе практичне значення, оскільки отримані оптимальні рішення прямо впливають на якість руху роботів. Характерною для задач оптимізації ходи є наявність нестационарних обмежень (кінематичного та динамічного характеру), що сильно ускладнює їх розв'язання. Як зазначено в [28], поширеним підходом у дослідженні задач оптимізації ходи роботів є параметризація їхнього руху. Це певною мірою звужує простір пошуку оптимальних рішень, однак дає можливість за порівняно невеликий час і з незначними обчислювальними затратами побудувати субоптимальні режими ходи двоногих роботів.

Відмітимо деякі публікації, присвячені задачам динаміки та оптимізації ходи двоногих роботів. У монографіях [2, 3, 6, 17, 25, 45, 46] відображено результати багатопланових досліджень проблем кінематики, динаміки та керування рухом двоногих крокуючих роботів. У статті [28] наведено огляд основних методів оптимізації параметризованої ходи двоногих роботів, які ґрунтуються на еволюційних обчисленнях, зокрема, на генетичних алгоритмах, генетичному та еволюційному програмуванні, еволюційних стратегіях

---

✉ m\_demydyuk@ukr.net

тощо. Зазначено, що ці методи мають потужний глобальний потенціал пошуку, вони нечутливі до початкової точки (у просторі оптимізаційних параметрів), не потребують гладкості цільової функції і легко піддаються розпаралелюванню. У [18] наведено класифікацію методів оптимального керування нелінійними динамічними системами, особливу увагу звернуто на прямі методи, зокрема методи параметричної оптимізації. Як приклад застосування методу параметричної оптимізації тут побудовано субоптимальний режим ходи двоногого робота. Робот моделюється системою семи твердих тіл: корпус і дві триланкові нижні кінцівки з плоскими стопами. Система має шість ступенів вільності, її рух відбувається під дією моментів активних сил, прикладених у шарнірах. Хода досліджується у сагітальній площині в межах одноопорних фаз руху. Сформульовано задачу пошуку законів руху системи, які за накладених обмежень мінімізують квадратичний (за керуваннями) функціонал. Алгоритм розв'язання задачі складається з таких основних етапів: *дискретизація* часового проміжку руху системи, *апроксимація* узагальнених координат на кожному з часових підпроміжків кубічними сплайнами з невідомими параметрами (значеннями координат у вузлах), *розв'язання* отриманої задачі нелінійного програмування за допомогою оптимізаційних процедур MATLAB (функції *ga*, *fmincon*). Аналогічна модель робота, постановку задачі оптимального керування, функціонал і методику розв'язування використано в [22]. Тут враховуються одно- та двоопорні фази руху стоп, узагальнені координати параметризуються сплайнами четвертого порядку, мінімізація зведеної цільової функції проводиться за допомогою алгоритму послідовного квадратичного програмування (SQP).

У статті [32] хода двоногого робота моделюється плоскою дволанковою системою – циркулеподібними ходунками (без колінних шарнірів). Зверху ланки з'єднані між собою шарніром, знизу вони точково спираються на горизонтальну поверхню. Переміщається система під дією моменту активних сил, прикладеного до опорної ланки в точці контакту з поверхнею крокування, що забезпечує її поворот щодо цієї поверхні, а заодно й відносний поворот (у режимі коливання) переносної ланки. Сформульовано та розв'язано задачу оптимізації руху системи з урахуванням ряду двосторонніх обмежень на кутові координати та керування. Почергово розглянуто декілька критеріїв, що оцінюють кутове відхилення (від вертикалі) та швидкість переносної ланки, а також момент активних сил. Розв'язок побудовано за допомогою методу колокацій і числових процедур нелінійного програмування. Зауважимо, що в традиційному варіанті, поширеному в літературних джерелах [27], розглянута модель ходунків використовується для дослідження пасивної (без активних приводів) ходи робота вниз по похилій площині. Основна мета цих досліджень – побудувати енергоефективну ходу двоногого робота [26]. У праці [35] хода робота досліджується за допомогою плоского чотириланкового кінематичного ланцюга: чотири точкові маси, чотири шарніри, перша ланка шарнірно зв'язана з опорною поверхнею, четверта ланка на початку та в кінці руху точково контактує з поверхнею опори. Методом параметричної оптимізації побудовано субоптимальний режим руху системи за умови мінімізації квадратичного (за керуваннями) функціонала. При цьому системи узагальнених координат параметризуються кубічними B-сплайнами, а реакції опорної поверхні наближаються кусково-сталими функціями. Методику параметричної оптимізації використано також у [43], де ходу робота моделюють за допомогою просторового тринадцятиланкового кінематичного ланцюга (перша ланка – нерухома поверхня) з дванадцятьма циліндричними шарнірами, в яких прикладені моменти активних сил. Ходу розглядають на проміжку одинарного кроку системи з урахуванням одно- та двоопорних фаз руху (з ударними ефектами). У межах побудованої математичної моделі (з використанням рекурсивних співвідношень для матриць у рівняннях руху) сформульовано задачу оп-

тимального керування рухом робота з квадратичним (за керуванням) функціоналом і низкою обмежень на кінематичні і динамічні характеристики: узагальнені координати та моменти сил, опорні реакції, положення точки нуль-моменту системи (ZMP). Тут ZMP визначають як точку на поверхні опори, у якій сумарний момент прикладених до системи сил (гравітаційних, відцентрових, Кориоліса) дорівнює нулеві [44]. Чисельно побудовано субоптимальний розв'язок задачі, який базується на параметризації узагальнених координат кубічними сплайнами. Отриману задачу оптимізації (з 42-ма шуканими параметрами) розв'язано за допомогою процедури *fmincon* пакета MATLAB.

Параметричний підхід використано також для оптимізації ходи реальних двоногих роботів, таких як HUBOT-4 [19] і Bioloid [42]. У статті [19] ходу робота HUBOT-4 моделюють просторовою системою 11-ти твердих тіл (з 10-ма ступенями вільності). Сформульовано та досліджено задачу параметричної оптимізації ходи робота, у якій якість руху оцінюють зваженою сумою двох критеріїв: перший критерій виражає відхилення точки ZMP від центра основи стоп, другий – відхилення висоти перенесення стопи від заданого значення. Рух робота задають шляхом параметризації (за допомогою тригонометричних функцій) лінійних координат стоп та корпусу, узагальнені координати системи знаходять у процесі розв'язання оберненої задачі кінематики, мінімізацію цільової функції проводять модифікованим алгоритмом Jaya [37]. У [42] ходу робота Bioloid моделюють просторовою системою дев'яти твердих тіл (корпус і дві чотириланкові нижні кінцівки). Система має 18 ступенів вільності (по 6 ступенів на кожному ногу), її рух відбувається під дією моментів сил у шарнірах, що генеруються електроприводами Dynamixel AX-12A. Керування приводами забезпечує плата SM-530 з відповідним програмним кодом і контролерами. Авторами розроблено електронний пристрій для вимірювання кількості електроенергії приводів, необхідної для реалізації того чи іншого закону руху робота. Проведено порівняння енерговитрат для руху робота, побудованого: 1) методом параметричної оптимізації з використанням скінченних рядів Фур'є і квадратичного (за моментами сил) функціонала; 2) методом *cart-table* [33] на основі співвідношень між координатами точки ZMP і координатами центра мас системи. У першому випадку параметризують узагальнені координати системи, обмеження задовольняють методом зовнішніх штрафних функцій, мінімізацію зведеної цільової функції (із 60-ма параметрами оптимізації) проводять процедурою *fminsearch* пакета MATLAB. Показано, що енерговитрати для оптимізованого руху є меншими (приблизно на 10%) ніж енерговитрати руху, побудованого методом *cart-table*.

Дослідженню задач сукупної оптимізації конструктивних параметрів і законів руху двоногих роботів присвячено праці [9, 21, 24, 36, 40]. В роботі [9] у межах плоскої системи дев'яти твердих тіл (корпус і дві чотириланкові нижні кінцівки) розв'язано задачу спільної оптимізації параметрів (довжини й маси ланок ніг) і законів руху крокуючого робота. Ланки робота оптимізують за умови сталої довжини та маси кожної ноги, за критерій оптимальності вибрано квадратичний (за моментами активних сил у шарнірах) функціонал. Розв'язок задачі побудовано методом параметричної оптимізації з використанням кубічних згладжувальних сплайнів і генетичного алгоритму для мінімізації зведеної цільової функції. Аналогічна модель робота, умови руху, задача оптимізації та алгоритм її розв'язання розглянуто в статті [21]. Тут за оптимізаційні параметри конструкції робота вибрано параметри пасивних приводів, задіяних у гомілковостопних і плеснофалангових шарнірах стоп. Пасивний привід моделюється послідовністю лінійних пружин (з покровою активацією), за цільовий функціонал вибрано інтеграл від модуля потужностей у тазостегнових і колінних шарнірах. У [24] побудовано алгоритм розв'язання задачі сукупної оптимізації параметрів пасивних приводів (торсіонних пружин у шарнірах) двоногого робота і за-

конів його руху. Алгоритм базується на методиці параметризації узагальнених координат робота скінченими рядами Фур'є і числових процедурах нелінійного програмування. У праці [36] хода робота моделюється плоскою семиланковою системою твердих тіл. Вважається, що маса кожної ланки зосереджена в точці, віддалі до якої приймають за оптимізаційний параметр. Узагальнені координати системи параметризують поліномами 4-го порядку, коефіцієнти яких також оптимізують. Для розв'язання задачі сукупної оптимізації використовують генетичний алгоритм. У [40] запропоновано загальну імітаційну структуру для сукупної оптимізації (на множині заданих кінематичних схем) конструктивних параметрів і режимів керування двоногим роботом, що крокує вниз по похилій площині. Розробка базується на ефективних методах обчислення динаміки систем твердих тіл і сучасних числових алгоритмах побудови оптимального керування. Тут розглянуто множину з шести модельних схем робота: п'ять схем відповідають моделі з прямими ногами, одна – з колінними шарнірами. У моделях контакт із поверхнею крокування є точковим, водночас враховуються ударні ефекти. Передбачено можливість активного та пасивного (за допомогою пружинно-демпферних пристроїв) керування ходом робота. За оптимізаційні параметри конструкції вибрано розподіл мас і довжини ланок робота, швидкість його переміщення і кут нахилу поверхні крокування, за цільовий функціонал – питому (віднесену до одиниць ваги системи та пройденого шляху) суму потенціальної енергії системи та роботи активних керувань. Для розв'язання задачі сукупної оптимізації параметрів і режимів керувань використано прямі методи.

