В работах [1, 2] получено выражение для температурной функции пластины, не позволяющее получить рассмотренные нами частные случаи. Температурная функция (14) может быть использована для определения температурных полей пластины с теплоотдачей при ее нагреве линейными, плоскими и объемными источниками тепла.

1. *Недосека А. Я., Санченко В. А., Ворона Г. А.* Распределение температуры при действии на поверхность пластины сосредоточенного источника тепла.— Автомат. сварка, 1977, № 6, с. 1—4.
2. *Недосека А. Я., Чернова О. И.* Распределение температуры в пластинках с источником сварочного нагрева на различной глубине.— Автомат. сварка, 1977, № 7, с. 1—4.
3. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости.— М. : Изд-во АН СССР, 1962.— 364 с.
4. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения.— М. : Физматгиз, 1963.— 252 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
17.12.80

УДК 534.1 : 531.221.3 : 518.5

Л. М. Зорий, Б. А. Попов, Н. В. Шулык

МАШИННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Опишем машинно-аналитический способ определения собственных значений многопараметрических краевых задач, характеристические определители которых являются функциями нулевого рода от некоторых параметров. Такие задачи возникают, в частности, при изучении малых колебаний и устойчивости сложных континуально-дискретных упругих систем. Для их исследования разработан метод характеристических рядов, основой которого является построение характеристического ряда задачи (системы) и последующее применение обобщенных критериев устойчивости и двухсторонних оценок для низших частот и критических значений [4]. Существенно, что предлагаемый способ позволяет определить в некоторой области пространства параметров все собственные значения.

Пусть известно представление характеристического определителя некоторой краевой задачи в виде ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i (B_1, B_2, \ldots, B_k) \lambda^i = 0, \tag{1}$$

где λ — основной спектральный параметр (например, параметр частоты, приведенной нагрузки и т. п.); $B_i (p_1, p_2, \ldots, p_r)$, $i = \overline{0, k}$ — целые функции всех других параметров $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

Изучим уравнение (1) в некоторой области Q пространства параметров, такой, что для значений $p \in Q$ $(p = (p_1, p_2, \ldots, p_r))$ все собственные значения (корни уравнения (1)) являются положительными и простыми (для консервативных упругих систем Q — область устойчивости, для неконсервативных — то же, если отсутствует дестабилизация [1]). Для этого рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=0}^{k} \psi_i (B_1, B_2, \ldots, B_k) \lambda^i = 0. \tag{2}$$

При $k \to \infty$ количество действительных корней этого уравнения стремится к бесконечности. Обозначим эти корни через

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \tag{3}$$

Пусть s корней уравнения (2) при $k = s$ и $s+1$ корней этого уравнения при $k = s+1$ уже найдены ($s \geqslant 2$). Обозначим их через

$$\lambda_1^{(s)},\ \lambda_2^{(s)},\ \ldots,\ \lambda_{s-2}^{(s)},\ \lambda_{s-1}^{(s)},\ \lambda_s^{(s)},$$
$$\lambda_1^{(s+1)},\ \lambda_2^{(s+1)},\ \ldots,\ \lambda_{s-2}^{(s+1)},\ \lambda_{s-1}^{(s+1)},\ \lambda_s^{(s+1)},\ \lambda_{s+1}^{(s+1)}.$$

Величины в последовательностях размещены в порядке возрастания модулей. Два последних числа в каждой последовательности могут быть комплексно-сопряженными, остальные, как правило, действительные.

