

7. Вукобратович М. Шагающие роботы и антропоморфные механизмы.— М. : Мир, 1976.— 540. с.
8. Карпинский Ф. Г. Модель двуногого шагающего аппарата (описание и управление движением.— Киев, 1978.— 56 с. (Препринт/ Ин-т математики АН УССР, № 23).
9. Ларин В. Б. Стабилизация двуногого шагающего аппарата.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1976, № 5, с. 4—13.
10. Ларин В. Б. О непрерывном и импульсном управлении горизонтальным движением двуногого шагающего аппарата.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1977, № 6, с. 54—64.
11. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— 3-е изд.— М. : Наука, 1976.— 392 с.
12. Чудинов П. С. Одна задача стабилизации двуногой ходьбы. М., 1977.— 42 с.— (Препринт / Ин-т прикл. математики АН СССР, № 93).
13. Chow C. K., Jacobson D. H. Further studies of human locomotion: postural stability and control.— Math. Biosci., 1972, 15, p. 93—108.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
25.10.79

УДК 517.944 : 536.13

О. В. Побережный

ТЕПЛОВЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ДЛЯ ПОЛОСЫ И СЛОЯ

В настоящее время достаточно хорошо разработаны теории ньютоновских [7, 8], тепловых [2, 6], аналогов логарифмических [5] потенциалов простого и двойного слоев. Как известно, все эти потенциалы определены в бесконечных областях. В данной работе получены потенциалы для областей типа полосы и слоя, исследованы их свойства и приведены предельные значения потенциалов и их нормальных производных.

Пусть в двумерной области G ($0 \leq z \leq h$, $|x| < \infty$) задана гладкая кривая L , не выходящая на границы $z=0$ и $z=h$ области G . Считаем L линией Ляпунова [7]. Рассмотрим в области G функции

$$\Phi_v = (x, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_L \frac{\varphi(\sigma, \tau)}{t-\tau} R_v(r_{mk}, t-\tau) d\sigma d\tau, \quad (1)$$

$$\Psi_v(x, z, t) = \frac{1}{8\pi c} \int_0^t \int_L \frac{\psi(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} R_v^1(r_{mk}, t-\tau) d\sigma d\tau, \quad (2)$$

где σ — элемент дуги кривой L ; $m = 1, 2$; $-\infty < k < \infty$;

$$R_v(r_{mk}, t-\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_1(v, k) [R(r_{1k}, t-\tau) + E_2(v) R(r_{2k}, t-\tau)];$$

$$R_v^1(r_{mk}, t-\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_1(v, k) [R(r_{1k}, t-\tau) r_{1k} \cos(\widehat{r_{1k}}, n) + E_2(v) R(r_{2k}, t-\tau) r_{2k} \cos(\widehat{r_{2k}}, n)];$$

$$E_1(v, k) = (-1)^{(v-1)(v-2)} \frac{v}{6} k; \quad E_2(v) = (-1)^{(v-2)(v-3)} \frac{v}{2};$$

$$r_{1k}^2 = (x - \xi)^2 + (z - \zeta + 2kh)^2; \quad r_{2k}^2 = (x - \xi)^2 + (z + \zeta - 2kh)^2;$$

$$R(r_{mk}, t-\tau) = \exp \left[-\frac{r_{mk}^2}{4c(t-\tau)} - \kappa^2 c (t-\tau) \right];$$

$M(x, z)$ — произвольная точка области G ; $N(\xi, \zeta) \in L$; n — внутренняя нормаль к контуру L ; n' — зеркальное отображение нормали относительно оси $z=0$ или $z=h$.