Запропонована стаття продовжує дослідження, розпочаті в [9]. Тут розв'язуємо задачу сукупної оптимізації параметрів стоп і законів руху двоногого робота, що крокує по нерухомій горизонтальній поверхні під дією керувань (моментів сил у шарнірах). Для моделювання ходи робота використовуємо плоску систему дев'яти твердих тіл (корпус та дві чотириланкові нижні кінцівки), ходу розглядаємо на проміжку подвійного кроку, де враховуємо одно- та двоопорні фази руху стоп, а також основні ритмічні, кінематичні та динамічні умови антропоморфного переміщення. На опорні реакції стоп накладаємо нестационарні обмеження, за критерій якості руху вибираємо квадратичний (за керуваннями) функціонал. Запропоновано алгоритм наближеного розв'язування задачі, який ґрунтується на методиці параметричної оптимізації. З огляду на умови ходи робота вводимо множину незалежно варійованих функцій, які апроксимуємо кубічними згладжувальними сплайнами з невідомими параметрами у вузлах дискретизації подвійного кроку. Далі, для введених функцій знаходимо параметричні (залежні від параметрів апроксимації і параметрів стоп) сім'ї законів руху і керувань робота, що зводить вихідну задачу оптимального керування (з параметрами) до задачі нелінійного програмування.

Мета дослідження – побудувати алгоритм сукупної оптимізації конструктивних параметрів стоп та законів руху двоногого робота, розробити відповідний програмний комплекс, провести числові розрахунки та проаналізувати вплив параметрів стоп на характеристики руху досліджуваного робота. Запропонована розробка розвиває підхід параметричної оптимізації в розв'язанні задач оптимального керування нелінійними локомоційними системами антропоморфного типу [4, 8, 9, 20, 21].

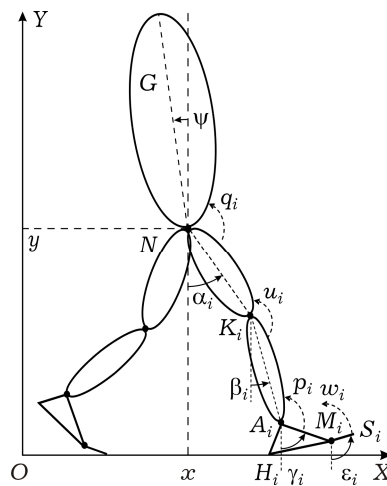


Рис. 1

**1. Математична модель ходи робота.** Розглянемо ходу двоногого робота (антропоморфного типу) по нерухомій горизонтальній поверхні. Обмежимо дослідженням його плоско-паралельного руху у сагітальній площині  $OXY$  (рис. 1). Для моделювання руху використаємо систему дев'яти твердих тіл: тіло  $G$  представляє корпус робота, тіла  $NK_i$ ,  $K_iA_i$ ,  $A_iH_iM_i$ ,  $M_iS_i$  – ланки  $i$ -ї нижньої кінцівки (відповідно стегно, гомілка та дволанкова стопа); тіла зв'язані між собою ідеальними циліндричними шарнірами  $N$ ,  $K_i$ ,  $A_i$ ,  $M_i$ , осі яких ортогональні до площини  $OXY$ ,  $i = 1, 2$ . Стопи вважаємо безінерційними, а їхні маси зосередженими в шарнірах  $A_1$ ,  $A_2$ . Рухається механічна система внаслідок взаємодії активних моментів сил  $q_i$ ,  $u_i$ ,  $p_i$ ,  $w_i$ , прикладених у шарнірах  $N$ ,  $K_i$ ,  $A_i$ ,  $M_i$  відповідно, сил реакцій  $\mathbf{R}_i$ ,  $i = 1, 2$ , опорної поверхні та прискорення сили тяжіння  $g$ .

Рух досліджуваного робота можна описати системою нелінійних диференціальних рівнянь [4, 8, 21]

$$\begin{aligned}
M\ddot{x} + \sum_{i=1}^2 (K_{ai}\dot{\alpha}_i \cos \alpha_i + K_{bi}\dot{\beta}_i \cos \beta_i)^* - K_r(\dot{\psi} \cos \psi)^* &= R_{1x} + R_{2x}, \\
M(\ddot{y} + g) + \sum_{i=1}^2 (K_{ai}\dot{\alpha}_i \sin \alpha_i + K_{bi}\dot{\beta}_i \sin \beta_i)^* - K_r(\dot{\psi} \sin \psi)^* &= R_{1y} + R_{2y}, \\
J\ddot{\psi} - K_r(\ddot{x} \cos \psi + \ddot{y} \sin \psi) - gK_r \sin \psi &= -q_1 - q_2, \\
J_i\ddot{\alpha}_i + K_{ai}(\ddot{x} \cos \alpha_i + \ddot{y} \sin \alpha_i) + a_iK_{bi}[\ddot{\beta}_i \cos(\alpha_i - \beta_i) + \dot{\beta}_i^2 \sin(\alpha_i - \beta_i)] &+ \\
+ gK_{ai} \sin \alpha_i &= q_i - u_i + a_i(R_{ix} \cos \alpha_i + R_{iy} \sin \alpha_i), \\
J_{ci}\ddot{\beta}_i + K_{bi}(\ddot{x} \cos \beta_i + \ddot{y} \sin \beta_i) + a_iK_{bi}[\ddot{\alpha}_i \cos(\alpha_i - \beta_i) - \dot{\alpha}_i^2 \sin(\alpha_i - \beta_i)] &+ \\
+ gK_{bi} \sin \beta_i &= u_i - p_i + b_i(R_{ix} \cos \beta_i + R_{iy} \sin \beta_i), \\
i &= 1, 2, \quad (1)
\end{aligned}$$

та умовами кінетостатичної рівноваги безінерційних стоп

$$\begin{aligned}
p_i &= (x_i - x_{Ri})R_{iy} - y_iR_{ix}, \quad i = 1, 2, \\
\begin{cases} w_i = 0, & x_{Ri} \in [x_{hi}, x_{mi}), y_{hi} = 0, \\ w_i = (x_{mi} - x_{Ri})R_{iy} - y_{mi}R_{ix}, & x_{Ri} \in [x_{mi}, x_{si}], y_{si} = 0. \end{cases} & \quad (2)
\end{aligned}$$

Тут позначено:  $(x, y)$  – координати точки  $N$  в інерційній системі відліку  $OXY$ ;  $\psi$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\varepsilon_i$  – кути відхилення тіл  $G$ ,  $NK_i$ ,  $K_iA_i$ ,  $A_iH_iM_i$ ,  $M_iS_i$  від вертикалі;  $M$  – сумарна маса механічної системи;  $K_{ai} = m_{ai}r_{ai} + a_i(m_{bi} + m_{fi})$ ,  $K_{bi} = m_{bi}r_{bi} + b_im_{fi}$ ,  $K_r = rm$ ,  $J_i = J_{ai} + a_i^2(m_{bi} + m_{fi})$ ,  $J_{ci} = J_{bi} + b_i^2m_{fi}$ ,  $a_i = |NK_i|$ ,  $b_i = |K_iA_i|$ ;  $m$ ,  $r$ ,  $J$  – маса тіла  $G$ , відстань від його центра маси до шарніра  $N$  і момент інерції відносно  $N$ ;  $m_{ai}$ ,  $r_{ai}$ ,  $J_{ai}$  – маса тіла  $NK_i$ , віддаль від його центра маси до  $N$  та його момент інерції відносно  $N$ ;  $m_{bi}$ ,  $r_{bi}$ ,  $J_{bi}$  – маса тіла  $NK_i$ , віддаль від його центра маси до шарніра  $K_i$  та його момент інерції відносно  $K_i$ ;  $m_{fi}$  – зосереджена у точці  $A_i$  маса стопи  $i$ -ї ноги;  $(x_{hi}, y_{hi})$ ,  $(x_{mi}, y_{mi})$ ,  $(x_{si}, y_{si})$  – координати точок  $H_i$ ,  $M_i$ ,  $S_i$  у системі відліку  $OXY$ ;  $R_{ix}$ ,  $R_{iy}$  – вертикальна та

горизонтальна складові головного вектора сил реакцій  $\mathbf{R}_i$ , прикладеного в точці  $Z_i(x_{Ri}, 0)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $g$  – прискорення сили тяжіння. Крапкою позначено диференціювання за часом  $t$ . Зауважимо, що диференціальні співвідношення (1) є рівняннями Лагранжа другого роду [13], які описують динаміку робота без урахування стоп. Алгебраїчні співвідношення (2) виражають баланс моментів активних сил  $p_i$ ,  $w_i$  та моментів сил реакцій  $R_{ix}$ ,  $R_{iy}$ .

Ходу робота досліджуємо на проміжку подвійного кроку  $[0, T]$ , вважаючи її періодичною та антропоморфною. Позначимо через  $L_k$ ,  $T_k$  довжину і тривалість  $k$ -го одинарного кроку,  $k = 1, 2$ , а через  $L = L_1 + L_2$ ,  $T = T_1 + T_2$  – довжину і тривалість подвійного кроку. З огляду на антропоморфність ходи робота задамо послідовність фаз руху стоп. Для першої стопи приймемо такі фази руху:  $t \in [0, \tau_{h1})$  – перекочування через п'ятку,  $t \in [\tau_{h1}, \tau_{m1})$  – опора на всю стопу,  $t \in [\tau_{m1}, T_1]$  – плеснофалангове перекочування,  $t \in (T_1, \tau_{s1})$  – перекочування через носок,  $t \in [\tau_{s1}, T)$  – перенесення стопи. Аналогічно означимо фази другої стопи:  $t \in (0, \tau_{s2})$  – перекочування через носок,  $t \in [\tau_{s2}, T_1)$  – перенесення стопи,  $t \in [T_1, \tau_{h2})$  – перекочування через п'ятку,  $t \in [\tau_{h2}, \tau_{m2})$  – опора на всю стопу,  $t \in [\tau_{m2}, T]$  – плеснофалангове перекочування.

