

где

$$I = \frac{W_0 r_0}{\lambda h \sigma_{mn}^2 c_n q_m} \int_0^{2\pi} \left[\cos p_n (x_0 - r_0 \cos t) + \frac{\gamma_1}{p_n} \sin p_n (x_0 - r_0 \cos t) \right] \times \\ \times \left[\cos \lambda_m (y_0 - r_0 \sin t) + \frac{\gamma_2}{\lambda_m} \sin \lambda_m (y_0 - r_0 \sin t) \right] dt.$$

Аналогично можно решить сформулированную задачу и при других граничных условиях на механические переменные.

1. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Э. Обобщенные функции.— М.: Физматгиз, 1958.— Вып. I. 440 с.
2. Заболотный В. П., Ханко Б. С. Тепловые напряжения в изгибаемой пластинке, обусловленные источником тепла в форме линии.— В кн.: Математические методы в термомеханике. Киев: Наук. думка, 1978, с. 182—189.
3. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек.— Киев: Наук. думка, 1978.— 344 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
07.01.81

УДК 539.3

А. Г. Горшков, А. В. Горюнов, Р. Е. Либерзон

ОДНОСТОРОННИЙ НАГРЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, на которую перпендикулярно ее оси падает импульсный тепловой поток от бесконечно удаленного источника излучения. Считаем, что по толщине оболочки температура постоянна, теплообмен излучением отсутствует, конвективный теплообмен между оболочкой и окружающей средой происходит по закону Ньютона. Тогда искомая функция распределения температуры t в оболочке будет являться решением дифференциального уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} + \frac{\varepsilon q (Fo)}{h} \eta(s) \sin \pi s - G \vartheta, \\ \vartheta = \frac{t \lambda}{l q_m^0}, \quad q (Fo) = \frac{q^0 (Fo)}{q_m^0}, \quad Fo = \frac{\alpha \tau}{l^2}, \quad l = \pi R, \quad s = \frac{s_1}{l}, \quad (1) \\ h = \frac{\delta}{l}, \quad G = \frac{\alpha l^2}{\lambda \delta}$$

при следующих начальном и граничных условиях:

$$\vartheta(s, 0) = \vartheta_0, \quad \partial \vartheta / \partial s|_{s=\pm 1/2} = 0. \quad (2)$$

Здесь τ — время; R — радиус оболочки; Fo — критерий Фурье; ε — степень черноты поверхности оболочки; $q^0 (Fo)$ — тепловой поток; $\eta(s)$ — функция Хевисайда; λ — коэффициент теплопроводности материала оболочки; q_m^0 — максимальное значение теплового потока; α — коэффициент температуропроводности материала оболочки; s_1 — криволинейная координата на торцевом сечении оболочки; δ — толщина оболочки; α — коэффициент теплоотдачи.

Пусть $\alpha = 0$. Тогда, используя преобразование Лапласа по времени [3], решение уравнения (1) при нулевом начальном условии $\vartheta_0 = 0$ можно представить в форме

$$\vartheta = \frac{\varepsilon}{h} \eta(s) \sin(\pi s) \int_0^{Fo} q(s) e^{-\pi^2(Fo-\xi)} d\xi - \frac{\varepsilon \sqrt{\pi}}{2h} \int_0^{Fo} [\Phi(Fo, Fo) -$$

$$\begin{aligned}
& - \Phi(Fo, \zeta)] \exp\left(\frac{4\pi^2 \zeta^2 - s^2}{4\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} + \frac{\varepsilon \sqrt{\pi}}{2h} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{Fo} \frac{1 + e^{-n|s|/\zeta}}{\sqrt{\zeta}} [\Phi(Fo, Fo) - \\
& - \Phi(Fo, \zeta)] \exp\left[\frac{4\pi^2 \zeta^2 - (n - |s|)^2}{4\zeta}\right] d\zeta, \quad \Phi(Fo, \zeta) = \int_0^{Fo} e^{-\pi^2 \zeta} q(Fo - \zeta) d\zeta. \quad (3)
\end{aligned}$$

Температурные напряжения пропорциональны градиентам температурных полей в конструкции, а в случае импульсного нагрева градиенты температуры будут достигать экстремальных значений в начальные моменты времени. Поэтому в задачах определения температурных полей большой практический интерес представляют асимптотические решения для малых значений времени.

С использованием теоремы о предельных значениях для интегрального преобразования Лапласа находим асимптотическое решение задачи для малых значений Fo , которое без учета малых членов может быть записано следующим образом:

$$\vartheta = \frac{\varepsilon}{h} \eta(s) \sin(\pi s) \int_0^{Fo} q(\zeta) d\zeta. \quad (4)$$

Отметим, что в случае импульсного нагрева функция распределения температуры в оболочке при малых значениях времени может быть представлена в виде

$$\vartheta = \frac{\varepsilon}{h} \cos \beta \int_0^{Fo} q(\zeta) d\zeta, \quad (5)$$

где β — угол падения теплового потока на поверхность оболочки. Аналогичный результат получен в работе [2].