Теорема 1. Функции U_ν ($\Phi_\nu(x, z, t)$, $\Psi_\nu(x, z, t)$) удовлетворяют уравнениям

$$D\Phi_\nu = \varphi \delta(L), \quad D\Psi_\nu = \psi \frac{\partial}{\partial n} \delta(L), \quad (3)$$

одному из граничных условий

$$\nu = 1, \quad U_1|_{z=0} = U_1|_{z=h} = 0, \quad (4)$$

$$\nu = 2, \quad \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad (5)$$

$$\nu = 3, \quad \frac{\partial U_3}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad U_3|_{z=h} = 0, \quad (6)$$

начальному условию

$$U_\nu|_{t=0} = 0, \quad (7)$$

и исчезают на бесконечности

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} U_\nu(x, z, t) = 0, \quad (8)$$

где $\delta(L)$ — функция Дирака; оператор D имеет вид

$$DU_\nu = \frac{\partial^2 U_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_\nu}{\partial z^2} - \kappa^2 U_\nu - \frac{1}{c} \frac{\partial U_\nu}{\partial t}. \quad (9)$$

Доказательство. Первые три утверждения теоремы легко доказываются проверкой. Исследуем поведение функций на бесконечности. Действительно, если контур L ограниченный и $t - \tau \geq 0$, то при больших значениях x справедливы неравенства

$$R(r_{1k}, t - \tau) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right) \exp\left[-\frac{(z - \xi + 2kh)^2}{4c(t - \tau)} - \kappa^2 c(t - \tau)\right],$$

$$R(r_{2k}, t - \tau) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right) \exp\left[-\frac{(z + \xi - 2kh)^2}{4c(t - \tau)} - \kappa^2 c(t - \tau)\right].$$

Наличие этих неравенств дает возможность доказать, что Φ_ν и Ψ_ν убывают при $|x| \rightarrow \infty$ по крайней мере, как $\exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right)$ и $x \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right)$ соответственно.

Теорема 2. Функции $\Phi_\nu(x, z, t)$ и $\Psi_\nu(x, z, t)$ обладают свойствами потенциалов соответственно простого и двойного слоев. Для предельных значений функций и их нормальных производных выполняются формулы

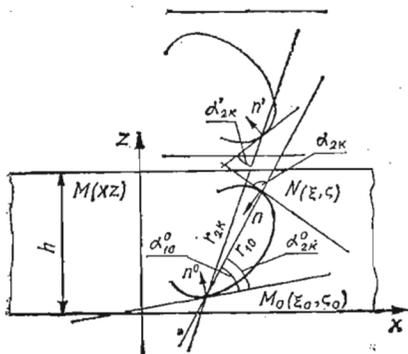
$$\Phi_\nu^\pm = \frac{1}{4\pi c} \int_L \int_0^t \frac{\varphi(\sigma, \tau)}{t - \tau} R_\nu(r_{mk}^0, t - \tau) d\sigma d\tau, \quad (10)$$

$$\Psi_\nu^\pm = \pm \frac{1}{2} \psi(\sigma_0, t) + \frac{1}{8\pi c} \int_L \int_0^t \frac{\psi(\sigma, \tau)}{(t - \tau)^2} R_\nu^1(r_{mk}^0, t - \tau) d\sigma d\tau, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Phi_\nu^\pm}{\partial n^0} = \mp \frac{1}{2} \varphi(\sigma, \tau) + \frac{1}{8\pi c} \int_L \int_0^t \frac{\varphi(\sigma, \tau)}{(t - \tau)^2} R_\nu^2(r_{mk}^0, t - \tau) d\sigma d\tau, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Psi_\nu^\pm}{\partial n^0} = -\frac{1}{8\pi c} \int_0^t \varphi(\sigma, \tau) I_\nu^1(r_{mk}^0, t - \tau) \frac{d\tau}{(t - \tau)^2} \Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2} +$$

$$+ \frac{1}{8\pi c} \int_L \int_0^t \left[\frac{\partial \varphi(\sigma, \tau)}{\partial \sigma} I_\nu^1(r_{mk}^0, t - \tau) - \varphi(\sigma, \tau) I_\nu^2(r_{mk}^0, t - \tau) \right] \frac{d\sigma d\tau}{(t - \tau)^2}, \quad (13)$$



