$K_\lambda = K_E = 0{,}5$; кривые 3 — при $K = K_E$, $K_\lambda = 0{,}5$, $K_\alpha = 2$. При этом было принято $\mathrm{Bi}_1 = 0{,}01$, $\mathrm{Bi}_2 = 0{,}04$. Из графиков видно, что величина температурных напряжений резко изменяется при $0 < K_\lambda < 1$, а при $3 < K_\lambda < 10$ практически не изменяется. Изменение критериев K_α, K_E существенно влияет на величину температурных напряжений.

1. *Коляно Ю. М.* Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно-однородных тел.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 7—11.
2. *Коляно Ю. М., Кулик А. Н., Кушнир Р. М.* О постановке обобщенной задачи сопряжения для уравнений термоупругости кусочно-однородных тел.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 2, с. 44—49.
3. *Коляно Ю. М., Кушнир Р. М.* Уравнения теплопроводности и термоупругости неоднородных и кусочно-однородных пластин с прямолинейной анизотропией.— В кн.: Обобщенные функции в термоупругости. Киев : Наук. думка, 1980, с. 19—34.
4. *Кушнир Р. М.* О построении решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 9, с. 55—59.
5. *Лавренюк В. И.* К решению пространственной квазистатической задачи термоупругости для кусочно-однородных тел.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, № 3, 1979, с. 63—69.
6. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела.— М. : Наука, 1977.— 416 с.
7. *Ломакин В. А., Лавренюк В. И.* Об одном способе решения плоских задач теории упругости кусочно-однородных тел.— Прикл. механика, 1979, 15, № 7, с. 62—67.
8. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Кушнир Р. М.* Об одном методе составления уравнений термоупругости кусочно-однородных тел и построения их решений.— В кн.: XV науч. совещ. по тепловым напряжениям в элементах конструкций : Тез. докл. Киев : Наук. думка, 1980, с. 71—72.
9. *Попович В. С.* Термоупругость кусочно-однородных тел с плоскопараллельными границами раздела : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1978.— 21 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 26.11.80

УДК 539.377

Б. С. Хапко

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКЕ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЙ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Вопрос нахождения температурных полей и напряжений в пластинках с источниками тепла, распределенными по произвольной кривой, с учетом конвективного теплообмена с поверхностей исследован еще недостаточно. В работе [2] получены решения задачи для круглой пластинки нагреваемой источниками тепла по куску круговой дуги или вдоль радиуса. В настоящей работе приведен способ определения прогибов прямоугольных пластинок, вызванных источниками тепла, распределенными по произвольной кривой.

Определение нестационарного температурного поля. Рассмотрим прямоугольную пластинку толщиной h, находящуюся под действием источников тепла плотности $W(x, y, \tau)$, распределенными по кривой. На поверхностях пластинки и контуре, который предполагается свободно опертым, задается теплообмен по закону Ньютона. Температурное поле в рассматриваемой пластинке описывается линейным уравнением [3]

$$\Delta T - \varkappa^2 (T - t_c) = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{W}{\lambda h} \tag{1}$$

при краевых условиях

$$\frac{\partial T}{\partial x} \mp \gamma_i (T - T_c^i) = 0, \quad x = 0,\ l,\ i = 1,\ 2; \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \mp \gamma_i (T - T_c^i) = 0, \quad y = 0,\ b,\ i = 3,\ 4 \tag{3}$$

и начальном условии

$$T = 0,\ \tau = 0, \tag{4}$$

где $\varkappa^2 = \frac{\alpha^*}{\lambda h}$; $\gamma_i = \frac{\alpha_i}{\lambda}$; λ — коэффициент теплопроводности; a — коэффициент температуропроводности; α_i — коэффициент теплоотдачи с поверхностей; T_c^i, t_c — температуры сред, омывающих поверхности пластинки; $\alpha^* = \alpha_i$; τ — время.

Функцию $W(x, y, \tau)$ представим в виде

$$W(x, y, \tau) = \begin{cases} W(x, y, \tau) & \text{при } x,\ y \in C, \\ 0 & \text{при } x,\ y \in \Omega \setminus C. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь Ω — плоскость, занятая пластинкой; $C = \{(x, y) : y = f(x)\}$ — кривая на плоскости Ω; $0 \leqslant |f'(x)| < \infty$.

Общее количество тепла, которое выделяется источниками, распределенными по кривой, выражается формулой

$$\int_C W dx dy. \tag{6}$$

В соответствии с выражениями (5), (6) функцию $W(x, y, \tau)$ представим в виде

$$W(x, y, \tau) = W_0 W_1(x, y, \tau)\, \delta(y - f(x)), \tag{7}$$

где W_0 — постоянная; $W_1(x, y, \tau)$ — бесконечно дифференцируемая функция.

