УДК 530.12 : 531.51

Ю. Б. Ключковский

ПРИБЛИЖЕННАЯ ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТЬ И ППН-ФОРМАЛИЗМ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Как известно, экспериментальная проверка общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна как теории гравитации практически исчерпывается четырьмя классическими эффектами [3, 8, 17]. Малость этих эффектов и достижимая в настоящее время точность их измерения позволяет ограничиться при их описании первым пост-ньютоновским (ПН) приближением теории, учитывающим члены порядка не выше c^{-2}; c — скорость света. Это обстоятельство наряду с некоторыми принципиальными трудностями ОТО [4, 11] стимулирует появление ряда альтернативных теорий гравитации, претендующих как на преодоление этих трудностей, так и на объяснение экспериментально наблюдаемых эффектов. Большое разнообразие предлагаемых теорий вызывает необходимость их анализа и систематизации [5, 14].

Параметризованный пост-ньютоновский (ППН) формализм, разработанный в последнее десятилетие [8, 13, 15, 18], служит «каталогом», классифицирующим возможные теории гравитации в первом ПН-приближении. Он основан на постулировании ПН-метрики, содержащей некоторый набор параметров. В случае системы N точечных бесспиновых частиц с массами m_a ($a = 1, \ldots, N$) ППН-метрика имеет вид (примем гравитационную постоянную $G = 1$)

$$g_{00}(\mathbf{x}) = 1 - 2\sum_{b=1}^{N} \frac{m_b}{c^2 r_b} + 2\beta\left(\sum_b \frac{m_b}{c^2 r_b}\right)^2 + (2\gamma + 1 + \alpha_3 + \zeta_1)\sum_b \frac{m_b v_b^2}{c^4 r_b} -$$

$$- 2(1 - 2\beta + \zeta_2)\sum_{b\neq c}\sum \frac{m_b m_c}{c^4 r_b r_{bc}} + \zeta_1 \sum_b \frac{m_b}{c^4 r_b^3}(\mathbf{r}_b \cdot \mathbf{v}_b), \tag{1}$$

$$g_{0i}(\mathbf{x}) = (4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1)\sum \frac{m_b v_{bi}}{2c^3 r_b} +$$

$$+ (1 + \alpha_2 - \zeta_1)\sum_b \frac{m_b r_{bi}}{2c^3 r_b^3}(\mathbf{r}_b \cdot \mathbf{v}_b), \tag{2}$$

$$g_{ij}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{c^2}\left(1 + 2\gamma\sum_b \frac{m_b}{c^2 r_b}\right)\delta_{ij}. \tag{3}$$

Здесь $r_b = |\mathbf{r}_b| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_b|$; $\mathbf{r}_{bc} = \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_c$; $\mathbf{x}_b$ — радиус-вектор b-й частицы; $\mathbf{v}_b$ — ее скорость; β, γ, α_1, α_2, α_3, ζ_1, ζ_2 — семь параметров *, численные значения которых подлежат определенным ограничениям, следующим из требования согласованности с экспериментальными данными и некоторых теоретических соображений.

Исходя из метрики (1) — (3), нетрудно найти лагранжиан одной («пробной») частицы в поле остальных (такое рассмотрение одной из частиц системы эквивалентно исключению ее самодействия):

$$L_a = -m_a c\,\frac{ds_a}{dt} = -m_a c^2\left[g_{00}(\mathbf{x}_a) + 2g_{0i}(\mathbf{x}_a)\frac{v_a^i}{c} + g_{ij}(\mathbf{x}_a)\frac{v_a^i v_a^j}{c^2}\right]^{1/2}, \tag{4}$$

где ds_a — элемент длины мировой линии частицы. Подставляя в равенство (4) выражения (1) — (3) и ограничиваясь ПН-приближением, имеем (штрих у знака суммы означает, что пропускается значение $b = a$)

$$L_a = L_a^l - \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{r_{ab}} - U_a^{(1)}. \tag{5}$$

* Мы используем ППН-параметры, введенные в работе [18]. О других возможных выборах параметров и связи между ними см. работу [8].