Із антропоморфності ходи робота випливають

(а) ритмічні умови на тривалість фаз [15, 47]:

$$0 < \tau_{s2} < \tau_{m1} < T_1 < \tau_{s1} < \tau_{m2} < T; \quad (3)$$

(б) геометричні в'язі, які виражають умови контактування точок стоп  $H_i$ ,  $M_i$ ,  $S_i$  з поверхнею опори:

$$\begin{aligned} x_{hi}(t) &\equiv x_{hi}^\circ, & y_{hi}(t) &\equiv 0, & y_{si} > y_{mi} > 0, & \eta_{Mi}(t) &\equiv 0, & t &\in [\tau_i, \tau_{hi}), \\ x_{hi}(t) &\equiv x_{hi}^\circ, & y_{hi}(t) &\equiv y_{mi}(t) \equiv y_{si}(t) \equiv 0, & & & & t &\in [\tau_{hi}, \tau_{mi}), \\ x_{mi}(t) &\equiv x_{mi}^\circ, & y_{hi} > 0, & y_{mi}(t) \equiv y_{si}(t) \equiv 0, & & & & t &\in [\tau_{mi}, \tau_{1+i}], \\ x_{si}(t) &\equiv x_{si}^\circ, & y_{hi} > y_{mi} > 0, & y_{si}(t) \equiv 0, & \eta_{Mi}(t) \geq 0, & & & t &\in (\tau_{3-i}, \tau_{si}), \\ y_{hi} > 0, & y_{mi} > 0, & y_{si} > 0, & \eta_{Mi}(t) \geq 0, & & & & t &\in [\tau_{si}, \tau_{4-i}), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\eta_{Mi}(t) \equiv \varepsilon_i(t) - \gamma_i(t) - \varphi_{Mi}$  – кут у шарнірі  $M_i$  між прямими  $H_iM_i$  та  $M_iS_i$ ,  $\varphi_{Mi} = \angle A_iM_iH_i$ ,  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = T_1$ ,  $\tau_3 = T$ ;  $x_{hi}^\circ$ ,  $x_{mi}^\circ$ ,  $x_{si}^\circ$  – задані параметри, які виражають абсциси точок  $H_i$ ,  $M_i$ ,  $S_i$  відповідно у моменти часу, коли стопа дотикається цими точками опорної поверхні; параметри  $x_{hi}^\circ$ ,  $x_{mi}^\circ$ ,  $x_{s1}^\circ$  однозначно задаються на проміжку  $[0, T]$ , параметр  $x_{s2}^\circ$  – на проміжках одинарних кроків (різні значення на різних кроках); зазначені параметри залежать від лінійних розмірів стоп та довжин кроків:  $x_{mi}^\circ = x_{hi}^\circ + \ell_{1i}$ ,  $x_{si}^\circ = x_{mi}^\circ + \ell_{2i}$ ,  $\ell_{1i} = |H_iM_i|$ ,  $\ell_{2i} = |M_iS_i|$ ,  $x_{h2}^\circ = x_{h1}^\circ + L_1$ ;

(в) обмеження динамічного характеру:

$$\begin{aligned} R_{iy} > 0, & \quad |R_{ix}| \leq \chi R_{iy}, & \dot{x}_{Ri} \geq 0, & \quad t \in \Lambda_{1i} = [\tau_i, \tau_{i+1}) \cup [\tau_{3-i}, \tau_{si}), \\ R_{iy}(t) &\equiv R_{ix}(t) \equiv 0, & x_{R2}(t) &\equiv 0, & \quad t \in [\tau_{si}, \tau_{4-i}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{hi}^{\circ} \leq x_{Ri} \leq x_{mi}^{\circ}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{mi}), \\
x_{mi}^{\circ} \leq x_{Ri} \leq x_{si}^{\circ}, \quad t \in \Lambda_{2i} = [\tau_{mi}, \tau_{1+i}) \cup [\tau_{3-i}, \tau_{si}), \\
i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{5}$$

де  $\chi$  – коефіцієнт тертя між стопою та опорною поверхнею. Співвідношення (5) виражають вільне упирання стоп на поверхню крокування і їхнє непроковзування, а також задають межі зміни положення точки  $Z_i$  та монотонність її переміщення. Як свідчать експериментальні дослідження ходи людини [47], під час опори на  $i$ -ту стопу точка  $Z_i$  монотонно переміщується від п'ятки  $H_i$  до носка  $S_i$ . Для фази  $t \in [\tau_i, \tau_{mi})$ , незважаючи на те, що  $i$ -та стопа контактує з опорною поверхнею всією своєю основою  $H_i M_i S_i$  ( $y_{hi}(t) \equiv y_{mi}(t) \equiv y_{si}(t) \equiv 0$ ), вважаємо, що основне навантаження контактної взаємодії стопи з поверхнею опори припадає саме на відрізок  $H_i M_i$ . Для стопи на фазах перенесення опорні реакції відсутні (рівні нулеві), також на цих фазах, для визначеності, покладемо  $x_{R2}(t) \equiv 0$ .

Задамо положення (на опорній поверхні) окремих точок стоп у початковий момент часу  $t = 0$ , а також умови періодичності руху робота на проміжку  $[0, T]$  (за кутами та ординатою  $y$ ):

$$\begin{aligned}
x_{h1}(0) = x_{h1}^{\circ}, \quad y_{h1}(0) = 0, \quad x_{m2}(0) = x_{h1}^{\circ} + \ell_{1,1} - L_2, \quad y_{m2}(0) = 0, \\
\xi(T) = \xi(0) + \mathbf{L}, \quad \dot{\xi}(T) = \dot{\xi}(0),
\end{aligned} \tag{6}$$

де  $\xi = (x, y, \psi, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  – вектор узагальнених координат робота,  $\mathbf{L} = (L, 0, \dots, 0)$  – вектор розмірності 11. Параметр  $x_{h1}^{\circ}$  виражає абсцису п'ятки  $H_1$  на початку подвійного кроку, для визначеності у (4), (6) задаємо  $x_{h1}^{\circ} = 0$ . У момент часу  $t = 0$  робот обома ногами спирається на опорну поверхню: перша нога винесена вперед і упирається на поверхню п'яткою  $H_1$ , друга нога (позаду) – передньою частиною стопи  $M_2 S_2$ . Водночас відстань між точками стоп  $M_1$  і  $M_2$  визначається довжиною «нульового» кроку, рівною довжині другого кроку  $L_2$ . Перший крок робота здійснює другою ногою, другий крок – першою ногою. У момент часу  $t = T$ , згідно з умовами періодичності (6), маємо  $x_{h1}(T) = x_{h1}^{\circ} + L$ ,  $y_{h1}(T) = 0$ ,  $x_{m2}(T) = x_{h1}^{\circ} + \ell_{1,1} + L_1$ ,  $y_{m2}(T) = 0$ . Зазначимо також, що у початковий момент часу  $t = 0$  кутові координати робота не задаються, вони визначаються під час розв'язання відповідної задачі оптимізації.

Розподіл фаз руху стоп на інтервалі  $(0, T)$  схематично зображено на рис. 2 (подограма ходи). Області сірого кольору відповідають проміжкам часу, на яких відповідні точки стоп контактують з поверхнею опори.

Наведені зверху величини виражають кількість ступенів вільності системи на відповідній фазі.

**2. Оптимізація параметрів стоп та законів руху робота.** Під час дослідження задачі оптимізації вважаємо, що нижні кінцівки робота є ідентич-

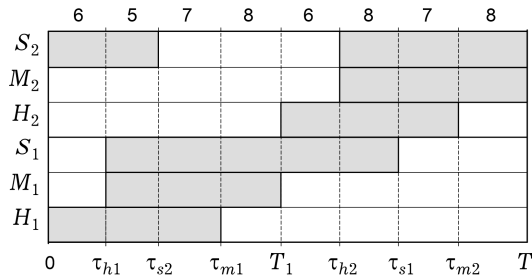


Рис. 2

ними між собою (за своїми лінійними та масоінерційними параметрами ланок). Також, з огляду на те, що у розглядуваній моделі робота інерційними властивостями стоп нехтуємо, припускаємо, що варіювання лінійних розмірів стоп не впливає на їхню масу.

Виберемо (у безрозмірному вигляді) параметри стоп, які будемо оптимізувати:  $c_1 = |A_1 C_1|/\ell = |A_2 C_2|/\ell$ ,  $c_2 = |H_1 C_1|/\ell = |H_2 C_2|/\ell$ ,  $c_3 = \ell_2/\ell$ , де  $\ell = \ell_{1i} + \ell_{2i}$  – довжина стопи, точкою  $C_i$  позначено проекцію шарніра  $A_i$  на основу стопи  $H_i M_i$ ,  $i = 1, 2$  (рис. 3). Зазначимо, що параметри  $c_1$ ,  $c_2$  задають положення шарніра  $A_i$  відносно основи  $H_i M_i$ , параметр  $c_3$  виражає відносну довжину носка  $M_i S_i$ . Оптимізацію параметрів стопи виконуємо за умови її сталої довжини, а також додаткових обмежень:

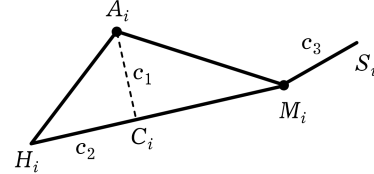


Рис. 3

$$\ell = \ell^0, \quad c_j^0 \leq c_j \leq c_j^1, \quad j = 1, 2, 3, \quad c_2 + c_3 \leq 1, \quad (7)$$

де  $\ell^0$ ,  $c_j^0$ ,  $c_j^1$ ,  $j = 1, 2, 3$ , – задані сталі величини, що задовольняють умови  $\ell^0 > 0$ ,  $0 \leq c_1^0 < c_1^1 < 1$ ,  $0 \leq c_2^0 < c_2^1 < 1$ ,  $0 < c_3^0 < c_3^1 < 1$ . Остання нерівність у (7) означає, що під час варіювання параметрів стопи шарнір  $M_i$  не може розміщуватися між точками  $H_i$  та  $C_i$ .

Нехай також задаються обмеження на компоненти вектора опорних реакцій  $\mathbf{R}_i$ :

$$R_{ix}^0(t) \leq R_{ix}(t) \leq R_{ix}^1(t), \quad R_{iy}^0(t) \leq R_{iy}(t) \leq R_{iy}^1(t), \\ t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

та обмеження на міжланковий кут у колінному шарнірі робота (хода колінами вперед)

$$\eta_{Ki}(t) \equiv \alpha_i(t) - \beta_i(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Тут  $R_{ix}^{0,1}(t)$ ,  $R_{iy}^{0,1}(t)$ ,  $i = 1, 2$ , – задані на проміжку  $[0, T]$  функції. З огляду на вимогу антропоморфності ходи робота, ці функції можна побудувати за допомогою середньостатистичних даних експериментальних біомеханічних вимірювань ходи людини [47]. Доцільність використання цих даних можна також мотивувати тим, що хода людини є енергоефективною, відповідно і використання характеристик такої ходи сприятиме пошуку енергоощадливих режимів керування рухом двоногого робота [34].

Позначимо через  $\mathbf{u} = (q_1, q_2, u_1, u_2, p_1, p_2, w_1, w_2)$  вектор керування, а через  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  – вектор оптимізаційних конструктивних параметрів стопи робота. Сформулюємо таку задачу [9].

**Задача 1.** На проміжку подвійного кроку  $t \in [0, T]$  для заданих довжин  $L_1 > \ell$ ,  $L_2 > \ell$  і тривалостей  $T_1$ ,  $T_2$  одинарних кроків визначити такі  $\mathbf{c}^*$ ,  $\xi^*(t)$  та  $\mathbf{u}^*(t)$ , які з огляду на рівняння руху робота (1), (2) і накладені обмеження (3)–(9) мінімізують функціонал

$$\Phi = \frac{1}{L} \int_0^T \sum_{i=1}^2 \left[ q_i^2(t) + u_i^2(t) + p_i^2(t) + w_i^2(t) \right] dt. \quad (10)$$

Зауважимо, що квадратичний функціонал типу (10) часто використовують у задачах оптимального керування робототехнічними системами [1, 9,



25, 39, 42, 43]. У випадку, коли системою керують за допомогою електро-двигунів, такий функціонал (за певних припущень) характеризує сумарну кількість джоулевого тепла, яке виділяється в обмотках роторів двигунів [1, 29, 39].