Функция $W(x, y, \tau)$, построенная таким образом, является обобщенной функцией [1], т. е. определяем линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций

$$(W(x, y, \tau), \rho(x, y)) = (W_0 W_1(x, y, \tau)\, \delta(y - f(x)), \rho(x, y)) =$$
$$= \iint_\Omega W_0 W_1(x, y, \tau)\, \delta(y - f(x))\, \varphi(x, y)\, dx dy =$$
$$= W_0 \int_0^l W_1(x, f(x), \tau)\, \varphi(x, f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{8}$$

Формула (8) определяет количество тепла, которое выделяют источники вдоль кривой C. Отсюда следует, что обобщенная функция $\delta(y - f(x))$ имеет фильтрующее свойство. Она выбирает значения функции $\varphi(x, y)$ для аргументов (x, y), которые принадлежат кривой C.

Применяя к выражениям (1) — (3) конечное интегральное преобразование

$$T^{**} = \frac{1}{c_n q_m} \int_0^l \int_0^b T K(p_n x) M(\lambda_m y)\, dx dy, \tag{9}$$

получаем уравнение

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T^{**}}{\partial \tau} + \sigma_{mn}^2 T^{**} = W^{**} + \varkappa^2 t_c^{**} + \frac{1}{c_n} (\gamma_2 T_c^{2**} K(p_n l) + \gamma_1 T_c^{1**}) +$$
$$+ \frac{1}{q_m} (\gamma_4 T_c^{4*} M(\lambda_m b) + \gamma_3 T_c^{3*}) \tag{10}$$

при начальном условии

$$T^{**} = 0,\ \tau = 0. \tag{11}$$

Здесь введены обозначения

$$c_n^2 = \frac{1}{2p_n^2}\left[(p_n^2 + \gamma_1^2)\left(l + \frac{\gamma_2}{p_n^2 + \gamma_2^2}\right) + \gamma_1\right]; \quad q_m = \frac{1}{2\lambda_m^2}\left[(\lambda_m^2 + \gamma_3^2) \times\right.$$
$$\left.\times \left(b + \frac{\gamma_4}{\lambda_m^2 + \gamma_4^2}\right) + \gamma_3\right]; \quad K(p_n x) = \cos p_n x + \frac{\gamma_1}{p_n} \sin p_n x;$$

4 2—118

$$M(\lambda_m y) = \cos\lambda_m y + \frac{\gamma_3}{\lambda_m}\sin\lambda_m y; \quad T_c^{i**} = \frac{1}{q_m}\int_0^b T_c^i M(\lambda_m y)\,dy,$$

$$i = 1,\ 2; \quad T_c^{i*} = \frac{1}{c_n}\int_0^b T_c^i K(p_n x)\,dx, \quad i = 3,\ 4;$$

$$W^{**} = \frac{W_0}{c_n q_m \lambda h}\int_0 W_1(x, f(x), \tau)\,K(p_n x)\,M(\lambda_m f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx;$$

$$t_c^{**} = \frac{1}{c_n q_m}\int_0^l\int_0^b t_c K(p_n x)\,M(\lambda_m y)\,dx dy; \quad \sigma_{mn}^2 = p_n^2 + \lambda_m^2 + \varkappa^2,$$

где p_n — положительный корень уравнения $\operatorname{tg} pl = \frac{p(\gamma_1 + \gamma_2)}{p^2 - \gamma_1\gamma_2}$;

λ_m — положительный корень уравнения $\frac{\lambda(\gamma_3 + \gamma_4)}{\lambda^2 - \gamma_3\gamma_4} = \operatorname{tg}\lambda b$.

Решая уравнение (10) с учетом (11) и применяя обратные интегральные преобразования, получаем решение задачи (1) — (4):

$$T = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} K(p_n x)\,M(\lambda_m y)\,a\int_0^\tau \Big[W^{**}(t) + \frac{1}{c_n}(\gamma_2 T_c^{2**}(t)\,K(p_n l) + \gamma_1 T_c^{1**}(t) +$$

$$+ \frac{1}{q_m}(\gamma_4 T_c^{4*}(t)\,M(\lambda_m b) + \gamma_3 T_c^{3*}(t)) + \varkappa^2 t_c^{**}(t)\Big] e^{-a\sigma_{mn}^2(\tau - t)}dt. \qquad (12)$$