Здесь L_a^f — свободночастичный лагранжиан, а ПН-поправка $U_a^{(1)}$ к лагранжиану взаимодействия имеет вид (здесь $v_{ab} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b$)

$$U_a^{(1)} = (2\beta - 1)\sum_b{}' \sum_c{}' \frac{m_a m_b m_c}{2c^2 r_{ab} r_{ac}} + (2\beta - 1 - \zeta_2)\sum{}'\sum_{b \neq c} \frac{m_a m_b m_c}{c^2 r_{ab} r_{bc}} -$$
$$-(2\gamma + 1)\sum_b{}' \frac{m_a m_b}{2c^2 r_{ab}} v_{ab}^2 + (1 + \alpha_1 - \alpha_2)\sum_b{}' \frac{m_a m_b}{2c^2 r_{ab}} (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b) +$$
$$+ (1 + \alpha_2)\sum_b{}' \frac{m_a m_b}{2c^2 r_{ab}^3} (\mathbf{r}_{ab} \cdot \mathbf{v}_a)(\mathbf{r}_{ab} \cdot \mathbf{v}_b) - \alpha_3 \sum{}' \frac{m_a m_b}{2c^2 r_{ab}} v_b^2 +$$
$$+ \zeta_1 \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{2c^2 r_{ab}} \left\{ \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{v}_b - \frac{1}{r_{ab}^2} (\mathbf{r}_{ab} \cdot \mathbf{v}_{ab})(\mathbf{r}_{ab} \cdot \mathbf{v}_b) \right\}. \qquad (6)$$

Лагранжианы типа (5) — (6), в которых фигурируют только переменные частиц и отсутствуют полевые величины, характерны для классической релятивистской теории прямых взаимодействий, основанной на требовании глобальной, а не только локальной или асимптотической пуанкаре-инвариантности [1, 2, 6]. В первом квазирелятивистском приближении этой теории, соответствующем ПН-приближению теории гравитации, лагранжиан прямого взаимодействия частиц $U^{(1)}$ должен удовлетворять, наряду с естественными требованиями трансляционной и вращательной инвариантности, системе уравнений, выражающей условие приближенной лоренц-инвариантности [6]:

$$\sum_a \frac{\partial U^{(1)}}{\partial v_a^i} = \frac{1}{c^2} \sum_a x_{ai} v_a^j \frac{\partial U^{(0)}}{\partial x_a^j} - \frac{d\Psi_i^{(1)}}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad (7)$$

где функции $\Psi_i^{(1)}$ ограничены некоторыми условиями [1, 2]. Отметим, что известный лагранжиан теории Эйнштейна — Инфельда — Гофмана, соответствующий ПН-приближению ОТО (см., например, [7]), удовлетворяет системе (7) [2]. Этот факт усиливает интерес к установлению связи ППН-формализма и квазирелятивистской теории прямых взаимодействий.

Прямой подстановкой можно убедиться, что выражение (6) для ППН-поправки к лагранжиану взаимодействия удовлетворяет системе (7), если только

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \qquad (8)$$

При этом

$$\Psi_{ai}^{(1)} = \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{2c^2 r_{ab}} (x_{ai} + x_{bi} + \zeta_1 r_{abi}). \qquad (9)$$

Ранее было показано [15], что условие (8) следует из требования асимптотической лоренц-инвариантности метрики системы. Полученный здесь результат более сильный: при выполнении условия (8) ППН-теория является приближенно лоренц-инвариантной глобально (т. е. и в области взаимодействия).

Записанные выше лагранжианы L_a отдельных частиц системы не позволяют применить теорему Нетер [9] для нахождения интегралов движения системы частиц; для этого необходимо иметь единый лагранжиан L всей системы. Эффективных методов построения такого лагранжиана, исходя из функции Лагранжа для одной частицы в поле остальных, не существует. Единственной основой является естественное требование, чтобы из L следовали те же уравнения движения a-й частицы, что и из L_a (см. [7]), а также очевидное условие симметрии L относительно индексов частиц. Оказывается, что построить единый лагранжиан системы, исходя из выражений (5) — (6), можно только в случае

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \alpha_3 = 0. \qquad (10)$$

При этом

$$L = \sum_a L_a^f - \frac{1}{2}\sum_a \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{r_{ab}} - U^{(1)}, \tag{11}$$