Вкажемо на деякі особливості *задачі 1*. По-перше, маємо задачу сукупної оптимізації законів руху механічної системи та її конструктивних параметрів, тобто маємо задачу оптимального керування з параметрами. По-друге, досліджувана система характеризується істотною нелінійністю рівнянь руху та взаємною залежністю рухів для різних ступенів вільності, наявністю нестационарних обмежень кінематичного та динамічного характеру. По-третє, на введеній послідовності ритмічних фаз система має змінну кількість ступенів вільності, а на двоопорних фазах  $[0, \tau_{s2})$ ,  $[T_1, \tau_{s1})$  система є статично невизначеною. Водночас тривалості фаз  $\tau_{hi}$ ,  $\tau_{mi}$ ,  $\tau_{si}$ ,  $i = 1, 2$ , невідомі. Усе це істотно ускладнює застосування методів класичної теорії оптимального керування [14] і відповідних числових алгоритмів [16] для розв'язання задачі. Зокрема, методи на основі принципу максимуму Понтрягіна приводять до розв'язання двоточкових крайових задач для систем нелінійних диференціальних рівнянь, що вимагає значних обчислювальних ресурсів. Використання методу динамічного програмування потребує розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними, що також часто призводить до принципових труднощів.

Ефективною в дослідженні сформульованої задачі є методика параметричної оптимізації, що базується на поданні узагальнених координат і/або керувань механічної системи у вигляді лінійної комбінації заданих (базисних) функцій із невідомими параметрами, що зводить вихідну задачу оптимального керування до задачі нелінійного програмування [3–5, 21–25, 30, 40–43]. Основна перевага цієї методики – це можливість відмовитися від трудомісткого розв'язання двоточкових крайових задач для систем нелінійних диференціальних рівнянь, які отримуємо згідно з принципом максимуму Понтрягіна. Щодо обчислювальних витрат, то алгоритми нелінійного програмування є дещо простішими (а набір відповідних процедур у бібліотеках прикладних програм є повнішим), ніж алгоритми розв'язання задач оптимального керування нелінійними багатовимірними системами. Проте успіх використання такого підходу повною мірою залежить від вибору способу параметризації і базисних функцій. Так, у працях [3, 24, 42] для параметризації узагальнених координат використовують скінченні ряди Фур'є, у [22, 25] – поліноми четвертого степеня, в [31, 35, 43] – кубічні сплайни, в [4, 8, 9, 20, 21] – згладжувальні кубічні сплайни. У [30] узагальнені координати параметризують кусково-кубічними поліномами, керування – кусково-лінійними функціями, за параметри оптимізації приймають значення координат і керувань у вузлах дискретизації часового проміжку, у [40] керування параметризують кубічними поліномами. Проте параметризація всіх узагальнених координат і керувань призводить до порівняно великої кількості шуканих параметрів у відповідній задачі нелінійного програмування, що ускладнює її розв'язання. Також у випадку параметризації керувань необхідно інтегрувати систему рівнянь руху, що призводить до додаткових витрат обчислювального процесу. Тому доцільною тут є параметризація мінімально необхідної кількості незалежно варійованих функцій – частини узагальнених координат (або функцій від них), які вибирають з огляду на обмеження, накладені на рух системи. Це, своєю чергою, зменшує кількість шуканих параметрів оптимізації.

Нижче для розв'язання *задачі 1* використовуємо саме таку методику: 1°) відповідно до кількості ступенів вільності робота на введених ритмічних фазах формуємо множину незалежно варійованих функцій, які однозначно визначають його рух на проміжку  $[0, T]$ ; 2°) введені функції апроксимуємо кубічними згладжувальними сплайнами з невідомими параметрами у вуз-

лах дискретизації  $[0, T]$ ; 3°) із рівнянь руху (1), (2) знаходимо параметричну сім'ю керувань, що зводить функціонал (10) до функції багатьох змінних – параметрів апроксимації і конструктивних параметрів стоп; 4°) накладені на ходу робота нестационарні обмеження задовольняємо методом зовнішніх штрафних функцій [7], заздалегідь звівши їх до інтегрального вигляду; 5°) отриману задачу безумовної мінімізації функції багатьох змінних розв'язуємо за допомогою генетичного алгоритму. Зауважимо, що такий підхід дає можливість побудувати наближений розв'язок **задачі 1**. Однак, враховуючи те, що використання класичних методів оптимального керування наражається на значні труднощі, застосування запропонованої методики дає змогу упродовж порівняно невеликого проміжку часу розрахувати субоптимальні параметри стоп і режим керування ходом двоногого робота.

З огляду на кількість ступенів вільності крокуючого робота на прийнятних фазах руху введемо таку множину незалежно варійованих функцій:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^5 \omega_k, \quad \omega_1 = \{x(t), x_g(t), \eta_{K1}(t), \eta_{K2}(t)\}, t \in [0, T],$$

$$\omega_2 = \{\alpha_2(t), \gamma_1(t)\}, t \in [0, T_1], \quad \omega_3 = \{\alpha_1(t), \gamma_2(t)\}, t \in [T_1, T],$$

$$\omega_4 = \{\gamma_2(t), \eta_{M2}(t)\}, t \in [\tau_{s2}, T_1], \quad \omega_5 = \{\gamma_1(t), \eta_{M1}(t)\}, t \in [\tau_{s1}, T], \quad (11)$$

де  $x_g = x(t) - r \sin \psi(t)$  – абсциса центра маси тіла  $G$ ,  $r$  – віддаль від центра маси тіла  $G$  до шарніра  $N$ . Функції множин  $\omega_4, \omega_5$  описують рух стоп на фазах їх перенесення над поверхнею опори.

Згідно з (11) на одноопорних фазах руху маємо 8 незалежних функцій, на двоопорних – 6, що досить для того, щоб задати рух робота  $\xi = \xi(t)$  на проміжку  $t \in [0, T]$  (див. рис. 2). Справді, на всіх фазах руху кутове відхилення корпусу рівне  $\psi = \arcsin[(x(t) - x_g)/r]$ . Для визначення решти узагальнених координат механічної системи скористаємось співвідношеннями

$$x_i = x + a_i \sin \alpha_i + b_i \sin \beta_i, \quad y_i = y - a_i \cos \alpha_i - b_i \cos \beta_i,$$

$$x_{hi} = x_i - \ell_{3i} \sin(\varphi_{Ai} - \gamma_i), \quad y_{hi} = y_i - \ell_{3i} \cos(\varphi_{Ai} - \gamma_i),$$

$$x_{mi} = x_i + \ell_{4i} \sin \gamma_i, \quad y_{mi} = y_i - \ell_{4i} \cos \gamma_i,$$

$$x_{si} = x_{mi} + \ell_{2i} \sin \varepsilon_i, \quad y_{si} = y_{mi} - \ell_{2i} \cos \varepsilon_i, \quad (12)$$

де  $\ell_{3i} = |A_i H_i|$ ,  $\ell_{4i} = |A_i M_i|$ ,  $\varphi_{Ai} = \angle H_i A_i M_i$ ,  $i = 1, 2$ . На двоопорних фазах руху  $(0, \tau_{h1}]$ ,  $(\tau_{h1}, \tau_{s2}]$  задано кут  $\gamma_1$  і координати точки  $H_1(x_{h1}^\circ, 0)$ , що дає змогу обчислити координати точки  $A_1(x_1, y_1)$ . Далі, за відомими  $x, x_1, y_1, \eta_{K1}$  із перших двох співвідношень у (12) знаходимо ординату  $y$  та кут  $\alpha_1$ , після чого для заданих  $\alpha_2$  і  $\beta_2 = \alpha_2 - \eta_{K2}$  обчислюємо координати  $A_2(x_2, y_2)$ . Оскільки на зазначених фазах координати точки  $S_2(x_{s2}^\circ, 0)$  відомі, із чотирьох останніх співвідношень у (12) визначаємо решту узагальнених координат,  $\gamma_2, \varepsilon_2$ . На наступних двох фазах  $(\tau_{s2}, \tau_{m1}]$ ,  $(\tau_{m1}, T_1]$  друга стопа переноситься, причому її кутові переміщення  $\gamma_2, \varepsilon_2 = \gamma_2 + \eta_{M2} + \varphi_{Mi}$  відомі. Аналогічно до перших двох фаз спочатку за відомим положенням точки  $M_1(x_{m1}^\circ, 0)$  обчислюємо координати  $A_1(x_1, y_1)$ , після чого знаходимо решту шуканих узагальнених координат  $y$  та  $\alpha_1$ . Для фаз на другому кроці  $(T_1, T]$  процедура визначення узагальнених координат робота збігається (з

точністю до номера ноги) з процедурою для відповідних фаз на першому кроці. Отже, для заданих незалежно варійованих функцій (11) узагальнені координати  $\xi$  визначаються однозначно. Узагальнені швидкості  $\dot{\xi}$  і прискорення  $\ddot{\xi}$  обчислюємо диференціюванням виразів функціональних залежностей узагальнених координат від функцій (11).