Как известно [2],

$$\lambda_i^{(s)} < \lambda_i^{(s+2)} < \lambda_i^{(s+1)}, \quad i = \overline{1, s-2},$$
$$\operatorname{Re}\lambda_{s-1}^{(s)} < \lambda_{s-1}^{(s+2)} < \lambda_{s-1}^{(s+1)}, \tag{4}$$
$$\lambda_{s-1}^{(s+2)} < \lambda_s^{(s+2)} \approx \operatorname{Re}\lambda_s^{(s+1)}.$$

Из неравенств (4) следует, что значения λ_i^{s+2} ($i = \overline{1, s}$) можно определить как решения уравнения (2) при $k = s+2$ ($s = 1,\ 2\ \ldots$), причем процесс этот сходящийся. Два оставшихся приближения к собственным значениям $\lambda_{s+1}^{(s+2)}$ и $\lambda_{s+2}^{(s+2)}$ находятся как корни квадратного уравнения, полученного в результате деления правой части уравнения (2) при $k = s+2$ на величину $\prod\limits_{i=1}^{s}(s - \lambda_i^{s+2})$. Алгоритм нахождения собственных значений начинается с решения уравнения (2) при $k = 2, 3$ (квадратного и кубического уравнений).

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$f^{\mathrm{IV}} + \alpha f''' - \beta f'' - \gamma f' - \delta f = 0; \tag{5}$$

$$\sum_{i=0}^{3} a_i f^{(i)}(0) = 0,\quad \sum_{i=0}^{3} b_i f^{(i)}(0) = 0,\quad \sum_{i=0}^{3} c_i f^{(i)}(1) = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{3} d_i f^{(i)}(1) = 0. \tag{6}$$

Ее характеристический определитель выражается, как известно [5], через параметры a_i, b_i, c_i, d_i ($i = \overline{0, 3}$) краевых условий и функции

$$F_{2s} = [\varphi^{(3-s)}]^2 - \varphi^{(2-s)}\varphi^{(4-s)},\quad W_s = [\varphi^{(s+4)}]^2 - \varphi^{(s+3)}\varphi^{(s+5)},\quad s = 0, 1, \tag{7}$$

где

$$\varphi(x, \alpha, \beta, \gamma, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n x^{n+3}}{(n+3)!} \equiv \sum_{k=1}^{4} \frac{e^{s_k x}}{p_4'(s_k)};$$

$$I_k = \begin{cases} 0 \text{ при } k < 0, \\ 1 \text{ при } k = 0, \\ \alpha I_{k-1} + \beta I_{k-2} + \gamma I_{k-3} + \delta I_{k-4} \text{ при } k > 0; \end{cases}$$

s_k — корни соответствующего характеристического полинома

$$p_4(s) = s^4 - \alpha s^3 - \beta s^2 - \gamma s - \delta.$$

Отметим, что $\varphi(x)$ — решение задачи Коши для уравнения (5) при начальных условиях $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 1$. В случае $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ выражения для функций (7) упрощаются, причем указанные функции выражаются через основную функцию F_4 и ее производные:

$$F_0(x, \beta, \delta) = 1 - \delta F_4(x, \beta, \delta),$$
$$W_0(x, \beta, \delta) = -\beta - \delta F_2(x, \beta, \delta),$$
$$W_1(x, \beta, \delta) = \beta^2 + \delta^2 F_4(x, \beta, \delta),$$
$$F_2(x, \beta, \delta) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_4(x, \beta, \delta)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}F_4(x, \beta, \delta), \tag{8}$$

а

$$\varphi(x, \beta, \delta) = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}\left(\frac{\operatorname{sh}\mu x}{\mu} - \frac{\sin \nu x}{\nu}\right),$$

где

$$\mu^2 = \sqrt{\delta + \frac{1}{4}\beta^2} + \frac{1}{2}\beta; \quad \nu^2 = \sqrt{\delta + \frac{1}{4}\beta^2} - \frac{1}{2}\beta.$$

Рассмотрим выражение для функции F_0 в виде характеристического ряда [5]

$$F_0 = 1 - \delta B_1 - \delta B_2 - \delta B_3 + \cdots \tag{9}$$

Здесь

$$B_k = 2^{2k-1} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+2k-1}^{2k-1} \frac{\beta^m x^{2m+4k}}{(2m+4k)!}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Поскольку

$$B_1 = 2\frac{\partial f(x, \beta)}{\partial x},$$

где

$$f(x, \beta) = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\beta}x) - 1}{\beta} = \frac{x^2}{2!} + \frac{\beta x^4}{4!} + \frac{\beta^2 x^6}{6!} + \cdots,$$