Как показали расчеты, теплопроводность можно не учитывать при $Fo \leq 10^{-3}$. Максимальная ошибка при этом не будет превышать 5%. Причем ошибка в определении максимального значения температуры (на образующей $s = 1/2$) будет менее 1%. Максимальная ошибка будет получена на образующей $s = 0$, т. е. на границе освещенной и затененной частей оболочки. Ошибки на этой образующей не будут превышать 10% при $Fo = 3 \times 10^{-3}$ и 20% при $Fo = 1,6 \cdot 10^{-2}$. Ошибки в определении максимального значения температуры не будут превышать 5% при $Fo = 5 \cdot 10^{-3}$, 10% при $Fo = 10^{-2}$ и 20% при $Fo = 0,023$.

Пусть $\alpha \neq 0$ и температура оболочки в начальный момент времени равна температуре среды, которую примем за нулевую температуру. Температура среды остается постоянной в рассматриваемом интервале времени.

Решая краевую задачу (1), (2) ($\vartheta_0 = 0$) аналогичным образом, получаем асимптотическое решение задачи при малых значениях Fo :

$$\vartheta = \frac{\varepsilon}{h} \eta(s) \sin(\pi s) e^{-GFo} \int_0^{Fo} q(\zeta) e^{G\zeta} d\zeta. \quad (6)$$

Эта формула также не учитывает явление теплопроводности. Ею следует пользоваться, когда конвективный теплообмен между оболочкой и средой происходит достаточно интенсивно. Критерием интенсивности может служить величина $Fo^* = GFo = \alpha l / (h c \gamma)$ (c, γ — удельная теплоемкость и плотность материала оболочки). При $Fo^* \geq 0,5$ конвективный теплообмен во время действия импульса следует учитывать. Величина ошибки при пренебрежении явлением конвективного теплообмена зависит также от функции теплового потока (от формы импульса).

Изучим процесс остывания цилиндрической оболочки после импульсного нагрева. Как и раньше, будем считать, что температура среды равна нулю. Тогда в дифференциальном уравнении теплопроводности (1) следует

положить равным нулю второе слагаемое в правой части; безразмерная температура будет определяться соотношением $\vartheta' = t/T_{\max}$, где T_{\max} — максимальное значение температуры оболочки в момент прекращения действия импульса.

Начальное условие с учетом формул (5), (6) запишем так: $\vartheta_0 = \eta(s) \times \sin \pi s$. На основе преобразования Лапласа по временной координате получим точное решение сформулированной задачи:

$$\vartheta' = \eta(s) \sin \pi s e^{-(G+\pi^2)Fo} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-(G+\pi^2)Fo} \int_0^{Fo} e^{-(s^2/4\zeta - \pi^2\zeta)} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-(G+\pi^2)Fo} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{Fo} \frac{1 + e^{-n|s|/\zeta}}{\sqrt{\zeta}} \exp\left[-\frac{(n-|s|)^2}{4\zeta} - \pi^2\zeta\right] d\zeta. \quad (7)$$

На рис. 1, а, б представлены графики функции ϑ' соответственно при $G = 10, 1000$. В случае интенсивного конвективного теплообмена (при больших значениях G) решение задачи можно упростить. Считая $G \gg \pi^2$ при переходе от изображений к оригиналам, получаем асимптотическое решение в виде $\vartheta' = \eta(s) \sin(\pi s) e^{-Fo}$.

На основании изложенного выше задачу определения температурного поля тонкостенной цилиндрической оболочки при импульсном нагреве можно разбить на два этапа: определение температурного поля во время действия импульса (на этом этапе явление теплопроводности не учитывается) и определение температурного поля после прекращения импульса [1].

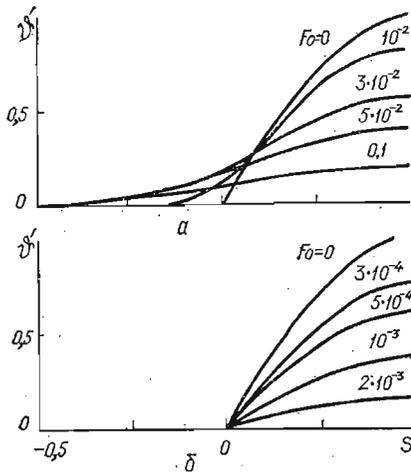


Рис. 1

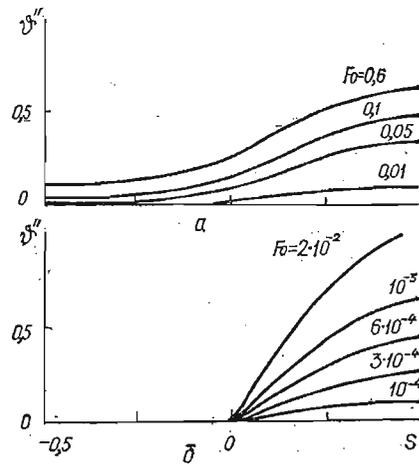


Рис. 2

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, находящуюся в среде с кусочно-гладкой функцией распределения температуры, которая может быть аппроксимирована функцией $t_c = T_c \eta(s) \sin \pi s$. В этом случае в дифференциальном уравнении (1) следует принять $\vartheta'' = t/T_c$ и $eq(Fo)/h = G$. Решение уравнения (1) будем искать при нулевом начальном условии $\vartheta_0'' = 0$ и соответствующих граничных условиях (2).

