

Б. Н. Полевой

**ВАРИАНТ УТОЧНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЗМОМЕНТНОГО
НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕРМОУПРУГОСТИ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ**

Появление и интенсивное внедрение в инженерную практику новых композиционных материалов привели к необходимости построения уточненных теорий плит, способных отразить ряд специфических свойств этих материалов, в частности их резкую анизотропию упругих и тепловых свойств в сочетании с низкой сдвиговой жесткостью, так как их свойства существенно отличны от таковых для традиционных материалов. В данной работе получен один вариант уточненных уравнений безмоментного напряженного состояния термоупругости трансверсально-изотропных плит с учетом поперечных составляющих тензора напряжений и деформаций.

Рассмотрим трансверсально-изотропную плиту толщиной $2h$, напряженное состояние которой вызывается действием стационарного температурного поля $T(x, y, z)$. Выберем координатную систему так, чтобы оси Ox и Oy лежали в срединной плоскости плиты, а ось Oz была перпендикулярна к этой плоскости. Обозначим через E, G, ν, α_t модуль упругости, модуль сдвига, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения соответственно для направления в плоскости изотропии, а через E', G', ν', α_t' — соответствующие величины в направлениях, перпендикулярных плоскости изотропии.

Пусть физико-механические и температурные характеристики не зависят от температуры, относительное температурное расширение пропорционально температуре, а напряжения не превосходят предела упругости. Тогда физические соотношения выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \lambda \sigma_t - E_0 (\alpha_t + \nu' \alpha_t') T, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \lambda \sigma_z - E_0 (\alpha_t + \nu' \alpha_t') T, \\ \sigma_z &= E_0' \left[\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - E_0 (2\lambda \alpha_t + \alpha_t') T, \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = G' \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь

$$\tau_{xz} = G' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$$\lambda = \frac{\nu'}{1-\nu} \frac{E}{E'}; \quad E_0 = \frac{E}{1-\nu-2(\nu')^2 E/E'}; \quad E_0' = \frac{\nu'}{\lambda} E_0; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

С использованием метода разложения компонент напряжений, перемещений и температуры в ряды по полиномам Лежандра относительно нормальной координаты [1, 2, 6] трехмерная задача термоупругости трансверсально-изотропных плит сведена к двумерной при точном удовлетворении граничным условиям для напряжений $\tau_{xt}, \tau_{yt}, \sigma_t$ на внешних поверхностях плиты. В этом случае уравнения термоупругости трансверсально-изотропных плит разбиваются на две независимые системы, характеризующие безмоментное напряженное состояние и температурный изгиб. Уточненные уравнения температурного изгиба таких плит получены ранее в работе [5].

В случае безмоментного напряженного состояния термоупругости трансверсально-изотропных плит уравнения равновесия в усредненных

усилиях имеют вид

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = 0, \quad x \neq y, \quad \frac{\partial Q_{(1)x}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{(1)y}}{\partial y} - \frac{R_0}{h} = 0. \quad (2)$$

Компоненты тензора напряжений при точном удовлетворении граничным условиям для напряжений τ_{xt} , τ_{yt} , σ_t на внешних поверхностях плиты представляются в виде

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{3Q_{(1)x}}{2h} (p_1 - p_3), \quad x \neq y, \quad \sigma_z = \frac{R_0}{2h} (p_0 - p_2), \\ \sigma_x &= \frac{N_x}{2h} p_0, \quad x \neq y, \quad \tau_{xy} = \frac{S_{xy}}{2h} p_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь N_x , N_y , S_{xy} , $Q_{(1)x}$, $Q_{(1)y}$, R_0 — усредненные по толщине плиты силовые факторы; p_0 , p_1 , p_2 , p_3 — полиномы Лежандра [2].

В соответствии с количеством уравнений равновесия (2) и соотношений (3) выражение для перемещений u , v , w возьмем следующим образом:

$$u = u_0 p_0, \quad v = v_0 p_0, \quad w = w_1 p_1, \quad (4)$$

где

$$\{u_0, v_0\} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \{u, v\} p_0 dz, \quad w_1 = \frac{3}{2h} \int_{-h}^h w p_1 dz$$

— усредненные по толщине плиты перемещения. Температура в этом случае имеет вид

$$T(x, y, t) = T_0(x, y) p_0 + T_2(x, y) p_2, \quad (5)$$

где T_0 , T_2 — усредненные по толщине плиты характеристики температуры, определяемые формулами

$$T_0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T p_0 dz, \quad T_2 = \frac{5}{2h} \int_{-h}^h T p_2 dz. \quad (6)$$

