$= \nu = 0{,}3$, $\mathrm{Bi} = 0{,}25$. На рис. 2 показано изменение напряжения σ_θ^* на контуре отверстия в зависимости от критерия Bi при $r_0/h = 6$, $\nu' = \nu = 0{,}3$. На рис. 1, 2 штриховые линии построены при $\alpha_t'/\alpha_t = 1$, $E/E' = 1$, штрихпунктирные — при $\alpha_t'/\alpha_t = 1$, $E/E' = 3$.

На рис. 3 изображено изменение напряжений σ_θ^* на контуре отверстия в зависимости от отношений линейных температурных удлинений α_t'/α_t при $r_0/h = 6$, $\nu' = \nu = 0{,}3$, $\mathrm{Bi} = 0{,}25$. На рис. 3 штриховая линия соответствует параметру $E/E' = 1$, штрихпунктирная — $E/E' = 3$. Сплошными линиями на рис. 1—3 приведены результаты работы [3]. Как следует из рис. 1—3, напряжения σ_θ^* увеличиваются с ростом параметров податливости материала плиты поперечным сдвиговым и нормальным деформациям, относительных размеров отверстия, критерия Био и отношения линейных температурных удлинений.

1. *Векуа И. Н.* Теория тонких пологих оболочек переменной толщины.— Тр. Тбил. мат. ин-та, 1965, 30, с. 3—102.
2. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения.— М. : Физматгиз, 1963.— 358 с.
3. *Мелан Э., Паркус Г.* Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями.— М. : Физматгиз, 1958.— 167 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М. : Изд-во АН УССР, 1954.— 647 с.
5. *Пелех Б. Л., Полевой Б. Н.* Обобщенные уравнения температурного изгиба пластин с учетом трансверсальных механических характеристик и их приложения в задачах концентрации напряжений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 1, с. 38—42.
6. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Об одном новом подходе к построению теории оболочек с учетом граничных условий на поверхностях.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 5, с. 444—447.
7. *Прусов И. А.* Некоторые задачи термоупругости.— Минск : Изд-во Белорус. ун-та, 1972.— 200 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 21.02.79

УДК 539.377

Н. И. Бугрий

О ПРИМЕНЕНИИ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Приведение уравнений трехмерной задачи теплопроводности к двумерной можно выполнить различными методами. Например, в работах [7, 8] вывод уравнений теплопроводности пластин и оболочек производится с использованием операторного метода в комплексе с методом усреднения температуры по толщине. Уравнения нестационарной теплопроводности получены в [1—4] на основе вариационных принципов. Предположение о полиномиальном законе распределения температуры по толщине пластин и оболочек использовано, в частности, в работах [5, 6]. В данной работе на основании вариационного принципа, эквивалентного краевым задачам нестационарной теплопроводности, построена приближенная система уравнений и краевых условий для тонких оболочек при заданном законе изменения температуры по толщине. В отличие от [1, 2], вариационный принцип устанавливается с применением преобразования Лапласа к исходным соотношениям краевой задачи теплопроводности.

Рассмотрим тонкостенную изотропную оболочку постоянной толщины $2h$, отнесенную к смешанной ортогональной криволинейной системе координат (α, β, γ). Влиянием кривизны оболочки на температурное поле будем пренебрегать. Построим функционал, экстремали которого удовлетворяют краевой задаче теплопроводности

$$\Delta t(\alpha, \beta, \gamma, \tau) + \frac{Q(\alpha, \beta, \gamma, \tau)}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial t(\alpha, \beta, \gamma, \tau)}{\partial \tau}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial t(\alpha, \beta, \gamma, \tau)}{\partial n} + H_0\left[t(\alpha, \beta, \gamma, \tau) - t_c(\alpha, \beta, \gamma, \tau)\right]|_{(\Sigma)} = 0, \tag{2}$$

$$t(\alpha, \beta, \gamma, 0) = 0, \tag{3}$$

где t, t_c — температура в области оболочки и внешней среды, отсчитываемые от постоянной начальной; Q — плотность распределения тепловых источников; λ — коэффициент теплопроводности; a — температуропроводность; H_0 — относительный коэффициент теплоотдачи с поверхности (Σ) оболочки; τ — время; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к (Σ);

$$\Delta = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\right) + A_1A_2\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right];$$