Для визначення векторів керувань  $\mathbf{u}(t)$  і реакцій  $\mathbf{R}_1(x_{R1}, t)$ ,  $\mathbf{R}_2(x_{R2}, t)$ , які реалізують заданий рух робота  $\xi = \xi(t)$ , скористаємось рівняннями руху (1), (2). Маємо 11 рівнянь з 14-ма невідомими  $q_i$ ,  $u_i$ ,  $p_i$ ,  $w_i$ ,  $R_{ix}$ ,  $R_{iy}$ ,  $x_{Ri}$ ,  $i = 1, 2$ . Для зручності опису алгоритму позначимо ліві частини співвідношень (1) через  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_{4i}$ ,  $f_{5i}$  відповідно. Розглянемо переміщення робота на першому кроці. На двоопорних фазах  $[0, \tau_{h1}]$ ,  $[\tau_{h1}, \tau_{s2}]$  шуканих керувань і реакцій є більше, ніж рівнянь (механічна система є статично невизначеною). За надлишкові невідомі виберемо  $x_{R1}(t)$ ,  $x_{R2}(t)$ ,  $R_{2x}(t)$ , які задамо на вказаних фазах у вигляді кубічного полінома Ерміта, використавши для цього їхні значення і значення їхніх похідних у моменти часу  $t = 0$ ,  $t = \tau_{s2}$ . Далі, підсумувавши з третього до сьомого рівняння в (1) і всі рівняння (2), після підстановки в отриману суму виразів для  $x_i$ ,  $y_i$  із (12) та  $R_{1x} = f_1 - R_{2x}$  остаточно одержуємо систему двох алгебраїчних рівнянь з невідомими  $R_{1y}$ ,  $R_{2y}$ :

$$\begin{aligned} R_{1y} + R_{2y} &= f_2, \\ x_{R1}R_{1y} + x_{R2}R_{2y} &= f_6 - yf_1 + xf_2, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $f_6 = f_3 + f_{4,1} + f_{4,2} + f_{5,1} + f_{5,2}$ . Система (13) має єдиний розв'язок за умов  $x_{R1}^2 + x_{R2}^2 > 0$ ,  $x_{R1} \neq x_{R2}$ . Перша з цих нерівностей виконується завжди (для розглядуваної моделі ходи), друга – за умови  $x_{h1}^\circ > x_{s2}^\circ$ , яка, з огляду на співвідношення  $x_{s2}^\circ = x_{h1}^\circ + \ell - L_2$ , еквівалентна умові  $L_2 > \ell$  (довжина кроку першої ноги має бути більшою, ніж довжина стопи). Підставивши розв'язки системи рівнянь (13)

$$R_{1y} = \frac{yf_1 - (x - x_{R2})f_2 - f_6}{x_{R2} - x_{R1}}, \quad R_{2y} = f_2 - R_{1y}, \quad (14)$$

у співвідношення (1), (2), послідовно знаходимо шукані керування

$$\begin{aligned} w_1 &= 0, & w_2 &= (x_{m2} - x_{R2})R_{2y} - y_{m2}R_{2x}, \\ p_i &= (x_i - x_{Ri})R_{iy} - y_iR_{ix}, & u_i &= f_{5i} + p_i - b_i(R_{ix} \cos \beta_i + R_{iy} \sin \beta_i), \\ q_i &= f_{4i} + u_i - a_i(R_{ix} \cos \alpha_i + R_{iy} \sin \alpha_i), & i &= 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

На наступних одноопорних фазах  $[\tau_{s2}, \tau_{m1}]$ ,  $[\tau_{m1}, T_1]$  друга стопа переноситься над опорною поверхнею, тому для неї запишемо:  $R_{2x} = 0$ ,  $R_{2y} = 0$ ,  $x_{R2} = 0$ . Далі з рівнянь (1), (2) одержуємо

$$\begin{aligned} w_2 &= 0, & p_2 &= 0, & u_2 &= f_{5,2}, & q_2 &= f_{4,2} + u_2, & R_{1x} &= f_1, & R_{1y} &= f_2, \\ q_1 &= -q_1 - f_3, & u_1 &= q_1 - f_{4,1} + a_1(f_1 \cos \alpha_1 + f_2 \sin \alpha_1), \\ p_1 &= u_1 - f_{5,1} + b_1(f_1 \cos \beta_1 + f_2 \sin \beta_1), & x_{R1} &= x_1 - (y_1R_{1x} + p_1)/R_{1y}, \end{aligned}$$

$$w_1 = \begin{cases} 0, & x_{h1} \leq x_{R1} < x_{m1}^{\circ}, \\ (x_{m1} - x_{R1})R_{1y} - y_{m1}R_{1x}, & x_{m1} \leq x_{R1} \leq x_{s1}^{\circ}. \end{cases} \quad (16)$$

Для фаз на другому кроці,  $t \in (T_1, T]$ , алгоритм знаходження векторів  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{R}_1(x_{R1}, t)$ ,  $\mathbf{R}_2(x_{R2}, t)$  збігається (з точністю до номера ноги) з алгоритмом для відповідних фаз на першому кроці. На двоопорних фазах  $[T_1, \tau_{h2}]$ ,  $[\tau_{h2}, \tau_{s1}]$  невідомі  $x_{R1}(t)$ ,  $x_{R2}(t)$ ,  $R_{1x}(t)$  довізначаємо (кубічними поліномами Ерміта) за їхніми значеннями та значеннями їхніх похідних у моменти часу  $t = T_1$ ,  $t = \tau_{s1}$ . Реакції  $R_{1y}$ ,  $R_{2y}$  знаходимо із системи рівнянь (13) за умови  $x_{h2}^{\circ} > x_{s1}^{\circ}$ , яка еквівалентна умові  $L_1 > \ell$  (довжина кроку другої ноги має бути більша від довжини стопи). Остаточо невідомі  $R_{iy}$ ,  $p_i$ ,  $u_i$ ,  $q_i$ ,  $i = 1, 2$ , даються виразами (14), (15),  $R_{2x} = f_1 - R_{1x}$ ,  $w_1 = (x_{m1} - x_{R1})R_{1y} - y_{m1}R_{1x}$ ,  $w_2 = 0$ . Далі, на одноопорних фазах  $[\tau_{s1}, \tau_{m2}]$ ,  $[\tau_{m2}, T]$  задаємо  $R_{1x} = R_{1y} = 0$ ,  $x_{R1} = 0$ , після чого з рівнянь (1), (2) знаходимо решту шуканих невідомих. Вирази для них можна отримати зі співвідношень (16), у яких потрібно зробити взаємозаміну індексів  $1 \leftrightarrow 2$ .

Отже, задавши за допомогою функцій (11) рух робота на проміжку подвійного кроку  $[0, T]$ , можна, згідно з описаним вище алгоритмом, обчислити необхідні для цього керування  $\mathbf{u}(t)$  і реакції  $\mathbf{R}_1(x_{R1}, t)$ ,  $\mathbf{R}_2(x_{R2}, t)$ .

Для параметризації функцій множин  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  використовуємо кубічні згладжувальні сплайни. Як зазначено у [8], такі сплайни вигідно відрізняються від звичайних сплайнів, оскільки розраховані за їх допомогою кінематичні та динамічні характеристики механічної системи мають плавнішу поведінку і менші порогові значення. Відомо [10], що кубічний згладжувальний сплайн  $S^{\omega}(t)$ , що апроксимує на проміжку  $[t_0, t_1]$  функцію  $\omega(t)$ , визначається вузлами дискретизації  $\Theta^{\omega} = \{t_0 = \sigma_0^{\omega} < \sigma_1^{\omega} < \dots < \sigma_{n^{\omega}}^{\omega} = t_1\}$ , значеннями функції  $\omega(t)$  у вузлах  $\{z_0^{\omega}, z_1^{\omega}, \dots, z_{n^{\omega}}^{\omega}\}$  з відповідними коефіцієнтами згладжування  $\{\rho_0^{\omega}, \rho_1^{\omega}, \dots, \rho_{n^{\omega}}^{\omega}\}$ , поліномом не вище третього степеня на проміжках  $[\sigma_k^{\omega}, \sigma_{k+1}^{\omega}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n^{\omega} - 1$ , та одним із таких типів граничних умов:

$$\dot{S}^{\omega}(\sigma_0^{\omega}) = \dot{S}^{\omega}(\sigma_{n^{\omega}}^{\omega}), \quad \ddot{S}^{\omega}(\sigma_0^{\omega}) = \ddot{S}^{\omega}(\sigma_{n^{\omega}}^{\omega}) \quad (17)$$

або

$$\dot{S}^{\omega}(\sigma_0^{\omega}) = a^{\omega}, \quad \dot{S}^{\omega}(\sigma_{n^{\omega}}^{\omega}) = b^{\omega}. \quad (18)$$

Зазначимо, що під час побудови сплайна  $S^{\omega}$  коефіцієнти згладжування задаємо заздалегідь, водночас для вузла  $\sigma_k^{\omega}$  з коефіцієнтом  $\rho_k^{\omega} = 0$  справджується рівність  $S^{\omega}(\sigma_k^{\omega}) = z_k^{\omega}$ . Сплайн  $S^{\omega}$  має на всьому проміжку  $[t_0, t_1]$  неперервні першу та другу похідні за часом  $t$ .

Для функцій множини  $\omega_1$  використовуємо сплайни з умовами (17), для функцій множин  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  – сплайни з умовами (18), де задаємо  $\sigma_0^{\omega_1} = \sigma_0^{\omega_2} = 0$ ,  $\sigma_{n^{\omega_2}}^{\omega_2} = \sigma_0^{\omega_3} = T_1$ ,  $\sigma_{n^{\omega_1}}^{\omega_1} = \sigma_{n^{\omega_3}}^{\omega_3} = T$ , дискретизацію проміжку  $[0, T]$  для

$x$ ,  $x_g$  проводимо за умови  $T_1 \in \Omega^x$ ,  $T_1 \in \Omega^{x_g}$  [4]. Для кожної функції  $\omega \in \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3$  коефіцієнти згладжування  $\rho_0^\omega, \rho_1^\omega, \dots, \rho_{n^\omega}^\omega$  є параметрами алгоритму, які задаємо апріорі: для  $\eta_{K1}$ ,  $\eta_{K2}$  всі коефіцієнти рівні  $\rho^1$ , для  $x$ ,  $x_g$  у вузлах, що відповідають  $t = 0, T_1, T$ , коефіцієнти рівні нулеві, для решти вузлів – відповідно  $\rho^x$ ,  $\rho^{x_g}$ , для  $\alpha_i$  (на проміжку  $[\tau_{3-i}, \tau_{4-i}]$ ) для крайніх вузлів коефіцієнти рівні нулеві, для решти вузлів –  $\rho^\alpha$ , для  $\gamma_i$  (на  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ ) для крайніх і двох проміжних вузлів (див. [4]) коефіцієнти рівні нулеві, для решти вузлів –  $\rho^\gamma$ . Величини  $z_0^\omega, z_1^\omega, \dots, z_{n^\omega}^\omega$ ,  $a^\omega$ ,  $b^\omega$  – змінні параметри (кінематики), які розраховуємо під час розв’язання **задачі 1**. Частиною цих параметрів забезпечуємо виконання умов (4) (крім останнього рядка) і (6). Також до цих параметрів віднесемо величини  $\psi(0)$ ,  $\psi(T_1)$  і похідні  $\{\dot{x}_{R1}, \dot{x}_{R2}, \dot{R}_{2x}\}|_{t=0, \tau_{s2}}$ ,  $\{\dot{x}_{R1}, \dot{x}_{R2}, \dot{R}_{1x}\}|_{t=T_1, \tau_{s1}}$ ,  $\dot{\gamma}_1(T_1)$ ,  $\dot{\gamma}_2(T)$ . Отримані в такий спосіб усі змінні кінематичні параметри системи позначимо через вектор  $\mathbf{z}$ .

