1. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн.— Киев : Наук. думка, 1978.— 308 с.
2. *Зозуляк Ю. Д., Вдович Е. А.* Оптимизация [illegible] падающей волны в системе акустическая среда — упругий слой.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 9, с. 96—99.
3. *Скучик Е.* Основы акустики.— М. : Мир, 1976.— Т. 1. 541 с.
4. *Эхо-сигналы* от упругих объектов / У. К. Нигул, Я. А. Метсавээр, Н. Д. Векслер, М. Э. Кутсер.— Таллин : Изд-во АН ЭССР, 1974.— Т. 1. [illegible] с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
05.12.80

УДК 530.12 : 531.18

Р. Я. Мацюк

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ РАВНОУСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Равноускоренное движение пробных частиц в специальной теории относительности интересно по двум причинам. Во-первых, существуют примеры такого движения в конкретных физических задачах [2], во-вторых, оно рассматривается в теории равноускоренных систем отсчета [5]. Определяющее уравнение мировой линии $\mathbf{r}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ равноускоренно движущейся частицы записано в работе [4] так:

$$\left[1 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right] \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} + 3\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = 0. \qquad (*)$$

С другой стороны, существует понятие геодезической окружности в (псевдо)-римановом пространстве V_k^n, которое изучается так называемой конциркулярной геометрией [1, 6]. Определяющее уравнение геодезической окружности $\mathrm{x}(\tau) = (x^1(\tau), \ldots, x^n(\tau))$, параметризованной параметром τ, не зависит от выбора параметра и имеет согласно работе [6] вид

$$\frac{D^3x^l}{ds^3} + g_{ij}\frac{D^2x^i}{ds^2}\frac{D^2x^j}{ds^2}\frac{Dx^l}{ds} = 0 \quad (l = 1, \ldots, n), \qquad (**)$$

где $ds = \sqrt{\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}g_{ij}}\,d\tau$ и действует правило суммирования в пределах от 1 до n. Если в качестве параметра τ выбрать время $t \equiv x^4$, положив $\frac{dx^4}{d\tau} = 1$, то уравнения (*) и (**) становятся алгебраически эквивалентными (в четырехмерном пространстве — времени). Таким образом, мировые линии равноускоренных частиц совпадают с геодезическими окружностями. Последние можно охарактеризовать еще и тем свойством, что вдоль них первая кривизна постоянна, а все остальные равны нулю. В настоящей работе получено уравнение (векторное) третьего порядка, решения которого суть параметризованные геодезические окружности в V_k^2 и которое обладает тем дополнительным свойством, что может рассматриваться как уравнение экстремалей вариационной задачи в параметрической форме с лагранжианом, включающим высшие производные. Это позволяет рассматривать двухмерную конциркулярную геометрию с точки зрения пространства Кавагучи, геодезические которого, как известно, являются экстремалями вариационного принципа с высшими производными. С другой стороны, открывается возможность построить механику Остроградского с высшими производными для равноускоренного движения в теории относительности.

В статье использованы матричные обозначения. Знаки «$\otimes$», «$\odot$» и «$\wedge$» обозначают соответственно тензорное, симметрическое и внешнее произведения. Запись $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ означает свертку матрицы $\mathbf{A}$ с матрицей $\mathbf{B}$ по всем парам соответствующих индексов, начиная справа. Для выполнения свертки необходимо, чтобы в каждой из упомянутых пар индексов один был верхним, а один нижним. Если заданы правила поднимания и опускания индексов, то операцию свертки можно применять к любой паре матриц. Например, если $\mathbf{A} = (A^{j}_{il})$, $\mathbf{B} = (B^{jl})$ и $\mathbf{b} = (b^{l})$, то $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^{j}_{il} B^{l}_{j})$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{b} = (B^{jl} b_l)$. В частности, определен скалярный квадрат и модуль любой матрицы. Знак «·» опускается, если свертка выполняется в первую очередь. Присутствие точки означает выполнение соответствующей свертки в последнюю очередь.