Соотношения упругости для усредненных усилий получим из соотношений (1) с использованием формул (3) путем интегрирования по толщине плиты:

$$\begin{aligned} N_x &= B \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \lambda R_0 - 2E_0 h (\alpha_t + \nu' \alpha_t') T_0, \\ N_y &= B \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \lambda R_0 - 2E_0 h (\alpha_t + \nu' \alpha_t') T_0, \\ S_{xy} &= \frac{1-\nu}{2} B \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right), \\ K_0 &= \Omega_0' \left[\frac{w_1}{h} + \lambda \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right] - \Omega_0' (2\lambda \alpha_t + \alpha_t') \left(T_0 - \frac{1}{5} T_2 \right), \\ Q_{(1)x} &= \Lambda_0' \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad Q_{(1)y} = \Lambda_0' \frac{\partial w_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь обозначено:

$$B = \frac{2Eh}{1-\nu^2}; \quad \Omega_0' = \frac{5}{3} E_0' h; \quad \Lambda_0' = \frac{1}{2} k' G' h; \quad k' = \frac{14}{15}.$$

Подстановкой равенств (7) в уравнения (2) получим систему уравнений равновесия в усредненных перемещениях, которая после некоторых преобразований представляется в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2k} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{1-\nu}{2k} \right) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{5\nu\nu'}{6kh} \frac{\partial w_1}{\partial x} - \\ &- \frac{\kappa}{k} \left[\left(1 + \frac{5}{3} \nu' \lambda \right) \alpha_t + \frac{11}{6} \nu' \alpha_t' \right] \frac{\partial T_0}{\partial x} + \frac{\kappa\nu'}{6k} (2\lambda \alpha_t + \alpha_t') \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{1-\nu}{2k}\right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2k} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{5\nu\nu'}{6kh} \frac{\partial w_1}{\partial y} - \\
& - \frac{\kappa}{k} \left[\left(1 + \frac{5}{3} \nu' \lambda\right) \alpha_t + \frac{11}{6} \nu' \alpha_t' \right] \frac{\partial T_0}{\partial y} + \frac{\kappa\nu'}{6k} (2\lambda\alpha_t + \alpha_t') \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0, \\
& \Delta w_1 - \frac{\Omega_0'}{h^2 \Lambda_0'} w_1 + \frac{\lambda \Omega_0'}{h \Lambda_0'} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{5E_0'}{3\Lambda_0'} (2\lambda\alpha_t + \alpha_t') \left(T_0 - \frac{1}{5} T_2 \right) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad k = 1 + \frac{5}{6} \nu' \lambda; \quad \kappa = \frac{1-\nu^2}{1-\nu-2(\nu')^2 E/E'}.$$

Таким образом, термоупругое состояние трансверсально-изотропных плит в случае безмоментного напряженного состояния определяется системой дифференциальных уравнений (8) в усредненных перемещениях шестого порядка, т. е. на два порядка выше соответствующих уравнений плоской теории термоупругости [3, 4, 7].

В качестве примера рассмотрим трансверсально-изотропную плиту с круговым отверстием радиуса r_0 , находящуюся в среде с нулевой температурой. Вдоль контура отверстия ($r = r_0$) подводится равномерно распределенное количество тепла $W_0 = \text{const}$. На внешних поверхностях плиты имеет место теплообмен, который происходит по закону Ньютона [3], температура по толщине плиты не изменяется. При таких условиях в плите возникает безмоментное осесимметричное напряженное состояние. Так как контур отверстия свободен от нагрузок, то граничные условия записываются так:

$$N_r|_{r=r_0} = 0, \quad Q_{(1)r}|_{r=r_0} = 0. \tag{9}$$

Температурное поле в такой плите, как известно [3], имеет вид

$$T = \frac{W_0}{4\lambda_t \pi \sqrt{\text{Bi}} r_0} \frac{K_0\left(\sqrt{\text{Bi}} \frac{r}{h}\right)}{K_1\left(\sqrt{\text{Bi}} \frac{r_0}{h}\right)}, \tag{10}$$

где λ_t — коэффициент теплопроводности; $\text{Bi} = \frac{\alpha h}{\lambda_t}$ — критерий Био; α — коэффициент теплоотдачи; $K_0(x)$, $K_1(x)$ — функции Макдональда.