Функції множин  $\omega_4$ ,  $\omega_5$ , що описують рух безінерційних стоп під час їх перенесення, задаємо у вигляді лінійних функцій від часу  $t$ :

$$\gamma_i = [\gamma_i(\tau_{4-i}) - \gamma_i(\tau_{si})] \frac{t - \tau_{si}}{\tau_{4-i} - \tau_{si}}, \quad \eta_{Mi} = \eta_{Mi}(\tau_{si}) \frac{\tau_{4-i} - t}{\tau_{4-i} - \tau_{s2}},$$

$$t \in [\tau_{si}, \tau_{4-i}],$$

де момент часу завершення двоопорної фази  $\tau_{si}$  визначаємо, аналізуючи розміщення точок  $A_i$ ,  $M_i$ ,  $S_i$  відносно осі  $OX$ ,  $i = 1, 2$ . Тривалості решти фаз розраховуємо в процесі побудови обертового руху стоп  $\gamma_i(t)$ ,  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ , водночас забезпечуючи виконання ритмічних умов (3),  $i = 1, 2$  [4]. Якщо під час перенесення стопа опускається нижче від допустимого рівня  $\delta$  ( $\delta$  – заданий параметр) над опорною поверхнею, поворотом її ланок навколо шарнірів  $A_i$ ,  $M_i$  намагаємось розмістити стопу на допустимому рівні. Також за допомогою повороту ланок стопи забезпечуємо виконання умови  $\eta_{Mi} \geq 0$ . У випадку, якщо такий поворот не приводить до бажаного результату, фіксуємо стопу в горизонтальному положенні, а величину відхилення від рівня  $\delta$  подаємо у вигляді відповідної штрафної функції (див. нижче).

Зауважимо, що для використаного способу апроксимації другі похідні від узагальнених координат  $\xi(t)$ , крім  $\ddot{x}(t)$ ,  $\ddot{\psi}(t)$ , мають розриви (першого роду) в моменти часу  $t = 0, T_1, T$ . Це пояснюється тим, що функції множин  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  апроксимуємо на проміжках одинарних кроків робота, і неперервність других похідних на кінцях цих проміжків не забезпечується.

Решту умов (4), (5), (8), (9) задовольняємо за допомогою методики зовнішніх штрафних функцій, попередньо зобразивши обмеження типу нерівностей у відповідній інтегральній формі

$$V_{R_{ix}} = \frac{1}{C_{R_{ix}}} \int_0^T [(R_{ix}^0 - R_{ix})_+^2 + (R_{ix} - R_{ix}^1)_+^2] dt, \quad C_{R_{ix}} = \int_0^T (R_{ix}^1 - R_{ix}^0)^2 dt,$$

$$V_{R_{iy}} = \frac{1}{C_{R_{iy}}} \int_0^T [(R_{iy}^0 - R_{iy})_+^2 + (R_{iy} - R_{iy}^1)_+^2] dt, \quad C_{R_{iy}} = \int_0^T (R_{iy}^1 - R_{iy}^0)^2 dt,$$

$$\begin{aligned}
V_{R_i} &= \int_{\Lambda_{1i}} (-R_{iy})_+^2 dt, & V_{R_{ixy}} &= \int_{\Lambda_{1i}} [ |R_{ix}| - \chi |R_{iy}| ]_+^2 dt, \\
V_{\dot{x}_{Ri}} &= \int_{\Lambda_{1i}} (-\dot{x}_{Ri})_+^2 dt, \\
V_{y_{hmsi}} &= \int_{\tau_{si}}^{\tau_{4-i}} [ (-y_{hi})_+^2 + [(-y_{mi})_+^2 + (-y_{si})_+^2] ] dt, & V_{\eta_{Ki}} &= \int_0^T (-\eta_{Ki})_+^2 dt, \\
V_{x_{hi}} &= \frac{1}{\ell_1} \int_{\tau_i}^{\tau_{mi}} [ (x_{hi}^\circ - x_{Ri})_+^2 + (x_{Ri} - x_{mi}^\circ)_+^2 ] dt, \\
V_{x_{si}} &= \frac{1}{\ell_2} \int_{\Lambda_{2i}} [ (x_{mi}^\circ - x_{Ri})_+^2 + (x_{Ri} - x_{si}^\circ)_+^2 ] dt, \\
&&& i = 1, 2, \tag{19}
\end{aligned}$$

де позначено:  $(v)_+ = v$  за умови  $v \geq 0$  і  $(v)_+ = 0$  за умови  $v < 0$ . У виразах (19) спочатку виконуємо операцію  $(v)_+$ , після чого підносимо до квадрату.

Після параметризації функцій (11) знаходимо, згідно з описаним вище алгоритмом, параметричну сім'ю законів руху робота  $\xi = \xi(t, \mathbf{c}, \mathbf{z})$ , де залежність узагальнених координат від вектора  $\mathbf{c}$  конструктивних параметрів стоп визначається співвідношеннями (12), від вектора  $\mathbf{z}$  – способом параметризації. Далі, використавши підхід обернених задач динаміки, із рівнянь руху (1), (2) отримуємо відповідні  $\mathbf{u}(t, \mathbf{c}, \mathbf{z})$ ,  $\mathbf{R}_i(t, \mathbf{c}, \mathbf{z})$ ,  $x_{Ri}(t, \mathbf{c}, \mathbf{z})$ ,  $i = 1, 2$ . Підстановкою цих параметричних виразів у функціонал (10) та інтеграли (19) зводимо **задачу 1** до задачі нелінійного програмування [7, 23]:

$$\Phi(\mathbf{c}, \mathbf{z}) + \langle \lambda, \mathbf{V}(\mathbf{c}, \mathbf{z}) \rangle \xrightarrow{\mathbf{c}, \mathbf{z}} \min, \tag{20}$$

де  $\Phi$  – функція (багатьох змінних), до якої зводиться функціонал (10),  $\lambda$  – вектор заданих величин (штрафних коефіцієнтів),  $\mathbf{V}$  – вектор-функція, компонентами якої є значення виразів (19). Також вектор  $\mathbf{V}$  містить компоненти, які оцінюють величину розриву прискорень  $\ddot{y}(t)$ ,  $\ddot{\alpha}_1(t)$ ,  $\ddot{\alpha}_2(t)$  у моменти часу  $t = 0, T_1, T$ :  $|\ddot{y}(\tau_k^-) - \ddot{y}(\tau_k^+)|$ ,  $|\ddot{\alpha}_i(\tau_k^-) - \ddot{\alpha}_i(\tau_k^+)|$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2$ . Введення цих штрафних величин дає змогу зменшити амплітуду збурень руху системи, зумовлених ударними ефектами, що загалом підвищує плавність поведінки кінематичних і динамічних характеристик побудованого субоптимального процесу. Для розрахунку динамічних характеристик системи, а також для обчислення інтегралів (10), (19), використовуємо рівномірні сітки часових проміжків  $[0, T_1]$ ,  $[T_1, T]$ . Зведену задачу оптимізації (20) розв'язуємо генетичним алгоритмом із дійсним кодуванням [12]. Перспективним тут видається також використання новітнього евристичного алгоритму Жау та інтелектуальних алгоритмів, що базуються еволюційних обчисленнях [19, 28, 37].

Описаний алгоритм сукупної оптимізації параметрів стопи і законів руху двоногого робота реалізовано у вигляді комплексу програм (у середовищі Inprise Delphi 7 [11]). Проведено серію числових експериментів, аналіз результатів яких підтвердив ефективність запропонованої методики.

**3. Числове моделювання.** Опишемо окремі числові результати розв'язання сформульованої вище задачі оптимізації. Аналогічно до [9] задачу розв'язували за умови симетричності ходи робота, коли одинарні кроки рівні між собою (за тривалістю і довжиною) і на проміжку подвійного кроку

одна нога повторює рух іншої із запізненням у часі  $T/2$  :

$$\tilde{\xi}_i(T_1 + t) = \tilde{\xi}_{3-i}(t) + \mathbf{L}_1, \quad \dot{\tilde{\xi}}_i(T_1 + t) = \dot{\tilde{\xi}}_{3-i}(t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T],$$

де  $\tilde{\xi}_i = (x, y, \psi, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varepsilon_i)$ ,  $\mathbf{L}_1 = (L_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  – вектори розмірності 7,  $T_1 = T_2 = T/2$ ,  $L_1 = L_2 = L/2$ . Параметри одинарних кроків робота задавали такими:  $L_1 = L_2 = 0.755$  м,  $T_1 = T_2 = 0.57$  с.

Розглядали модель робота з такими конструктивними параметрами:  $m = 46.7$  кг,  $r = 0.39$  м,  $J = 7.1$  Нм<sup>2</sup>,  $a_i = 0.508$  м,  $m_{ai} = 10.8$  кг,  $r_{ai} = 0.254$  м,  $J_{ai} = 0.943$  Нм<sup>2</sup>,  $b_i = 0.492$  м,  $m_{bi} = 1.2$  кг,  $r_{bi} = 0.246$  м,  $J_{bi} = 0.0971$  Нм<sup>2</sup>,  $m_{fi} = 1.2$  кг,  $\chi = 0.9$ ,  $i = 1, 2$ . Зауважимо, що параметри тіл  $NK_i$ ,  $K_iA_i$  задавали згідно з результатами статті [9], де було розраховано оптимальні лінійні та масоінерційні характеристики цих тіл.

В обмеженнях на оптимізаційні конструктивні параметри стопи (7) стали величини приймали значення:  $\ell^0 = 0.29$  м,  $c_1^0 = 0$ ,  $c_1^1 = 0.5$ ,  $c_2^0 = 0$ ,  $c_2^1 = 0.5$ ,  $c_3^0 = 0.05$ ,  $c_3^1 = 0.5$ . Межі  $R_{ix, iy}^0$ ,  $R_{ix, iy}^1$  областей зміни допустимих значень опорних реакцій задавали на підставі експериментальних досліджень ходи людини [47].

Параметрам числової схеми алгоритму надавали таких значень:  $n^x = n^{xg} = 25$ ,  $n^{\alpha_i} = 14$ ,  $n^{\gamma_i} = 21$ ,  $n^{\eta_{Ki}} = 22$ ,  $\rho^x = \rho^{xg} = \rho^\alpha = \rho^\gamma = 10^{-2}$ ,  $\rho^\eta = 10^{-4}$ . Компоненти вектора  $\lambda$  у виразі для зведеної цільової функції (20) приймали значення:  $\lambda_{R_{ix}} = \lambda_{R_{iy}} = \lambda_{R_i} = \lambda_{R_{ixy}} = 10^3$ ,  $\lambda_{\dot{x}_{Ri}} = 10^5$ ,  $\lambda_{y_{hmsi}} = \lambda_{\eta_{Ki}} = 10^7$ ,  $\lambda_{x_{hi}} = \lambda_{x_{si}} = 10^4$ , штрафні коефіцієнти у точках розриву функцій  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{\alpha}_1$ ,  $\ddot{\alpha}_2$  задавали рівними  $10^3$ ,  $i = 1, 2$ . Значення вказаних параметрів були підбрані у ході числових експериментів з урахуванням компромісу між точністю і тривалістю обчислень.