В двухмерном псевдоевклидовом пространстве E^2_k индекса k с матрицей метрического тензора $\mathbf{G}$ действует псевдоевклидова группа движений E (2; k). Кривизна параметрически заданной линии $\mathbf{x}$ (τ) в этом пространстве $K = \frac{|\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}|}{|\mathbf{p}|^3}$, где $\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$; $\mathbf{q} = \frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2}$ и в дальнейшем $\mathbf{r} = \frac{d^3\mathbf{x}}{d\tau^3}$. Поднимание и опускание индексов в матрицах (в том числе в столбцах и строках) производится с помощью метрики $\mathbf{G}$. Ниже $\mathbf{w} = \mathbf{w}$ ($\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$) обозначает строку (w_1, w_2), зависящую от переменных $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, и решения дифференциального уравнения третьего порядка $\mathbf{w} = 0$ рассматриваются как параметризованные кривые в E^2_k. Если $L = L$ ($\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$) — некоторый лагранжиан, то $\mathcal{E}L$ обозначает соответствующее выражение Эйлера — Пуассона. Геодезические в V^n_k — это решения уравнения

$$\mathcal{E}\,|\mathbf{p}|^2 \equiv \frac{D^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = 0.$$

Лемма [3]. Строка $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ является выражением Эйлера — Пуассона в том и только том случае, если найдутся зависящие от переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ матрица $\mathbf{B}$, кососимметрическая матрица $\mathbf{A}$ и строка $\mathbf{c}$ такие, что $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{r} + \mathbf{q}\partial_p \cdot \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{q} + \mathbf{c}$. Матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и строка $\mathbf{c}$ должны удовлетворять условиям, указанным в работе [3], из которых здесь будут использованы лишь следующие:

Л2. $2\mathit{Alt}\,\mathbf{B} - 3\mathbf{p}\partial_x \cdot \mathbf{A} = 0$,

Л3. $\mathbf{y}\partial_p \cdot \mathit{Sym}\,\mathbf{B} - \partial_p \odot \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{p}\partial_x \cdot \partial_p \odot \mathbf{A}\mathbf{y} = 0$.

Здесь $\mathbf{y}$ означает произвольный столбец и, как обычно,

$$\partial_x = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right), \quad \partial_p = \left(\frac{\partial}{\partial p^1}, \frac{\partial}{\partial p^2}\right).$$

Предложение 1. Уравнение третьего порядка $\mathbf{w}$ ($\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$) $= 0$ тогда и только тогда является

(i) E (2; k)-инвариантным,

(ii) уравнением Эйлера — Пуассона,

(iii) имеющим кривизну K первым интегралом,

(iv), которое удовлетворяется также на геодезических пространства E^2_k, когда

$$\mathbf{w} = \mathcal{E}\,(aK + b\,|\mathbf{p}|)$$

при некоторых действительных a и b, где $a \neq 0$.

Доказательство. Условие (ii) использует лемму. Условие (iv) устраняет оттуда строку $\mathbf{c}$. Обозначим $d_\tau = \mathbf{p}\partial_x + \mathbf{q}\partial_p + \mathbf{r}\partial_q$. Условие (iii) означает, что $d_\tau K = 0$, если $\mathbf{w} = 0$ или

$$|\mathbf{p}|^2 (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \otimes (\mathbf{q}\partial_p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{p} \otimes \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{q} + {}$$
$$+ |\mathbf{p}|^2 (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \otimes \mathbf{B} \cdot \mathbf{p} \otimes \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{q} + 3\,|\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}|^2 \mathbf{p}\mathbf{q} = 0,$$

что расщепляется по степеням $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = 0, \qquad (\mathbf{q}^2)$$

$$|\mathbf{p}|^2\, \mathbf{q}\partial_p \cdot \mathbf{A} + 3\mathbf{p}\mathbf{q} \cdot \mathbf{A} = 0, \qquad (\mathbf{q}^3)$$

так что

$$A_{12} = a \mid \mathbf{p} \mid^{-3}$$

с произвольной скалярной функцией a ($\mathbf{x}$). Если матрица $\mathbf{B}$ удовлетворяет уравнению ($\mathbf{q}^2$), то всегда можно найти такой столбец $\mathbf{b}$, что $\mathbf{Bq} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \times \times \mathbf{b}$. Тогда условие Л2 принимает вид

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{b} = 3\mathbf{p}\partial_x \cdot \mathbf{A}. \tag{1}$$