где

$$R_v^1(r_{mk}, t - \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_1(v, k) \times \\ \times [R(r_{1k}^0, t - \tau) r_{1k}^0 \sin \alpha_{1k} + \\ + E_2(v) R(r_{2k}^{0k}, t - \tau) r_{2k}^0 \sin \alpha_{2k}]; \\ R_v^2(r_{mk}^0, t - \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_1(v, k) \times \\ \times [R(r_{1k}^0, t - \tau) r_{1k}^0 \sin \alpha_{1k} + \\ + E_2(v) R(r_{2k}^{0k}, t - \tau) r_{2k}^0 \sin \alpha_{2k}];$$

$$I_v^1(r_{mk}^0, t - \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_1(v, k) [R(r_{1k}^0, t - \tau) r_{1k}^0 \cos \alpha_{1k} + \\ + E_2(v) R(r_{2k}^0, t - \tau) r_{2k}^0 \cos \alpha_{2k}];$$

$$I_v^2(r_{mk}^0, t - \tau) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_1(v, k) \left\{ \left[\frac{(r_{1k}^0)^2}{4c(t - \tau)} - 1 \right] R(r_{1k}^0, t - \tau) \times \right. \\ \left. \times \cos(\alpha_{1k} + \alpha_{1k}^0) + E_2(v) \left[\frac{(r_{2k}^0)^2}{4c(t - \tau)} - 1 \right] R(r_{2k}^0, t - \tau) \cos(\alpha_{2k} + \alpha_{2k}^0) \right\};$$

$$r_{1k}^0 = \sqrt{(\xi_0 - \xi)^2 + (\zeta_0 - \zeta + 2kh)^2}; \quad r_{2k}^0 = \sqrt{(\xi_0 - \xi)^2 + (\zeta_0 + \zeta - 2kh)^2};$$

$N(\xi, \zeta)$ и $M_0(\xi_0, \zeta_0) \in L$; σ_1, σ_2 — дуговые координаты начала и конца контура L . Остальные обозначения показаны на рисунке.

Доказательство. Функции $R_v(r_{mk}, t - \tau)$ и $R_v^1(r_{mk}, t - \tau)$ запишем в виде

$$R_v(r_{mk}, t - \tau) = R(r_{10}, t - \tau) + \bar{R}_v(r_{mk}, t - \tau), \quad (14)$$

$$R_v^1(r_{mk}, t - \tau) = R(r_{10}, t - \tau) r_{10} \cos(r_{10}, \widehat{n}) + \bar{R}_v^1(r_{mk}, t - \tau).$$

Подставляя выражения (14) в (1), (2), получаем

$$\Phi_v(x, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_L \int_0^t \frac{\varphi(\sigma, \tau)}{t - \tau} R(r_{10}, t - \tau) d\sigma d\tau + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_L \int_0^t \frac{\varphi(\sigma, \tau)}{t - \tau} \bar{R}_v(r_{mk}, t - \tau) d\sigma d\tau, \quad (15)$$

$$\Psi_v(x, z, t) = \frac{1}{8\pi c} \int_L \int_0^t \frac{\psi(\sigma, \tau)}{(t - \tau)^2} R(r_{10}, t - \tau) r_{10} \cos(r_{10}, \widehat{n}) d\sigma d\tau + \\ + \frac{1}{8\pi c} \int_L \int_0^t \frac{\psi(\sigma, \tau)}{(t - \tau)^2} \bar{R}_v^1(r_{mk}, t - \tau) d\sigma d\tau.$$

Первые слагаемые в формулах (15) представляют соответственно потенциалы простого и двойного слоев в бесконечной области. В силу непрерывности функций \bar{R}_v и \bar{R}_v^1 в области G имеем $\lim_{M \rightarrow M_0} R_v(r_{mk}, t - \tau) = \bar{R}_v(r_{mk}^0, t - \tau)$, $\lim_{M \rightarrow M_0} \bar{R}_v^1(r_{mk}, t - \tau) = \bar{R}_v^1(r_{mk}^0, t - \tau)$, т. е. предельные значения функций \bar{R}_v и \bar{R}_v^1 равны их прямым значениям. При непрерывных плотностях $\varphi(\sigma, \tau)$ и $\psi(\sigma, \tau)$ интегралы, представленные другими

слагаемыми в соотношениях (15), будут непрерывными функциями своих аргументов.