то

$$B_k = \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!} \frac{\partial^{2k-1} f(x, \beta)}{\partial x^{2k-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Эта формула позволяет путем последовательного дифференцирования получать суммы рядов (10) в замкнутом виде с использованием ЭЦВМ [6]. Коэффициенты B_1— B_6, вычисленные на ЭЦВМ «МИР-2», приведены ниже:

B [1] = Ф2 × X + (—2) × B↑(—1) × Ф1 + 2 × B (—2),
B [2] = 11/2 × B↑(—2) × Ф2 × X + (—3)/2 × B↑(—2) × Ф1 × X↑2 + 1/6 ×
× B↑(—1) × Ф2 × X↑3 + (—8) × B↑(—3) × Ф1 + 8 × B↑(—4),
B [3] = 193/8 × B↑(—4) × Ф2 × X + (—65)/8 × B↑(—4) × Ф1 × X↑2 + 37/24 ×
+ B↑(—3) × Ф2 × X↑3 + (—1)/6 × B↑(—3) × Ф1 × X↑4 + 1/120 × B↑(—2) × Ф2 ×
× X↑ 5 + (—32) × B↑(—5) × Ф1 + 32 × B↑(—6),
B [4] = 1619/16 × B↑(—6) × Ф2 × X + (—595)/16 × B↑(—6) × Ф1 × X↑2 +
+ 397/48 × B↑(—5) × Ф2 × X↑3 + (—29)/24 + B(—5) × Ф1 × X↑4 + 7/60 ×
× B↑(—4) × Ф2 × X↑5 + (—1)/144 × B↑(—4) × Ф1 × X↑6 + 1/5040 × B↑ (—3) ×
× Ф2 × X↑7 + (—128) × B↑(—7) × Ф1 + 128 × B↑(—8),
B [5] = 53381/128 × B↑(—8) × Ф2 × X + (—20613)/128 × B↑(—8) × Ф1 × X↑2 +
+ 14893/384 × B↑(—7) × Ф2 × X↑3 + (—103)/16 × B↑(—7) × Ф1 × X↑ 4 +
+ 1471/1920 × B↑(—6) × Ф2 × X↑5 + (—21)/320 × B↑(—6) × X ↑6 + 79/20160 ×
× B↑(—5) × Ф2 × X↑7 + (—1) /6720 × B↑ (—5) × Ф1 × X ↑8 + 1/362880 ×
× B↑(—4) × Ф2 × X↑9 + (—512) × B↑(—9) × Ф1 + 512 × B↑(—10),
B [6] = 436109/256 × B↑(—10) × Ф2 × X + (—173965)/256 × B↑ (—10) × Ф1 ×
X↑ 2 + 131975/768 × B↑(—9) × Ф2 × X↑3 + (—11773)/384 × B↑(—9) × Ф1 × X↑
↑4 + 1559/384 × B↑(—8) × Ф2 × X↑5 + (—1567)/3840 × B↑(—8) × Ф1 × X↑6 +
+ 839/26880 × B↑(—7) × Ф2 × X ↑ 7 + (—1)/560 × B↑(—7) × Ф1 × X ↑ 8 +
+ 53/725760 × B↑(—6) × Ф2 × X↑9 + (—1)/518400 × B↑(—6) × Ф1 × X↑10 +
+ 1/39916800 × B↑(—5) × Ф2 × X↑11 + (—2048) × B↑(—11) × Ф1 + 2048 ×
× B↑(—12).

Здесь использованы такие обозначения: $B = \beta$, $\Phi 1 = \operatorname{ch}(x\sqrt{\beta})/\beta$, $\Phi 2 = \operatorname{sh}(x\sqrt{\beta})/\beta$. По описанному алгоритму найдены корни многочленов вида (2) невысокой степени ($k \leqslant 4$) для следующих случаев:

1) $F_0(1) = 0$ (задача о малых колебаниях и устойчивости прямолинейной упругой консоли, нагруженной следящей силой [3]). Краевые условия для этой задачи $f(0) = f'(0) = f''(1) = f'''(1) = 0$;

2) $F_4'(1) = 0$ (аналогичная задача для сжатого (растянутого) стержня, один конец которого закреплен шарнирно, другой жестко) и $f(0) = f''(0) = f(1) = f'(1) = 0$.