A_1, A_2 — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки. С этой целью применим к уравнениям (1), (2) преобразование Лапласа по времени. С учетом нулевого начального условия (3) получаем

$$\Delta\tilde{t}(\alpha, \beta, \gamma, s) + \frac{\tilde{Q}(\alpha, \beta, \gamma, s)}{\lambda} = \frac{s}{a}\tilde{t}(\alpha, \beta, \gamma, s), \tag{4}$$

$$\frac{\partial\tilde{t}(\alpha, \beta, \gamma, s)}{\partial n} + H_0\left[\tilde{t}(\alpha, \beta, \gamma, s) - \tilde{t}_c(\alpha, \beta, \gamma, s)\right]|_{(\Sigma)} = 0. \tag{5}$$

Здесь s — параметр преобразования Лапласа; $\tilde{f}(\alpha, \beta, \gamma, s)$ — трансформанта Лапласа функции $f(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$.

Решение краевой задачи (4), (5) эквивалентно построению экстремалей функционала

$$\tilde{K} = \frac{1}{2}\int\limits_{(V)}\left(\vec{\nabla}\tilde{t}\vec{\nabla}\tilde{t} + \frac{s}{a}\tilde{t}^2 - \frac{2}{\lambda}\tilde{Q}\tilde{t}\right)dV + \frac{H_0}{2}\int\limits_{(\Sigma)}\tilde{t}(\tilde{t} - 2\tilde{t}_c)\,d\Sigma, \tag{6}$$

где (V) — область оболочки;

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\beta}, \frac{\partial}{\partial\gamma}\right).$$

Оригинал K от $\tilde{K}$ можно найти, используя теорему о свертке преобразования Лапласа:

$$K = \frac{1}{2}\int\limits_{(V)}\int\limits_0^\tau\left[\vec{\nabla}t(\alpha, \beta, \gamma, u)\vec{\nabla}t(\alpha, \beta, \gamma, \tau - u) + \frac{1}{a}\frac{\partial t(\alpha, \beta, \gamma, u)}{\partial u}\times\right.$$

$$\left.\times\, t(\alpha, \beta, \gamma, \tau - u) - \frac{2}{\lambda}t(\alpha, \beta, \gamma, u)\,Q(\alpha, \beta, \gamma, \tau - u)\right]du\,dV +$$

$$+ \frac{H_0}{2}\int\limits_{(\Sigma)}\int\limits_0^\tau\left[t(\alpha, \beta, \gamma, u)\left(t(\alpha, \beta, \gamma, \tau - u) - 2t_c(\alpha, \beta, \gamma, \tau - u)\right)\right]du\,d\Sigma. \tag{7}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что экстремали функционала

$$M = \int\limits_0^{\tau_0}K\,d\tau \tag{8}$$

удовлетворяют исходной краевой задаче (1) — (3).

Используем функционал (8) для построения системы уравнений приближенного решения задачи (1) — (3) при заданном законе распределения температуры по толщине оболочки.

Пусть распределение температуры по толщине оболочки ищется в виде разложения по некоторой системе независимых функций $\{\varphi_k(\gamma)\}$, непрерывных на отрезке $[-h, h]$:

$$t(\alpha, \beta, \gamma, \tau) = t_k(\alpha, \beta, \tau)\,\varphi_k(\gamma), \tag{9}$$

где $(k = \overline{0, n})$. Здесь и в дальнейшем повторяющиеся индексы являются индексами суммирования.