Учитывая изложенное и используя известную методику [2, 5—8] исследования предельных значений потенциалов и их производных, из формул (15) приходим к формулам (10) — (13):

Пусть в трехмерной области G ($0 \leq z \leq h$, $|x| < \infty$, $|y| < \infty$) задана гладкая в смысле Ляпунова [7] поверхность S , не выходящая на границы $z = 0$, $z = h$ области G . Рассмотрим определенные в области G функции

$$W_v(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi \sqrt{\pi c}} \int_S \int_0^t \frac{\omega(s, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} R_v(r_{mk}, t-\tau) dsd\tau, \quad (16)$$

$$\Omega_v(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi \sqrt{\pi c}} \int_S \int_0^t \frac{\omega(s, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} R_v^1(r_{mk}, t-\tau) dsd\tau, \quad (17)$$

где

$$R_v(r_{mk}, t-\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_1(v, k) [R(r_{1k}, t-\tau) + E_2(v) R(r_{2k}, t-\tau)];$$

$$R_v^1(r_{mk}, t-\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_1(v, k) \left[\frac{\partial R(r_{1k}, t-\tau)}{\partial n} + E_2(v) \frac{\partial R(r_{2k}, t-\tau)}{\partial n'} \right];$$

$$R(r_{mk}, t-\tau) = \exp\left(-\frac{r_{mk}^2}{4c(t-\tau)}\right); \quad r_{1k}^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 +$$

$$+ (z-\zeta + 2kh)^2; \quad r_{2k}^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta - 2kh)^2;$$

$M(x, y, z)$ — произвольная точка области G ; $N(\xi, \eta, \zeta) \in S$; n — внутренняя нормаль к поверхности S ; n' — зеркальное отображение нормали n относительно плоскости $z = 0$ или $z = h$.

Для трехмерной области G справедливы теоремы.

Теорема 3. Функции $U_v \{W_v(x, y, z, t), \Omega_v(x, y, z, t)\}$ удовлетворяют уравнениям

$$DW_v = \omega \delta(S), \quad D\Omega_v = \omega \frac{\partial}{\partial n} \delta(S), \quad (18)$$

одному из граничных условий (4) — (6), начальному условию (7) и исчезают на бесконечности: $\lim_{|x|, |y| \rightarrow \infty} U_v(x, y, z, t) = 0$. Оператор D в этом случае имеет

вид

$$DU_v = \frac{\partial^2 U_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_v}{\partial z^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial U_v}{\partial t}. \quad (19)$$

Теорема 4. Функции $W_v(x, y, z, t)$, $\Omega_v(x, y, z, t)$ имеют соответственно свойства потенциалов простого и двойного слоев, предельные значения функций и их нормальных производных определяются так:

$$W_v^\pm = \frac{1}{8\pi \sqrt{\pi c}} \int_S \int_0^t \frac{\omega(s, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} R_v(r_{mk}^0, t-\tau) dsd\tau, \quad (20)$$

$$\Omega_v^\pm = \pm \frac{1}{2} \omega(s_0, t) + \frac{1}{8\pi \sqrt{\pi c}} \int_S \int_0^t \frac{\omega(s, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} R_v^1(r_{mk}^0, t-\tau) dsd\tau, \quad (21)$$

$$\frac{\partial W_v^\pm}{\partial n^0} = \mp \frac{1}{2} \omega(s_0, t) + \frac{1}{8\pi \sqrt{\pi c}} \int_S \int_0^t \frac{\omega(s, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} R_v^2(r_{mk}^0, t-\tau) dsd\tau, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \Omega_v^\pm}{\partial n^0} = \frac{1}{8\pi \sqrt{\pi c}} \int_S \int_0^t \frac{\omega(s, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} I_v(r_{mk}^0, t-\tau) dsd\tau. \quad (23)$$