где

$$U^{(1)} = (1-2\beta)\sum_a \sum_b{}' \sum_c{}' \frac{m_a m_b m_c}{6c^2 r_{ab} r_{ac}} + (2\gamma+1)\sum_a \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{4c^2 r_{ab}} v_{ab}^2 +$$
$$+ (1+\alpha_2)\sum_a \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{4c^2 r_{ab}^3}(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_a)(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_b) -$$
$$-(1+\alpha_1-\alpha_2)\sum_a \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{4c^2 r_{ab}}(\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{v}_b). \tag{12}$$

Таким образом, при выполнении условия (10) применима теорема Нетер, и вследствие очевидной инвариантности выражений (11), (12) относительно четырех трансляций и трех вращений система, описываемая такой функцией Лагранжа, обладает законами сохранения энергии E, импульса $\mathbf{P}$ и момента импульса $\mathbf{J}$, где

$$E \equiv \sum_a \mathbf{v}_a \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} - L = \sum_a m_a\left(c^2 + \frac{v_a^2}{2} + \frac{3v_a^4}{8c^2}\right) + \sum_a \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{2r_{ab}} -$$
$$-(2\gamma+1)\sum_a \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{4c^2 r_{ab}} v_{ab}^2 + (1+\alpha_1-\alpha_2)\sum_a \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{4c^2 r_{ab}}(\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{v}_b) -$$
$$-(1+\alpha_2)\sum_a \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{4c^2 r_{ab}^3}(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_a)(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_b) + (1-2\beta)\sum_a \sum_b{}' \sum_c{}' \frac{m_a m_b m_c}{6c^2 r_{ab} r_{ac}};$$

$$\mathbf{P} \equiv \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a\left(1 + \frac{v_a^2}{2c^2}\right) + (1+\alpha_1-\alpha_2)\sum_a \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{4c^2 r_{ab}}(\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b) -$$
$$-(1+\alpha_2)\sum_a \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{4c^2 r_{ab}}(\mathbf{r}_{ab}\cdot(\mathbf{v}_a+\mathbf{v}_b))\,\mathbf{r}_{ab};$$

$$\mathbf{J} \equiv \sum_a \left[\mathbf{x}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}\right] = \sum_a m_a[\mathbf{x}_a \times \mathbf{v}_a]\left(1 + \frac{v_a^2}{2c^2}\right) -$$
$$-(2\gamma+1)\sum_a \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{2c^2 r_{ab}}[\mathbf{r}_{ab} \times \mathbf{v}_{ab}] +$$
$$+(1+\alpha_2)\sum_a \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{4c^2 r_{ab}}(\mathbf{r}_{ab}\cdot(\mathbf{v}_a+\mathbf{v}_b))[\mathbf{x}_a \times \mathbf{x}_b] +$$
$$+(1+\alpha_1-\alpha_2)\sum_a \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{4c^2 r_{ab}}([\mathbf{x}_a \times \mathbf{v}_b] + [\mathbf{x}_b \times \mathbf{v}_a]).$$

Если наряду с условием (10) принять условие (8), то полученный из выражения (12) лагранжиан взаимодействия $U^{(1)}$ удовлетворяет условиям (7) приближенной лоренц-инвариантности. Отсюда следует существование интеграла движения центра инерции (см. [6]):

$$\mathbf{K} = -t\mathbf{P} + \sum_a m_a \mathbf{x}_a\left(1 + \frac{v_a^2}{2c^2}\right) + \sum_a \sum_b{}' \frac{m_a m_b}{4c^2 r_{ab}}(\mathbf{x}_a + \mathbf{x}_b).$$

Эти результаты согласуются с выводами работы [15]. Следует отметить, что они получены в отличие от работы [15] стандартным путем — с применением теоремы Нетер.