В силу принятых допущений, следуя работе [4], примем $(\Sigma^+) \approx (\Sigma^-) \approx (\Sigma^0)$. Здесь $(\Sigma^\pm)$ — боковые поверхности оболочки при $\gamma = \pm h$; (Σ^0) — срединная поверхность. Тогда функционал (8) можно представить в виде

$$M^* = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}\int_{(\Sigma^0)}\int_0^{\tau}\Big[A_{km}\Big(\vec{\nabla}_2 t_k \vec{\nabla}_2 t_m^* + \frac{1}{a}\,t_m^*\frac{\partial t_k}{\partial u}\Big) + B_{km} t_k t_m^* +$$

$$+ C_{km} t_k t_m^* - 2t_k\Big(\frac{Q_k}{\lambda} + H_0 t^{*(+)}\varphi_k(h) + H_0 t^{*(-)}\varphi_k(-h)\Big)\Big]\,du\,d\Sigma^0 d\tau +$$

$$+ \frac{H_0}{2}\int_0^{\tau_0}\int_{(\Gamma_0)}\int_0^{\tau} A_{km} t_k\,(t_m^* - 2t_m^{*(\Gamma_0)})\,du\,d\Gamma_0 d\tau, \tag{10}$$

где $t_k = t_k(\alpha, \beta, u)$; $t_k^* = t_k(\alpha, \beta, \tau - u)$; $t_k^{*(\Gamma_0)}$ — компоненты разложения (9) на торцевой поверхности оболочки; $t^{*(\pm)}$ — значение функции t_c^* при $\gamma = \pm h$; (Γ_0) — контур (Σ^0);

$$Q_k^* = \int_{-h}^{h} Q^*\varphi_k d\gamma; \quad A_{km} = \int_{-h}^{h}\varphi_k\varphi_m d\gamma; \quad B_{km} = \int_{-h}^{h}\varphi_k\varphi_m d\gamma;$$

$$C_{km} = \varphi_k(h)\,\varphi_m(h) + \varphi_k(-h)\,\varphi_m(-h); \quad \vec{\nabla}_2 = \Big(\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big). \tag{11}$$

Уравнения Остроградского — Эйлера и естественные краевые условия вариационной задачи для функционала (10), заданного на системе функций t_k $(k = \overline{0, n})$, запишутся так:

$$A_{km}\Big(\Delta_2 t_m - \frac{1}{a}\frac{\partial t_m}{\partial\tau}\Big) = (C_{km} + B_{km})\,t_m - \frac{Q_k}{\lambda} - H_0\,(t^{(+)}\varphi_k(h) + t^{(-)}\varphi_k(-h)). \tag{12}$$

$$A_{km}\Big[\frac{\partial t_m}{\partial n} + H_0\,(t_m - t_m^{(\Gamma_0)})\Big]\Big|_{(\Gamma_0)} = 0 \quad (k = \overline{0, n}). \tag{13}$$

Они представляют собой систему уравнений для определения функций t_k разложения (9) искомого температурного поля $t(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$.

Если в качестве системы функций $\{\varphi_k(\gamma)\}$, $(k = \overline{0, n})$ выбрать ортонормированную на $[-h; h]$ систему функций

$$\frac{1}{\sqrt{2h}}, \ \frac{1}{\sqrt{h}}\sin\frac{\pi\gamma}{h}, \ \frac{1}{\sqrt{h}}\sin\frac{2\pi\gamma}{h}, \ \ldots, \ \frac{1}{\sqrt{h}}\sin\frac{n\pi\gamma}{h},$$

то, как видно из формул [11],

$$A_{km} = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m; \end{cases} \qquad B_{km} = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \Big(\dfrac{\pi m}{h}\Big)^2, & k = m; \end{cases}$$

$$C_{00} = \frac{1}{h}; \quad C_{0m} = C_{k0} = 0; \quad C_{km} = 0 \quad (k, m = \overline{1, n}).$$