Точное решение данной краевой задачи может быть представлено в виде

$$\vartheta'' = \frac{G\sqrt{\pi}}{2(G+\pi^2)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{Fo} \exp\left[-\frac{(n-|s|)^2}{4\zeta} - G\zeta\right] \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} - e^{-(G+\pi^2)Fo} \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{Fo} \exp\left[\pi^2\zeta - \frac{(n-|s|)^2}{4\zeta}\right] \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{Fo} \exp\left[-\frac{(n+|s|)^2}{4\zeta} - G\zeta\right] \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} - \right.$$

$$-e^{-(G+\pi^2)Fo} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{Fo} \exp \left[\pi^2 \xi - \frac{(n-|s|)^2}{4\xi} \right] \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \left\{ + \right. \\ \left. + \frac{G}{G+\pi^2} [1 - e^{-(G+\pi^2)Fo}] \eta(s) \sin \pi s. \right. \quad (8)$$

На рис. 2, а, б представлены графики функции ϑ'' соответственно при $G = 10, 1000$.

Рассмотрим предыдущую задачу, считая режим нагрева установившимся. В дифференциальном уравнении теплопроводности в этом случае следует принять $\partial \vartheta'' / \partial Fo = 0$. Решение краевой задачи может быть записано следующим образом:

$$\vartheta'' = \frac{G}{G+\pi^2} \eta(s) \sin \pi s + \frac{\pi \sqrt{G}}{2(G+\pi^2)} \left\{ e^{-|s|\sqrt{G}} + \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-(n-|s|)\sqrt{G}} + e^{-(n+|s|)\sqrt{G}}] \right\} \quad (9)$$

Исследуем температурное поле в цилиндрической оболочке, на которую перпендикулярно ее оси падает кратковременный импульсный тепловой поток от бесконечно удаленного источника излучения, когда теплофизические константы материала оболочки зависят от температуры. Запишем дифференциальное уравнение теплопроводности для этого случая в виде

$$\frac{\partial \vartheta''}{\partial Fo} = \frac{1}{c_1} \frac{\partial}{\partial s} \left(\lambda_1 \frac{\partial \vartheta''}{\partial s} \right) + \frac{eq(Fo)}{hc_1} \eta(s) \sin \pi s - G_t \vartheta''', \\ \vartheta''' = \frac{t\lambda_0}{lq_m^0}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad c_1 = \frac{c}{c_0}, \quad G_t = \frac{\alpha l^2}{a_0 c \gamma h}. \quad (10)$$

Здесь величины с нижним нулевым индексом определяются при $t = 0$. Задачу будем решать при однородных начальном и граничных условиях.

Найдем асимптотическое решение задачи для малых значений времени. Из формулы (6) видно, что при малых значениях критерия Fo явление теплопроводности не успевает проявиться. Считаем также, что тепловой импульс достаточно кратковременный, чтобы явление конвективного теплообмена не успело существенно повлиять на функцию распределения температуры. Опуская соответствующие этим двум явлениям члены в уравнении теплопроводности (10) и интегрируя его, получаем

$$\vartheta''' = \int_0^{Fo} \frac{e}{hc_1} q(\xi) \eta(s) \sin \pi s d\xi. \quad (11)$$

Рассмотрим задачу определения температурного поля цилиндрической оболочки после прекращения теплового импульса. Считаем, что конвективный теплообмен между оболочкой и средой происходит достаточно интенсивно ($G_t \gg \pi^2$). Тогда, интегрируя уравнение (10), находим

$$\vartheta''' = \vartheta_0''' e^{-F}, \quad F = \int_0^{Fo} G_t d\xi. \quad (12)$$

Если теплофизические константы изменяются слабо и их можно считать постоянными, то выражения (11), (12) совпадают с решениями соответствующих линейных задач теплопроводности. На основе полученных результатов далее могут быть определены напряжения в оболочке.

1. Горюнов А. В. Температурное поле цилиндрической оболочки при импульсном нагреве. — Тр. Моск. авиац. ин-та, 1977, № 416, с. 28—35.
2. Григорьев Б. А. Импульсный нагрев излучениями. — М.: Наука, 1974. — Ч. 2. 728 с.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высш. школа, 1967. — 600 с.