С увеличением степени многочлена (1) выражения для его коэффициентов все более усложняются и вычислять корни описанным выше способом становится затруднительно.

Для больших λ_l могут быть использованы асимптотические выражения, получаемые из формул

$$F_0 = \frac{1}{(\mu^2+\nu^2)^2}[\nu^4 + \mu^4 + 2\mu^2\nu^2 \operatorname{ch}\mu x \cos\nu x + \mu\nu(\nu^2-\mu^2)\operatorname{sh}\mu x \sin\nu x],$$

$$F_4 = \frac{1}{(\mu^2+\nu^2)^2}\left[(\mu^2-\nu^2)\frac{\operatorname{sh}\mu x \sin\nu x}{\mu\nu} + 2(1-\operatorname{ch}\mu x\cos\nu x)\right],$$

$$F_2 = \frac{1}{(\mu^2+\nu^2)^2}[2\mu\nu \operatorname{sh}\mu x \sin\nu x + (\nu^2-\mu^2)(1-\cos\nu x \operatorname{ch}\mu x)],$$

$$W_0 = \frac{1}{(\mu^2+\nu^2)^2}[\nu^6 + \mu^6 + \mu^2\nu^2(\nu^2-\mu^2) - 2\mu^3\nu^3\operatorname{sh}\mu x\sin\nu x], \qquad (11)$$

$$W_1 = \frac{1}{(\mu^2+\nu^2)^2}[\mu^8 + \nu^8 - 2\mu^4\nu^4\operatorname{ch}\mu x\cos\nu x + \mu^3\nu^3(\mu^2-\nu^2)\operatorname{sh}\mu x\sin\nu x].$$

Формулы (11) — результат подстановки значений (7) в выражения (8).

Из равенства $F_0(1) = 0$ получаем для λ_j асимптотическое выражение ($\beta \ll \delta$)

$$\lambda_j \approx \left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right)^4. \qquad (12)$$

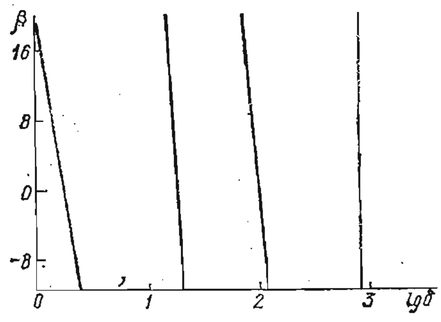

Рис. 1

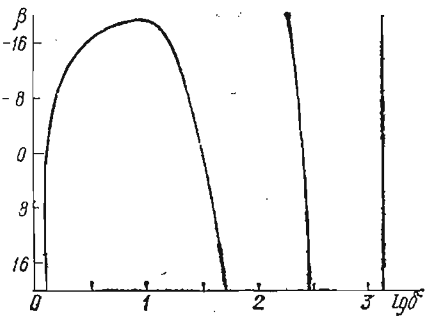

Рис. 2

К такому выражению можно прийти исходя из уравнений $F_1(1) = 0$ или $W_1(1) = 0$.

Для случая $F_4'(1) = 0$ при тех же условиях получаем асимптотическое выражение

$$\lambda_j \approx \left(\frac{\pi}{4} + j\pi\right)^4, \quad j = 4, 5, \ldots \qquad (13)$$

Формулы (12), (13) достаточно точны при $j \geqslant 5$ и $\beta \leqslant 20$. Так, при $j = 5$, $\beta = 20$ ошибка асимптотической формулы (12) для случая $F_0(1)=0$—5%, а при $j = 10$, $\beta = 19$ — 1,3%.