Мінімізацію функції (20) проводили модифікованим генетичним алгоритмом з дійсним кодуванням, в якому задавали такі параметри (див. [12]): розмір популяції – 900 особин, максимальна кількість епох – 500, ймовірність схрещування – 0.95, ймовірність мутації хромосом – 0.85, у неоднорідній мутації  $b = 2$ , у SBX-η схрещуванні  $\eta = 20$ , у UNDX схрещуванні  $\alpha = 6$ ,  $\iota = 0.1$ , в операторах мутації параметр  $\lambda = 0.01$ . Точність за параметрами оптимізації і значенням цільової функції становили відповідно  $10^{-6}$  і  $10^{-1}$ , сумарна кількість параметрів оптимізації – 86. Обчислення виконували на комп'ютері з процесором Intel Core I7-3610M (частота 2.3 ГГц) та оперативною пам'яттю 8 Гб. Час розв'язування задачі становив: для послідовного аналога генетичного алгоритму – 303 хв 1 сек, а для розпаралеленого аналога (8 потоків) – 79 хв 31 сек.

У результаті розв'язання досліджуваної задачі отримали оптимальні значення конструктивних параметрів стоп  $c_1^* = 0.423$ ,  $c_2^* = 0.361$ ,  $c_3^* = 0.388$ , які відповідають лінійним розмірам:  $|A_iC_i| = 0.123$  м,  $|H_iC_i| = 0.105$  м,  $|M_iS_i| = 0.113$  м; решта параметрів стоп:  $\ell_{1i} = 0.177$  м,  $\ell_{3i} = 0.162$  м,  $\ell_{4i} = 0.143$  м,  $\varphi_{A_i} = 70.8^\circ$ ,  $\varphi_{M_i} = 59.7^\circ$ ,  $i = 1, 2$ . Мінімальне значення цільового функціонала (10) становить  $\Phi^* = 2144.5$ , що є у 2.44 рази меншим від значення, досягнутого оптимізацією розмірів тільки стегна та гомілки [9].

Побудований субоптимальний закон руху робота характеризується ритмічними параметрами:

$$\begin{aligned} \tau_{h1} &= 0.15T, & \tau_{m1} &= 0.41T, & \tau_{s1} &= 0.61T, \\ \tau_{h2} &= 0.65T, & \tau_{m2} &= 0.91T, & \tau_{s2} &= 0.11T. \end{aligned}$$

Відповідні кінематичні та динамічні характеристики зображено на рис. 4–11 (суцільні лінії). Тут час  $t$  виражено у відсотках стосовно  $T$ , кути – у градусах, динамічні характеристики віднесені до сумарної маси робота  $M = 74.1 \text{ кг}$  і виражені: моменти – у Нм/кг, реакції – у Н/кг. Для порівняння на цих графіках штриховими лініями наведено межі допустимих областей зміни відповідних величин, побудовані на підставі даних праці [47].

На рис. 4–6 зображено графіки міжланкових кутів  $\eta_{N1}^*(t)$ ,  $\eta_{K1}^*(t)$ ,  $\eta_{A1}^*(t)$ , де  $\eta_{N1}(t) \equiv \alpha_1(t) - \psi(t)$ ,  $\eta_{A1}(t) \equiv \gamma_1(t) - \beta_1(t) + \varphi_{M1} - \pi/2$ . На графіках видно, що кінематичні характеристики робота зі знайденими оптимальними (за розмірами) стопами дещо відхиляються від загальноприйнятих середньостатистичних антропометричних областей їхньої зміни, хоча якісна поведінка цих характеристик збігається з поведінкою відповідних характеристик ходи людини. Зауважимо, що в досліджуваній задачі умову належності міжланкових кутів робота до допустимих областей не ставили. Накладали тільки умову невід'ємності міжланкового кута в колінному шарнірі (див. рис. 5). Відповідні моменти сил  $q_1^*$ ,  $u_1^*$ ,  $p_1^*$  у шарнірах системи, а також реакції  $R_{1x}^*$ ,  $R_{1y}^*$  опорної поверхні наведено на рис. 7–11. Згідно з отриманими числовими даними, відносна похибка відхилення динамічних характеристик від допустимих областей становить: для опорних реакцій – 1%, для моментів сил у тазостегновому та колінному шарнірі – 2%, у гомілковостопному – 51%. Відносну похибку порівнюваних кривих обчислюємо як відношення площі фігури за межами граничних кривих до площі відповідної допустимої області. Бачимо, що стопа зі знайденими оптимальними розмірами спричинює істотний перерозподіл моменту сил у гомілковостопному шарнірі – його рівень зміщується в додатному напрямку.

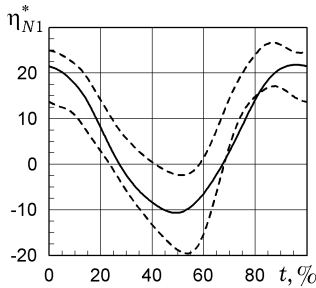


Рис. 4

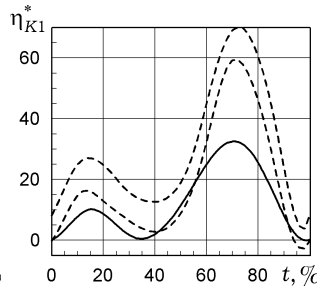


Рис. 5

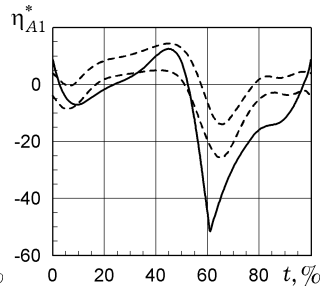


Рис. 6

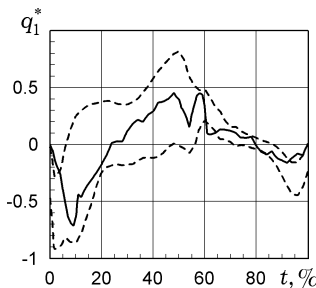


Рис. 7

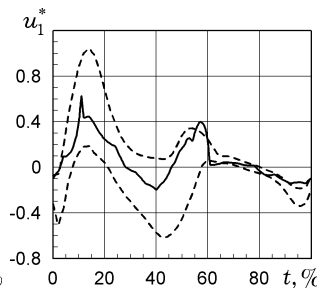


Рис. 8

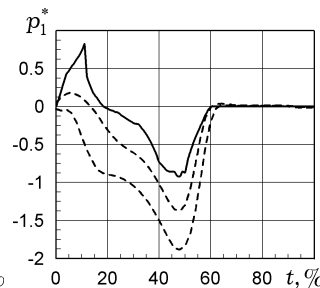


Рис. 9



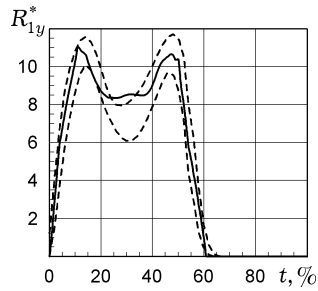


Рис. 10

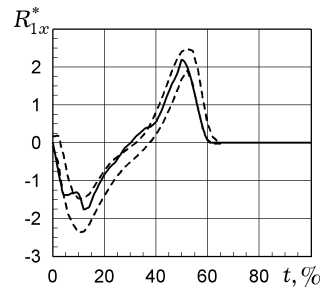


Рис. 11

**Висновки.** У межах плоскої системи дев'яти твердих тіл, що описує ходу двоногого робота, сформульовано задачу пошуку конструктивних параметрів стоп та законів руху робота за умови мінімізації цільового квадратичного (за керуваннями) функціонала та наявності ритмічних, кінематичних і динамічних обмежень. Розроблено чисельно-аналітичний алгоритм розв'язання цієї задачі, який ґрунтується на методиці параметричної оптимізації. Відповідно до накладених обмежень вводимо множину (мінімально необхідної кількості) незалежно варійованих функцій, які апроксимуємо кубічними згладжувальними сплайнами з невідомими параметрами у вузлах дискретизації часового проміжку подвійного кроку. У результаті отримуємо параметричні (залежні від параметрів апроксимації та параметрів стоп) сім'ї законів руху і керувань робота, що зводить вихідну задачу оптимального керування (з параметрами) до задачі нелінійного програмування. Алгоритм реалізовано у вигляді відповідного комплексу програм (у середовищі Inprise Delphi 7), за допомогою якого проведено серію числових експериментів з моделювання субоптимального руху робота. Аналіз отриманих числових даних свідчить, що лінійні розміри стоп сильно впливають на динамічні та енергетичні характеристики ходи робота. Для розглянутого модельного прикладу завдяки оптимальному вибору таких параметрів стопи, як довжини носка та заднього відділу, а також її висоти, було істотно зменшено (приблизно у 2.3 рази) енерговитрати на переміщення робота.

Отже, розміри стопи двоногого робота є важливими чинниками в формуванні енергоощадливої ходи й повинні враховуватися на етапі його проектування. Наявність запропонованих алгоритму та програм дасть можливість ефективно розрахувати раціональні параметри стоп і режими ходи двоногого робота, які суттєво зменшують його енерговитрати.

1. Аветисян В. В., Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Оптимизация режимов управления манипуляционными роботами с учетом энергозатрат // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1987. – № 3. – С. 100–107.
2. Белецкий В. В. Двухногая ходьба: модельные задачи динамики и управления. – Москва: Наука, 1984. – 288 с.
3. Бербюк В. Е. Динамика и оптимизация робототехнических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 188 с.
4. Бербюк В. Е., Демьдюк М. В., Литвин Б. А. Математическое моделирование и оптимизация ходьбы человека с протезированной голенью // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 3. – С. 128–144.  
Te same: Berbyuk V. E., Demydyuk M. V., Lytvyn B. A. Mathematical modeling and optimization of walking of human being with prosthesis of crus // J. Autom. Inform. Sci. – 2005. – 37, No. 6. – P. 46–60.  
– <https://doi.org/10.1615/J Automat Inf Scien.v37.i6.60>.
5. Болотник Н. Н., Черноусько Ф. Л. Оптимизация управления манипуляционными роботами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1990. – № 1. – С. 189–238.  
Te same: Bolotnik N. N., Chernousko F. L. Optimization of manipulation robot control // Sov. J. Comput. Systems Sci. – 1990. – 28, No. 5. – P. 127–169.
6. Бордюг Б. А., Ларин В. Б., Тимошенко А. Г. Задачи управления шагающими аппаратами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 263 с.

7. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – Москва: Мир, 1985. – 509 с.
8. Демидюк М. В., Литвин Б. А., Голуб Б. М. Параметрична оптимізація ходи двоногого робота // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 3. – С. 162–171.
9. Демидюк М. В., Литвин Б. А. Оптимизация параметров и режимов управления движением двуногого шагающего робота // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 6. – С. 32–44.  
Те саме: *Demydyuk M. V., Lytvyn B. A. Optimization of the parameters and motion control modes of the biledged walking robot // J. Autom. Inform. Sci. – 2016. – 48, No. 12. – P. 48–61.*  
– <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i12.50>.
10. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
11. Кэнту М. Delphi 7: Для профессионалов. – Санкт-Петербург: Питер, 2004. – 1101 с.
12. Литвин Б. Модифікація паралельного генетичного алгоритму з дійсним кодуванням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2012. – Вип. 18. – С. 229–239.
13. Лурье А. И. Аналитическая механика. – Москва: Физматгиз, 1961. – 824 с.
14. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – Москва: Наука, 1976. – 392 с.
15. Скворцов Д. В. Клинический анализ движений. Анализ походки. – Иваново: НПЦ «Стимул», 1996. – 344 с.
16. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. – Москва: Наука, 1978. – 486 с.
17. Формальский А. М. Перемещение антропоморфных механизмов. – Москва: Наука, 1982. – 368 с.
18. *Al-Shuka H. F. N., Corves B. J., Zhu W.-H. On the dynamic optimization of biped robot // Lecture Notes on Software Engineering. – 2013. – 1, No. 3. – P. 237–243.*  
– <https://doi.org/10.7763/LNSE.2013.V1.52>.
19. *Anh H. P. H., Huan T. T. Optimal walking gait generator for biped robot using modified Jaya optimization technique // Int. J. Comput. Intell. Syst. – 2020. – 13, No. 1. – P. 382–399.* – <https://doi.org/10.2991/ijcis.d.200323.001>.
20. *Berbyuk V., Boström A., Lytwyn B., Peterson B. Energy-optimal control of bipedal locomotion systems // J. Stability and Control: Theory and Application (SACTA). – 2002. – 4, No. 2. – P. 74–89.*
21. *Berbyuk V., Lytwyn B., Demydyuk M. Energy-optimal control of underactuated bipedal locomotion systems // Proc. «Multibody Dynamics 2005, ECCOMAS Thematic Conf. on Advances in Computational Multibody Dynamics (21–24 June, 2005, Madrid, Spain). – 2005. – P. 1–15.*
22. *Bessonnet G., Sequin P., Sardain P. A parametric optimization approach to walking pattern synthesis // Int. J. Robotics Res. – 2005. – 24, No. 7. – P. 523–536.*  
– <https://doi.org/10.1177/0278364905055377>.
23. *Betts J. T. Practical methods for optimal control using nonlinear programming. – Philadelphia: SIAM, 2001. – 190 p.*
24. *Cabodevila G., Abba G. Quasi optimal gait for a biped robot using genetic algorithm // Proc. of IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics. Computational Cybernetics and Simulation (12–15 Oct. 1997, Orlando, USA). – 1997. – Vol. 4. – P. 3960–3965.* – <https://doi.org/10.1109/ICSMC.1997.633290>.
25. *Chevallereau C., Bessonnet G., Abba G., Aoustin Y. Bipedal robots: Modeling, design and building walking robots. – Wiley-ISTE: New York, 2013. – 328 p.*
26. *Collins S., Ruina A., Tedrake R., Wisse M. Efficient bipedal robots based on passive-dynamic walkers // Science. – 2005. – 307, No. 5712. – P. 1082–1085.*  
– <https://doi.org/10.1126/science.1107799>.
27. *Garcia M., Ruina A., Coleman M., Chatterjee A. Some results in passive-dynamic walking // Proc. European Mechanics Colloquium EuroMech 375: Biology and Technology of Walking. – 1998. – P. 268–275.*
28. *Gong D., Yan J., Zuo G. A review of gait optimization based on evolutionary computation // Appl. Comput. Intell. Soft Comput. – 2010. – 2010. Special Issue «Theory and Applications of Evolutionary Computation». – Article ID 413179, 12 p.*  
– <https://doi.org/10.1155/2010/413179>.
29. *Grizzle J. W., Chevallereau C., Sinnet R. W., Ames A. D. Models, feedback control, and open problems of 3D bipedal robotic walking // Automatica. – 2014. – 50,*

- No. 8. – P. 1955–1988. – <https://doi.org/10.1016/j.automat.2014.04.021>.
30. *Hardt M., von Stryk O.* Dynamic modeling in the simulation, optimization, and control of bipedal and quadrupedal robots // *Z. angew. Math. Mech.* – 2003. – **83**, No. 10. – P. 648–662. – <https://doi.org/10.1002/zamm.200310068>.
  31. *Hu L., Zhou C., Sun Z.* Biped gait optimization using spline function based probability model // *Proc. 2006 IEEE Conf. on Robotics and Automation (15–19 May 2006, Orlando, FL, USA)*. – 2006. – P. 830–835. – <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2006.1641812>.
  32. *Huzaiifa U., Maguire C., LaViers A.* Toward an expressive bipedal robot: Variable gait synthesis and validation in a planar model // *Int. J. Social Robotics.* – 2020. – **12**, No. 1. – P. 129–141. – <https://doi.org/10.1007/s12369-019-00547-6>.
  33. *Kajita S., Kanehiro F., Kaneko K., Fujiwara K., Harada K., Yokoi K., Hirukawa H.* Biped walking pattern generation by using preview control of zero-moment point // *Proc. 2003 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (14–19 September 2003, Taipei, Taiwan)*. – 2003. – Vol. 2. – P. 1620–1626. – <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2003.1241826>.
  34. *Lim I.-S., Kwon O., Park J. H.* Gait optimization of biped robots based on human motion analysis // *Robotics & Autonomous Systems.* – 2014. – **62**, No. 2. – P. 229–240. – <https://doi.org/10.1016/j.robot.2013.08.014>.
  35. *Mummolo C., Mangialardi L., Kim J. H.* Concurrent contact planning and trajectory optimization in one step walking motion // *Proc. ASME 2015 Int. Design Engineering Technical Conf. & Computers and Information in Engineering Conf. (IDETC/CIE 2015)*. – Vol. 8: 27th Conf. on Mechanical Vibration and Noise (2–5 August, 2015, Boston, USA). – 2015. – Paper No: DETC2015-47745, 7 p. – <https://doi.org/10.1115/DETC2015-47745>.
  36. *Park J. H., Choi M.* Generation of an optimal gait trajectory for biped robots using a genetic algorithm // *JSME Int. J. Series C: Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing.* – 2004. – **47**, No. 2. – P. 715–721.
  37. *Rao R. V.* Jaya: a simple and new optimization algorithm for solving constrained and unconstrained optimization problems // *Int. J. Industr. Eng. Comput.* – 2016. – **7**, No. 1. – P. 19–34. – <https://doi.org/10.5267/j.ijiec.2015.8.004>.
  38. *Roberts D., Quacinella J., Kim J. H.* Energy expenditure of a biped walking robot: instantaneous and degree-of-freedom-based instrumentation with human gait implications // *Robotica.* – 2017. – **35**, No. 5. – P. 1054–1071. – <https://doi.org/10.1017/S0263574715000983>.
  39. *Saidouni T.* Numerical synthesis of three-dimensional gait cycles by dynamics optimization // *Robotica.* – 2011. – **29**, No. 3. – P. 445–459.
  40. *Saurel G., Carpentier J., Mansard N., Laumond J.-P.* A simulation framework for simultaneous design and control of passivity based walkers // *Proc. 2016 IEEE Int. Conf. on Simulation, Modeling and Programming for Autonomous Robots SIMPAR (13–16 December, 2016, San Francisco)*. – 2016. – P. 1–9. – <https://doi.org/10.1109/SIMPAR.2016.7862383>.
  41. *Seguin P., Bessonnet G.* Generating optimal walking cycles using spline-based state-parameterization // *Int. J. Humanoid Robotics.* – 2005. – **2**, No. 1. – P. 47–80. – <https://doi.org/10.1142/S0219843605000399>.
  42. *Tacué J., Rengifo C., Bravo D.* An experimental energy consumption comparison between trajectories generated by using the cart-table model and an optimization approach for the Bioloid robot // *Int. J. Adv. Robotics Syst.* – 2020. – **17**, No. 2. – P. 1–14. – <https://doi.org/10.1177/1729881420917808>.
  43. *Tlalolini D., Aoustin Y., Chevallereau C.* Design of a walking cyclic gait with single support phases and impacts for the locomotor system of a thirteen-link 3D biped using the parametric optimization // *Multibody Syst. Dyn.* – 2010. – **23**, No. 1. – P. 33–56. – <https://doi.org/10.1007/s11044-009-9175-1>.
  44. *Vukobratović M., Borovac B.* Zero-moment point – thirty five years of its life // *Int. J. Humanoid Robotics.* – 2004. – **1**, No. 1. – P. 157–173. – <https://doi.org/10.1142/S0219843604000083>.
  45. *Vukobratović M., Borovac B., Surla D., Stokić D.* Biped locomotion: Dynamics, stability, control and application. – Berlin: Springer-Verlag, 1990. – xiv+349 p.
  46. *Westervelt E. R., Grizzle J. W., Chevallereau C., Choi J. H., Morris B.* Feedback control of dynamic bipedal robot locomotion. – Boca Raton: CRC Press, 2007. – 528 p.
  47. *Winter D. A.* Biomechanics and motor control of human movement. – New York: John Wiley & Sons, 2009. – xiv+370 p.

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СТОП И ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ДВУНОГОГО ШАГАЮЩЕГО РОБОТА

Исследуется задача совокупной оптимизации линейных размеров стоп и законов движения двуногого шагающего робота. Робот моделируется плоской системой девяти твердых тел, ходьба рассматривается на интервале двойного шага, где учитываются основные ритмические, кинематические и динамические условия антропоморфного перемещения. На опорные реакции стоп накладываются двусторонние нестационарные ограничения, в качестве критерия оптимальности движения системы выбирается квадратичный (по управлениям) функционал. Предложен алгоритм построения субоптимального решения задачи, основанный на аппроксимации обобщенных координат робота кубическими сглаживающими сплайнами (с неизвестными параметрами) и использовании численных процедур нелинейного программирования.

**Ключевые слова:** ходьба двуногого робота, математическое моделирование, оптимальное управление, оптимизация размеров стоп, сплайн-аппроксимация, параметрическая оптимизация, нелинейное программирование.

## OPTIMIZATION OF THE FEET PARAMETERS AND MOTION LAWS OF THE BIPEDAL WALKING ROBOT

The problem of joint optimization of the feet linear dimensions and motion laws of the bipedal walking robot is investigated. The robot is modeled as a plane system of nine rigid bodies, the gait is considered on double stride period, where main rhythmic, kinematic and dynamic conditions of anthropomorphic displacement are taken into account. The bilateral nonstationary restrictions are imposed on the feet support reactions, the quadratic functional (in terms of control) is chosen as an optimality criterion of the system movement. The algorithm of construction of the suboptimal solution of the problem, based on approximation of the generalized coordinates of the robot by the cubic smoothing splines (with unknown parameters) and the using of the numerical procedures of nonlinear programming is proposed.

**Key words:** bipedal robot gait, mathematical modeling, optimal control, optimization feet sizes, spline approximation, parametric optimization, nonlinear programming.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
10.08.19