Генераторы продолженной группы E (2; k) можно записать следующим образом:

$$\partial_x; \quad \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{x} \wedge \partial_x + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{p} \wedge \partial_p + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{q} \wedge \partial_q + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{r} \wedge \partial_r,$$

где $\mathbf{\Omega}$ — произвольная кососимметрическая матрица. Условие (i) означает, что везде, где $\mathbf{w} = 0$, имеем

$$\partial_x \otimes \mathbf{w} = 0, \tag{2}$$

$$(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{x} \wedge \partial_x + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{p} \wedge \partial_p + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{q} \wedge \partial_q + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{r} \wedge \partial_r)\, \mathbf{w} = 0. \tag{3}$$

Уравнения (2), (3) после подстановки в них выражения $\mathbf{w}$ преобразуются в следующие:

$$a\partial_x \otimes (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) \otimes \partial_x a = 0 \tag{4}$$

и с учетом выражения (4)

$$2\mathbf{A} \otimes \mathbf{\Omega} \otimes (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \cdot \mathbf{G} \otimes \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{q} \wedge \mathbf{b} +$$
$$+ \mathbf{pb} \cdot \mathbf{\Omega q} - \mathbf{qb} \cdot \mathbf{\Omega p} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{p} \wedge \partial_p \cdot \mathbf{qb} - \mathbf{q} \otimes \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{p} \wedge \partial_p \cdot \mathbf{pb} = 0. \tag{5}$$

В частности, выражение (5) можно свернуть с $\mathbf{q}$. При этом

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{q} \otimes \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \otimes \mathbf{G} \otimes \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{b} = 0,$$

а

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \otimes \mathbf{G} \otimes \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{b} = -\mathbf{qb} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{p} \wedge \mathbf{q},$$

так что (5) превращается в такое:

$$\mathbf{pq} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{q} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{pq} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{p} \wedge \partial_p \cdot \mathbf{qb} - |\mathbf{q}|^2 \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{p} \wedge \partial_p \cdot \mathbf{pb} = 0. \tag{6}$$

К уравнению (6) целесообразно применить сначала оператор $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{p} \wedge \partial_q$, а потом оператор $\mathbf{p}\partial_q$, что приведет к следующему:

$$(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{p} \wedge \partial_p)\, \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{p} \wedge \mathbf{b} = 0.$$

В силу условия (1) и ($\mathbf{q}^3$) это означает, что $(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{p} \wedge \partial_x)\, \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{A} = 0$, так что $\mathbf{A}$ не зависит от $\mathbf{x}$, а столбцы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{p}$ коллинеарны. При этом условии уравнение (6) требует, чтобы

$$2\,|\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}|^2\, \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{p} \wedge \partial_p |\mathbf{b}| = 0,$$

откуда видно, что $|\mathbf{b}|$ зависит лишь от $|\mathbf{p}|^2$ (и не зависит от $\mathbf{x}$ согласно выражению (4)). Окончательный вид столбца $\mathbf{b}$ следует из условия Л3, свернутого с матрицей $\mathbf{p} \otimes \mathbf{y}$:

$$\frac{1}{2}\, |\mathbf{p} \wedge \mathbf{y}|^2\, (\mathbf{p}\partial_p |\mathbf{b}| + 3\,|\mathbf{b}|) = 0,$$

откуда $|\mathbf{b}| = 2b\, |\mathbf{p}|^{-3}$, где b — действительное число. В двухмерном пространстве $|\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}| = \sqrt{2}\, (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})_{12} \operatorname{sgn} |\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}|^2$, поэтому $\mathbf{w}$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{w} = \sqrt{2}\, a \operatorname{sgn}(|\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}|^2)\, |\mathbf{p}|^{-5}\, |\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}|^{-1} (|\mathbf{p}|^2 \mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} -$$
$$- 3\mathbf{pq} \cdot \mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) + 2b\, |\mathbf{p}|^{-3}\, \mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \cdot \mathbf{p},$$

что совпадает с $\mathscr{E}\,(\pm aK + b\,|\mathbf{p}|)$, знак «+» соответствует области $|\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}|^2 > 0$.