В полярной системе координат уравнения (8) с учетом выражений (6) и (10) запишутся в виде

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{a_1}{h} \frac{dw_1}{dr} = \alpha_t b_1 \frac{dT_0}{dr}, \tag{11}$$

$$\frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_1}{dr} - \frac{a_2}{h^2} w_1 + \frac{a_3}{h} \frac{du_0}{dr} = -\alpha_t b_2 T_0.$$

Здесь

$$a_1 = \frac{5\nu'\kappa}{6k}; \quad b_1 = \frac{\kappa}{k} \left(1 + \frac{5}{3} \nu' \lambda + \frac{11}{6} \nu' \frac{\alpha_t'}{\alpha_t} \right);$$

$$a_2 = \frac{10\nu'\kappa}{3(1-\nu^2)\lambda k'} \frac{E}{G}; \quad a_3 = \lambda a_2; \quad b_2 = \frac{a_3}{h} \left(2\lambda + \frac{\alpha_t'}{\alpha_t} \right).$$

Соотношения упругости (7) в этом случае выражаются так:

$$N_r = (B + \lambda^2 \Omega_0') \frac{du_0}{dr} + \frac{\lambda \Omega_0'}{h} w_1 - 2E_0 h \alpha_t \left(1 + \frac{5}{3} \nu' \lambda + \frac{11}{6} \nu' \frac{\alpha_t'}{\alpha_t} \right) T_0,$$

$$N_r - N_\theta = (1-\nu) B \frac{du_0}{dr}, \quad Q_{(1)r} = \Lambda_0' \frac{dw_1}{dr}, \quad Q_{(1)\theta} = 0, \quad S_{r\theta} = 0. \tag{12}$$

Решение задачи состоит в нахождении перемещений u_0, ω_1 из уравнений (11) при удовлетворении граничным условиям на контуре отверстия (9). После этого на контуре отверстия находим

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta}^{(0)} \frac{r_0 \sqrt{Bi}}{(1+\nu)h} \left[\sqrt{\frac{Bi}{c_1}} \frac{a_1 c_2 h}{c_1 - Bi} \frac{K_0 \left(\sqrt{c_1} \frac{r_0}{h} \right)}{K_1 \left(\sqrt{c_1} \frac{r_0}{h} \right)} + \left(b_1 - \frac{a_1 c_2 h}{c_1 - Bi} \right) \frac{K_0 \left(\sqrt{Bi} \frac{r_0}{h} \right)}{K_1 \left(\sqrt{Bi} \frac{r_0}{h} \right)} \right], \quad (13)$$

где

$$\sigma_{\theta}^{(0)} = -\frac{\alpha_t E W_0 h}{4 \lambda_t \pi r_0^2 Bi}; \quad c_1 = \frac{10 \nu' \kappa}{3(1-\nu^2) \lambda k'} \left(1 + \frac{5 \lambda \nu' \kappa}{6k} \right) \frac{E}{G'};$$

$$c_2 = \frac{10 \nu' \kappa}{3(1-\nu^2) \lambda k' h} \left\{ \lambda \left[2 + \frac{\kappa}{k} \left(1 + \frac{5}{3} \nu' \lambda \right) \right] + \left(1 + \frac{11}{6} \nu' \right) \frac{\alpha_t'}{\alpha_t} \right\} \frac{E}{G'}.$$

Из выражения (13) следует, что напряженное состояние плиты с круговым отверстием зависит от параметров E/G' , E/E' , характеризующих податливость материала плиты поперечным сдвиговым и нормальным деформациям, отношения линейных температурных удлинений α_t'/α_t , критерия Bi и относительных параметров отверстий r_0/h . Если принять $E/E' = 0$, $E/G' = 0$, $\alpha_t' = 0$, то из выражения (13) получим [3]

$$\sigma_{\theta}^{(пл)} = \sigma_{\theta}^{(0)} \frac{r_0 \sqrt{Bi}}{h} \frac{K_0 \left(\sqrt{Bi} \frac{r_0}{h} \right)}{K_1 \left(\sqrt{Bi} \frac{r_0}{h} \right)}. \quad (14)$$

По формулам (13) проведены численные расчеты для некоторых геометрических, физико-механических и температурных параметров материала плиты и построены графические зависимости напряжения $\sigma_{\theta}^* = \sigma_{\theta}/\sigma_{\theta}^{(0)}$ в зависимости от от-