В соотношениях (22), (23) введены обозначения

$$R_v^0(r_{mk}^0, t - \tau) = \frac{\partial R_v(r_{mk}^0, t - \tau)}{\partial n^0}, \quad I_v(r_{mk}^0, t - \tau) = \frac{\partial R_v^1(r_{mk}^0, t - \tau)}{\partial n^0},$$

$$r_{1k}^0 = \sqrt{(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta_0 - \eta)^2 + (\zeta_0 - \zeta + 2kh)^2},$$

$$r_{2k}^0 = \sqrt{(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta_0 - \eta)^2 + (\zeta_0 + \zeta - 2kh)^2},$$

$M_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ и $N(\xi, \eta, \zeta)$ — точки поверхности S .

Доказательства теорем 3, 4 аналогичны доказательствам теорем 1, 2.

Функции Φ_v, Ψ_v (и соответственно W_v, Ω_v) будем называть тепловыми потенциалами простого и двойного слоев в области G с оператором D . Как частные случаи, из Φ_v и Ψ_v получаем тепловые [2, 6] логарифмические потенциалы [7, 8] и их аналоги [5], а из W_v и Ω_v — трехмерные тепловые [2, 6], ньютоновские [7, 8] потенциалы простого и двойного слоев.

Метод построения и исследования потенциалов для областей типа полосы и слоя может быть использован при построении и исследовании потенциалов в более сложных областях с произвольным оператором, для которого можно построить фундаментальное решение. Некоторые из таких фундаментальных решений известны [1, 3, 4] или легко находятся для тел, имеющих форму параллелограмма, параллелепипеда, клина.

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. — М.: Мир, 1964. — 517 с.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1967. — 436 с.
3. Карслоу П., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964. — 487 с.
4. Новацкий В. Вопросы термоупругости. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 363 с.
5. Побережный О. В., Кит Г. С. — Об определении температурного поля в пластинке с шайбой при неидеальном тепловом контакте между ними. — Инж.-физ. журн., 1968, 15, № 4, с. 703—709.
6. Положий Г. Н. Уравнения математической физики. — М.: Вышш. школа, 1964. — 559 с.
7. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. — М.: Гостехтеориздат, 1954. — 44 с.
8. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1946. — 324 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
17.12.80

УДК 539.385

В. Ф. Емец, А. П. Поддубняк

К ЗАДАЧЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО КРУЧЕНИЯ УПРУГОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЛОСКОЙ КРУГЛОЙ ЩЕЛЬЮ

Кручение упругого однородного или двухслойного полупространства с плоской щелью или жестким включением рассматривалось в работах [5, 6, 10, 11] для случая относительно глубокого размещения дефектов. В данной работе исследуется кручение двухслойной полубесконечной среды, содержащей в плоскости сопряжения материалов дискообразную щель, в предположении слоя произвольной толщины.

Рассмотрим упругую систему, состоящую из слоя $-h < z < 0$ и полупространства $z > 0$, ослабленную в плоскости $z = 0$ щелью радиуса a . Пусть имеем тело скручивания осесимметричными касательными напряжениями, приложенными к поверхности $z = -h$. Для определения смещений и напряжений в среде, и в частности коэффициента интенсивности касательных напряжений в конце щели, следует решить уравнения осесимметричного кручения [2] при следующих условиях:

$$u_{\theta}^j \rightarrow 0 \quad (\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2), \quad \tau_{\theta z}^j = 0 \quad (0 \leq r < a, \quad z = 0, \quad j = 1, 2),$$

$$u_{\theta}^1 = u_{\theta}^2, \quad \tau_{\theta z}^1 = \tau_{\theta z}^2 \quad (r > a, \quad z = 0), \quad \tau_{\theta z}^2 = G_2 T(r/a) \quad (r \geq 0, \quad z = -h). \quad (1)$$