Поэтому каждая из систем (12), (13) вырождается в систему n независимых уравнений относительно функций $t_k(\alpha, \beta, \tau)$:

$$\Delta_2 t_0 - \frac{1}{a}\frac{\partial t_0}{\partial\tau} = \frac{t_0}{h} - \frac{Q_0}{\lambda} - \frac{H_0}{\sqrt{2h}}(t^{(+)} + t^{(-)}),$$

$$\Delta_2 t_k - \frac{1}{a}\frac{\partial t_k}{\partial \tau} = \left(\frac{\pi k}{h}\right)^2 t_k - \frac{Q_k}{\lambda} \quad (k = \overline{1, n}),$$

$$\frac{\partial t_k}{\partial n} + H_0 (t_k - t_k^{(\Gamma_0)})|_{(\Gamma_0)} = 0 \quad (k = \overline{0, n}).$$

При полиномиальном представлении распределения температуры по толщине оболочки

$$t(\alpha, \beta, \gamma, \tau) = t_k(\alpha, \beta, \tau)\gamma^k$$

в соотношениях (12), (13) коэффициенты A_{km}, B_{km}, C_{km} определяются формулами

$$A_{km} = \frac{[1-(-1)^{k+m+1}]\, h^{k+m+1}}{k+m+1}, \quad C_{km} = H_0 [1 + (-1)^{k+m}]\, h^{k+m},$$

$$B_{0m} = B_{k0} = 0, \quad B_{km} = \frac{[1-(-1)^{k+m-1}]\, h^{k+m-1}}{k+m-1} \quad (k, m = \overline{1, n}).$$

При $n = 1$ (линейный закон распределения температуры по толщине) система (12), (13) совпадает с аналогичной, приведенной в работе [2].

1. *Айнола Л. Я.* Вариационные принципы для нестационарных задач теплопроводности.— Инж.-физ. журн., 1967, 12, № 4, с. 465—468.
2. *Ананьев Н. И., Няшин Ю. И., Скороходов А. Н.* Вариационный метод расчета нестационарного температурного поля.— Инж.-физ. журн., 1974, 26, № 3, с. 470—476.
3. *Био М.* Вариационные принципы в теории теплообмена.— М. : Энергия, 1975.— 208 с.
4. *Болотин В. В.* Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла.— Прикл. математика и механика, 1960, 24, № 2, с. 361—363.
5. *Даниловская В. И.* Приближенное решение задачи о нестационарном тепловом температурном поле в тонкой оболочке произвольной формы.— Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 9, с. 157—158.
6. *Мотовиловець І. О.* Про виведення рівнянь теплопровідності пластин.— Прикл. механіка, 1960, 6, вип. 3, с. 346—350.
7. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках.— К. : Вид-во АН УРСР, 1961.— 212 с.
8. *Подстригач Я. С.* О применении операторного метода к выходу основных соотношений теории теплопроводности тонкостенных элементов и составных конструкций.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1965, вып. 5, с. 24—35.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 26.01.81

УДК 532.72 : 539.3

Ю. Д. Зозуляк

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ ДЛЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО ТВЕРДОГО РАСТВОРА

На основе представлений двухконтинуумной модели твердого раствора получено обобщенное уравнение диффузии, в котором учтены силы инерции примесных частиц.

Рассмотрим твердый раствор, состоящий из первой (основной) и второй (примеси) компонент (фаз), которые моделируются двумя взаимопроникающими континуумами. Принимается, что напряженное состояние внутри второй фазы определяется только шаровой частью тензора напряжений, характеризуемой давлением P_2. В дальнейшем все величины, относящиеся к основной фазе, будем обозначать индексом «1», к примеси — индексом «2», к центру масс раствора — без индексов.

Балансовые уравнения сохранения массы и импульса для каждой из компонент имеют вид [2]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{v}_i) = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{1}$$