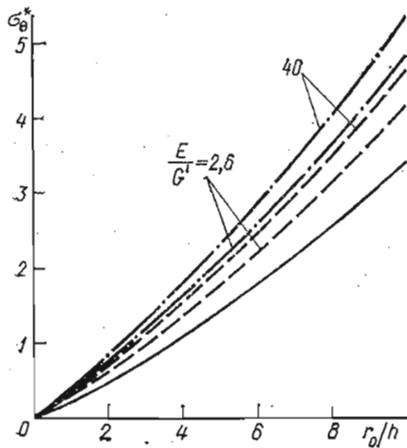


Рис. 1

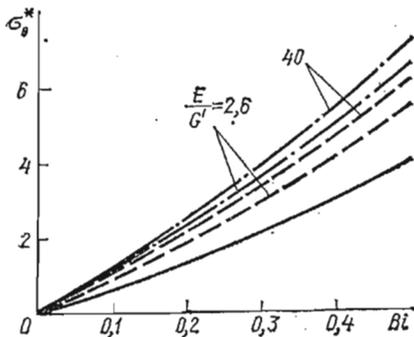


Рис. 2

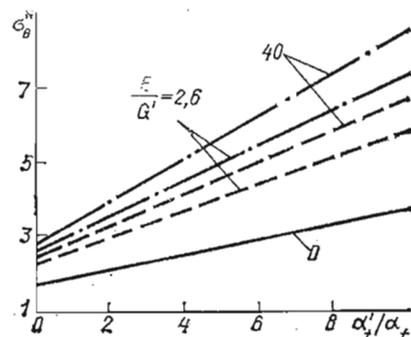


Рис. 3

носительного размера отверстия, упругих и тепловых свойств материала плиты (рис. 1—3).

На рис. 1 представлены графики изменения напряжения σ_{θ}^* на контуре отверстия в зависимости от относительного размера отверстия r_0/h при $\nu' =$

$= \nu = 0,3$, $Bi = 0,25$. На рис. 2 показано изменение напряжения σ_{θ}^* на контуре отверстия в зависимости от критерия Bi при $r_0/h = 6$, $\nu' = \nu = 0,3$. На рис. 1, 2 штриховые линии построены при $\alpha_i/\alpha_e = 1$, $E/E' = 1$, штрихпунктирные — при $\alpha_i/\alpha_e = 1$, $E/E' = 3$.

На рис. 3 изображено изменение напряжений σ_{θ}^* на контуре отверстия в зависимости от отношений линейных температурных удлинений α_i/α_e при $r_0/h = 6$, $\nu' = \nu = 0,3$, $Bi = 0,25$. На рис. 3 штриховая линия соответствует параметру $E/E' = 1$, штрихпунктирная — $E/E' = 3$. Сплошными линиями на рис. 1—3 приведены результаты работы [3]. Как следует из рис. 1—3, напряжения σ_{θ}^* увеличиваются с ростом параметров податливости материала плиты поперечным сдвиговым и нормальным деформациям, относительных размеров отверстия, критерия Био и отношения линейных температурных удлинений.

1. Векуа И. Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины.— Тр. Тбил. мат. ин-та, 1965, 30, с. 3—102.
2. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения.— М.: Физматгиз, 1963.— 358 с.
3. Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями.— М.: Физматгиз, 1958.— 167 с.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Изд-во АН УССР, 1954.— 647 с.
5. Пелех Б. Л., Полевой Б. Н. Обобщенные уравнения температурного изгиба пластин с учетом трансверсальных механических характеристик и их приложения в задачах концентрации напряжений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 1, с. 38—42.
6. Пелех Б. Л., Сухорольский М. А. Об одном новом подходе к построению теории оболочек с учетом граничных условий на поверхностях.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 5, с. 444—447.
7. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости.— Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1972.— 200 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
21.02.79

УДК 539.377

Н. И. Бугрий

О ПРИМЕНЕНИИ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Приведение уравнений трехмерной задачи теплопроводности к двумерной можно выполнить различными методами. Например, в работах [7, 8] вывод уравнений теплопроводности пластин и оболочек производится с использованием операторного метода в комплексе с методом усреднения температуры по толщине. Уравнения нестационарной теплопроводности получены в [1—4] на основе вариационных принципов. Предположение о полиномиальном законе распределения температуры по толщине пластин и оболочек использовано, в частности, в работах [5, 6]. В данной работе на основании вариационного принципа, эквивалентного краевым задачам нестационарной теплопроводности, построена приближенная система уравнений и краевых условий для тонких оболочек при заданном законе изменения температуры по толщине. В отличие от [1, 2], вариационный принцип устанавливается с применением преобразования Лапласа к исходным соотношениям краевой задачи теплопроводности.

Рассмотрим тонкостенную изотропную оболочку постоянной толщины $2h$, отнесенную к смешанной ортогональной криволинейной системе координат (α, β, γ) . Влиянием кривизны оболочки на температурное поле будем пренебрегать. Построим функционал, экстремали которого удовлетворяют