С помощью кососимметрической матрицы $\mathbf{E}$ такой, что $\mathbf{E}_{12} = 1$, строка $\mathbf{w}$ выразится следующим образом:

$$\mathbf{w} = a\,(|p|^{-3}\, \mathbf{Er} - 3\,|\mathbf{p}|^{-5} \mathbf{pq} \cdot \mathbf{E}q) + 2b\,|\mathbf{p}|^{-3}\, \mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}. \tag{7}$$

Замечание 1. Инфинитезимальные точечные преобразования симметрии уравнения $\mathbf{w} = 0$ натянуты на генераторы группы E (2; k) (и группы однородных растяжений при $b = 0$).

Получим теперь более общий вид E (2; k)-инвариантного лагранжиана, выражение Эйлера — Пуассона для которого совпадает с выражением (7). Для этого необходимо исследовать ядро оператора Эйлера — Пуассона $\mathscr{E}$.

Предложение 2. Пусть лагранжиан L зависит от производных не выше второго порядка и уравнения Эйлера — Пуассона $\mathscr{E}L = 0$ не выше третьего порядка. (Рассматривается двухмерная вариационная задача в параметрической форме.) Пусть L инвариантен относительно E (2; k). L тогда и только тогда принадлежит ядру оператора $\mathscr{E}$, когда найдутся постоянные α и β и зависящая от $|\mathbf{p}|^2$ функция φ такие, что

$$L = \alpha |\mathbf{p}|^{-2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{p} \wedge \mathbf{q} + \mathbf{p}\mathbf{q}\varphi + \beta,$$

где матрица $\mathbf{E}$ та же, что и в выражении (7).

Доказательство. Для того чтобы $\mathscr{E}L$ не включало производных порядка выше третьего, необходимо и достаточно, чтобы лагранжиан L линейно зависел от $\mathbf{q}$:

$$L = \mathbf{u}\mathbf{q} + l, \tag{8}$$

где l и строка $\mathbf{u}$ зависят лишь от переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$. Условия инвариантности L относительно группы E (2; k) записываются так:

$$\partial_x L = 0,$$

$$(\mathbf{x} \wedge \partial_x + \mathbf{p} \wedge \partial_p + \mathbf{q} \wedge \partial_q) L = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что $\mathbf{u}$ и l не зависят от $\mathbf{x}$ и, кроме того,

$$\mathbf{p} \wedge \partial_p l = 0, \tag{9}$$

$$\mathbf{p} \wedge \partial_p \cdot \mathbf{u}\mathbf{q} + \mathbf{q} \wedge \mathbf{u} = 0. \tag{10}$$

Из уравнения (9) следует, что l зависит только от $|\mathbf{p}|^2$. После тензорного умножения уравнения (10) слева один раз на $\mathbf{p} \cdot \partial_q$, а второй раз на $\mathbf{p} \wedge \partial_q$, получаем соответственно уравнения

$$\mathbf{p} \wedge \partial_p \cdot \mathbf{p}\mathbf{u} = 0,$$

$$(\mathbf{p} \wedge \partial_p) \otimes (\mathbf{p} \wedge \mathbf{u}) = 0,$$

из которых следует, что $\mathbf{p}\mathbf{u}$ и $\mathbf{p} \wedge \mathbf{u}$ также зависят только от $|\mathbf{p}|^2$, иными словами, найдутся функция φ и кососимметрическая матрица $\mathbf{\Phi}$, зависящие от $|\mathbf{p}|^2$ и такие, что

$$\mathbf{p}\mathbf{u} = |\mathbf{p}|^2 \varphi, \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{p} = |\mathbf{p}|^2 \mathbf{\Phi}.$$

Решение получается свертыванием каждого из этих выражений со столбцом $\mathbf{p}$ и их суммированием

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}\mathbf{p} + \varphi\mathbf{p}. \tag{11}$$

Если для лагранжиана (8) $\mathscr{E}L = 0$, то, как легко показать непосредственно, необходимо $\partial_p \otimes \partial_p l = 0$ и $\partial_p \wedge \mathbf{u} = 0$, откуда $l = \text{const}$. При специальном виде $\mathbf{u}$ из равенства (11) для Φ_{12} получаем уравнение

$$|\mathbf{p}|^2 \frac{d}{d|\mathbf{p}|^2} \Phi_{12} + \Phi_{12} = 0$$

с решением $\Phi_{12} = \text{const} \cdot |\mathbf{p}|^{-2}$.