В работах, посвященных ППН-формализму, указывалось, что «жизнеспособными» (с точки зрения согласованности с экспериментальными данными и теоретическими ограничениями) являются ПН-теории гравитации, удовлетворяющие условиям (8), (10). Эти условия получены здесь как следствия требований приближенной лоренц-инвариантности описания системы частиц и существования единого лагранжиана системы. Поэтому можно утверждать, что «жизнеспособные» теории гравитационных взаимодействий частиц по крайней мере в первом ПН-приближении укладываются в рамки лагранжевой формулировки классической теории прямых межчастичных взаимодействий в плоском пространстве — времени. Отметим, что такая согласованность не ограничивается первым приближением. Полученные в некоторых работах гравитационные лагранжианы системы частиц во втором ПН-приближении также не противоречат пуанкаре-инвариантной теории прямых взаимодействий (см. [2]). В рамках ОТО существует метод последовательных приближений (по константе взаимодействия), позволяющий получить в каждом приближении строго лоренц-инвариантные уравнения движения частиц [10]. Учитывая указанные факты, можно сделать вывод, что дальнейшие поиски удовлетворительной лоренц-инвариантной теории гравитационных взаимодействий представляют значительный интерес. В связи с этим более тщательного исследования заслуживает неописываемая ППН-формализмом теория гравитации Уайтхеда (см. работы [12, 14, 16]), несмотря на полученный в работе [16] вывод о ее несогласованности с некоторыми астрономическими наблюдениями. Соотношение теории Уайтхеда и лагранжевой формулировки теории прямых взаимодействий будет предметом дальнейших исследований.

1. *Гайда Р. П., Ключковский Ю. Б., Третяк В. И.* Лагранжева классическая релятивистская механика системы прямо взаимодействующих частиц. I.— Теор. мат. физ., 1980, **44**, № 2, с. 194—208.
2. *Гайда Р. П., Ключковский Ю. Б., Третяк В. И.* Лагранжева классическая релятивистская механика системы прямо взаимодействующих частиц. II.— Теор. мат. физ., 1980, **45**, № 2, с. 180—198.
3. *Гинзбург В. Л.* Об экспериментальной проверке общей теории относительности.— Успехи физ. наук, 1979, **128**, № 3, с. 435—458.
4. *Денисов В. И., Логунов А. А.* Существует ли в общей теории относительности гравитационное излучение? — Теор. мат. физ., 1980, **43**, № 2, с. 187—201.
5. *Иваненко Д. Д.* Каталоги теории гравитации.— В кн.: Тредер Г. Теория гравитации и принцип эквивалентности. М. : Атомиздат, 1973, с. 150—167.
6. *Ключковский Ю. Б., Гайда Р. П.* Лагранжева формулировка релятивистской проблемы N тел с классической теории мгновенного дальнодействия.— Укр. физ. журн., 1977, **22**, № 4, с. 617—625.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля.— М. : Наука, 1973.— 504 с.
8. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. В 3-х т.— М. : Мир, 1974.— Т. 3. 510 с.
9. *Шмутцер Э.* Симметрии и законы сохранения в физике.— М. : Мир, 1974.— 159 с.
10. *Havas P.* Equations of motion and radiation reaction in the special and general theory of relativity.— In: Isolated gravitating systems in general relativity.— Bologna : Soc. Italiana di Fisica, 1979, p. 74—155.
11. *Møller C.* On the crisis in the theory of gravitation and a possible solution.— Det kgl. Dan. vid. selskab. Mat.-fys. medd., 1978, 39, N 13,.— 31 p.
12. *Synge J. L.* Orbits and rays in the gravitational field of a finite sphere according to the theory of A. N. Whitehead.— Proc. Roy. Soc. London A, 1952, **211**, N 1106, p. 303—319.
13. *Thorne K. S., Will C. M.* Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. I. Foundations.— Astrophys. J., 1971, **163**, N 3, p. 595—610.
14. *Whitrow G. J., Morduch G. E.* Relativistic theories of gravitation.— In: Vistas in astronomy. V. 6.— London : Pergamon Press, 1965, p. 1—67.
15. *Will C. M.* Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. III. Conservation laws, Lorentz-invariance, and values of the PPN parameters.— Astrophys. J., 1971, **169**, N 1, p. 125—140.
16. *Will C. M.* Relativistic gravity in solar system. II. Anisotropy in the Newtonian gravitation constant.— Astrophys. J., 1971, **169**, N 1, p. 141—155.
17. *Will C. M.* Experimental tests of general relativity.— Proc. Roy. Soc. London A, 1979, **368**, N 1732, p. 5—8.
18. *Will C. M., Nordtvedt K.* Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity. I. Preferred-flame theories and extended PPN formalism.— Astrophys. J., 1972, **177**, N 3, p. 757—774.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
22.09.80