Полученные по асимптотическим формулам значения корней могут быть уточнены (как решения соответствующих трансцендентных уравнений). Результаты решения рассмотренных примеров (ветви кривых собственных значений λ_1— λ_4) приведены на рис. 1, 2 соответственно.

Предложенный метод определения частот малых колебаний многопараметрических упругих систем применим к более сложным случаям, когда например, правая часть соответствующего трансцендентного уравнения является линейной комбинацией функций (11) и их производных, параметр $\gamma \neq 0$ и т. д.

1. *Байдак Д. А., Зорий Л. М.* Один способ обоснования динамического метода исследования упругих систем.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 89—98.
2. *Балинский А. И., Зорий Л. М.* К исследованию зависимости низших частот деформируемых систем от параметров.— Физ.-хим. механика материалов, 1971, 7, № 3, с. 99—100.
3. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.— М. : Физматгиз, 1961.— 339 с.
4. *Зорий Л. М.* К развитию аналитических методов исследования задач динамики упругих и гидроупругих систем.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 16—20.
5. *Зорій Л. М.* Про одне зображення характеристичних рівнянь деяких крайових задач для систем з розподіленими параметрами.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 12, с. 1072—1075.
6. *Попов Б. О., Монцібович Б. Р.* Розв'язання задач на машинах для інженерних розрахунків.— К. : Наук. думка, 1978.— 347 с.
7. *Чудновский В. Г.* Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем.— Киев : Изд-во АН УССР, 1952.— 416 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР
Физико-механический институт
им. Г. В. Карпенко АН УССР

Поступила в редколлегию
21.05.79

УДК 539.3 : 534.26

Е. А. Вдович

ОПТИМИЗАЦИЯ ИМПУЛЬСА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ, ПАДАЮЩЕЙ НА УПРУГИЙ СЛОЙ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим упругий слой (среда 2) толщины $2h$, контактирующий со стороны плоскопараллельных границ $z = \pm h$ с акустической средой, характеристики которой для $z > h$ (среда 1) равны ρ_1, c_1, а для $z < -h$ (среда 3) — ρ_3, c_3 (ρ_i, c_i — плотность и скорость продольных волн в i-й среде). В среде 1 на расстоянии $z = z_0$ $(z_0 \gg h)$ расположена плоскость сосредоточенных массовых сил вида $\vec{F} = \left\{0,\ 0,\ k_0 f(t)\cos\left(\frac{\omega y}{c_1}\right) \frac{d}{dz}\ \delta(z - z_0)\right\}$, возбуждающих периодический по координате y импульс продолжительности t_1, который достигает поверхности $z = h$ в момент времени $t = \frac{z_0 - h}{c_1}$.

Задача определения отраженной волны, возникшей в результате взаимодействия звукового импульса с упругим слоем, с использованием метода разделения переменных [1] сводится к решению системы волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \xi^2} - \varkappa_i^2 \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \tau^2} - a^2\omega^2\Phi_i = n_0 f_i(\tau)\,\delta(\xi - \xi_0), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - a^2\omega^2\Psi = 0 \quad (i = \overline{1, 3}) \qquad (2)$$

с условиями сопряжения на границах раздела

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + a\omega\Psi, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tau^2} + n_0\varkappa^{-2} f(\tau)\,\delta(\xi - \xi_0) =$$
$$= m_1\left[\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \tau^2} + 2c^{-2}a\omega\left(a\omega\Phi_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right)\right] \text{ при } \xi = 1; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + a\omega\Psi; \quad \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \tau^2} = m_3\left[\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \tau^2} + 2c^{-2}a\omega\left(a\omega\Phi_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right)\right] \qquad (4)$$
$$\text{при } \xi = -1;$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - 2c^{-2}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + a\omega\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}\right) = 0 \text{ при } \xi = \pm 1; \qquad (5)$$

условиями затухания на бесконечности

$$\lim_{\xi\to\infty} \Phi_1 = 0, \quad \lim_{\xi\to-\infty} \Phi_3 = 0 \qquad (6)$$