Замечание 2. Уравнение $\mathscr{E}(aK + b|\mathbf{p}|) = 0$, рассматриваемое в пространствах E_k^n и V_k^n, сохраняет то свойство, что первая кривизна линии K постоянна вдоль его решений.

Для доказательства необходимо прямым подсчетом показать, что

$$d_\tau K \equiv \mathbf{p} \cdot \mathscr{E}K,$$

а

$$\mathbf{p} \cdot \mathscr{E}|\mathbf{p}| \equiv 0.$$

1. *Аминова А. В.* О конциркулярных движениях в римановых пространствах.— Гравитация и теория относительности, 1976, вып. 11, с. 127—138.
2. *Куканов А. Б., Константинович А. В.* Об излучении при гиперболическом движении.— История и методология естеств. наук, 1979, № 21, с. 105—109.
3. *Мацюк Р. Я.* О существовании лагранжиана для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1981, вып. 15, с. 35—39.
4. *Hill E. L.* On the kinematics of uniformly accelerated motions and classical electromagnetic theory.— Phys. Rev., 1947, **72**, N 2, p. 143—149.
5. *Hill E. L.* The definition of moving coordinate systems in relativistic theories.— Phys. Rev., 1951, **84**, N 6, p. 1165—1168.
6. *Yano K.* Concurcular geometry I.— Proc. Impt. Acad. Tokyo, 1940, **16**, N 6, p. 195—200

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 08.09.80.

УДК 629.78

В. Е. Бербюк

К ВОПРОСУ О СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ КОРПУСА ДВУНОГОГО ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА

Задачам, связанным с передвижением двуногих шагающих аппаратов, посвящен ряд исследований (см., например, работы [1—10, 12]). Особый интерес представляет проблема построения эффективных алгоритмов управления движением подобного рода механических систем. В настоящее время известно ряд подходов к решению проблемы управления. В работах [5, 12] предложены алгоритмы свободной стабилизации, обеспечивающие устойчивое движение двуногого механизма в произвольном режиме из заданного класса. Эффективные методы синтеза оптимальных линейных систем успешно применены в работах [8—10] для решения ряда задач стабилизации движения шагающего аппарата. Метод разделения движений оказался плодотворным при организации жесткого управления движением двуногого механизма [6]. Результаты статьи [13] являются примером использования общей теории Ляпунова для изучения устойчивости антропоморфных систем. В настоящей работе с помощью принципа максимума Понтрягина решена задача оптимальной по быстродействию стабилизации движения корпуса двуногого шагающего аппарата для модели, отличающейся от принятых в работах [5, 7—10, 12], а также изучено влияние отдельных кинематических и динамических параметров на величину времени оптимальной стабилизации.

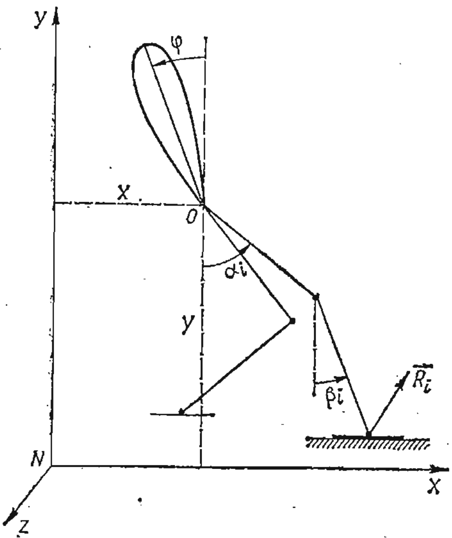

Рис. 1

Рассмотрим плоскую модель шагающего аппарата, состоящего из весомого корпуса и пары трехзвенных одинаковых ног [2] (рис. 1). Два весомых звена моделируют бедро и голень, третье невесомое звено — стопу конечности. Полагаем, что звенья аппарата соединены между собой идеальными шарнирами. Уравнения, описывающие движение механизма в фазе опоры на одну из ног, можно записать в виде [2]

$$f_1(t) - K_r(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = R_{1x}(t),$$