Определение прогибов пластинки. Колебания пластинки, вызванные нестационарным температурным полем (12), определим из дифференциального уравнения

$$\Delta\Delta w + \frac{hE\alpha}{(1-\nu)D}\Delta T + \frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2} = 0 \qquad (13)$$

при краевых условиях

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h^2 E\alpha}{(1-\nu)D}T = 0, \quad x = 0,\ l, \qquad (14)$$

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h^2 E\alpha}{(1-\nu)D}T = 0, \quad y = 0,\ b \qquad (15)$$

и начальных условиях

$$w = \frac{\partial w}{\partial\tau} = 0, \quad \tau = 0. \qquad (16)$$

Применяя к выражениям (13) — (15) конечное интегральное преобразование

$$w^{**} = \frac{1}{d_k g_s}\int_0^l\int_0^b w\sin\alpha_k x\sin\beta_s y\,dx dy \qquad (17)$$

и решая уравнение (13) относительно τ с учетом (16), получаем

$$w^{**} = \frac{h^2 E\alpha}{(1-\nu)\sqrt{D\rho h}}\int_0^\tau T^{**}(t)\sin\Big[\sqrt{\frac{D}{\rho h}}(\alpha_k^2 + \beta_s^2)(\tau - t)\Big]dt. \qquad (18)$$

Переходя к оригиналу, находим

$$w(x, y, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} w^{**}\sin\alpha_k x\sin\beta_s y, \qquad (19)$$

где

$$T^{**} = \frac{1}{d_k g_s}\int_0^l\int_0^b T\sin\alpha_k x\sin\beta_s y\,dx dy; \quad d_k = \frac{l}{2}; \quad g_s = \frac{b}{2}.$$

П р и м е р 1. Пусть источники тепла распределены по прямой $y = cx$. Температуры сред, омывающих пластинку, принимаем нулевыми. Тогда из выражения (12) находим

$$T = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} K(p_n x) M(\lambda_m y)(1 - e^{-a\sigma_{mn}^2 \tau}) A_{mn} \text{ при } p_n^2 \neq (c\lambda_m)^2, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} K(p_n x) M(\lambda_m y)(1 - e^{-a\sigma_{mn}^2 \tau}) B_{mn} \text{ при } p_n^2 = (c\lambda_m)^2. \end{cases}$$

Соответственно прогиб пластинки имеет вид

$$w = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \sin \alpha_k x \sin \beta_s y \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_{mn} Q_{kn} C_{sm} \Phi(\tau) \text{ при } p_n^2 = (c\lambda_m)^2 \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \sin \alpha_k x \sin \beta_s y \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} B_{mn} N_{kn} P_{sm} \Phi(\tau) \text{ при } p_n^2 = (c\lambda_m)^2, \end{cases}$$

где

$$A_{mn} = \frac{W_0 \sqrt{1 + c^2}}{2c_n q_m \sigma_{mn}^2 \lambda h} \left\{ \frac{1 - \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\lambda_m p_n}}{p_n + c\lambda_m} \sin(p_n + c\lambda_m) l + \right.$$

$$+ \frac{1 + \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\lambda_m p_n}}{p_n - c\lambda_m} \sin(p_n - c\lambda_m) l - \frac{\frac{\gamma_1}{p_n} + \frac{\gamma_3}{\lambda_m}}{p_n + c\lambda_m} [\cos(p_n - c\lambda_m) l - 1] -$$

$$\left. - \frac{\frac{\gamma_1}{p_n} - \frac{\gamma_3}{\lambda_m}}{p_n + c\lambda_m} [\cos(p_n + c\lambda_m) l - 1] \right\}, \quad B_{mn} = \frac{W_0 \sqrt{1 + c^2}}{c_n q_m \sigma_{mn}^2 \lambda h} \times$$

$$\times \left[\frac{l}{2} \left(1 + \frac{\gamma_1 \gamma_3}{p_n \lambda_m} \right) + \frac{1}{4p_n} \left(\frac{\gamma_1}{p_n} + \frac{\gamma_3}{\lambda_m} \right) + \frac{1}{4p_n} \left(1 - \frac{\gamma_1 \gamma_3}{p_n \lambda_m} \right) \sin 2p_n l - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4p_n} \left(\frac{\gamma_1}{p_n} + \frac{\gamma_3}{\lambda_m} \right) \cos 2p_n l \right], \quad Q_{nk} = \frac{1}{2(p_n + \alpha_k)} \left[1 - \cos(p_n + \alpha_k) l - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma_1}{p_n} \sin(p_n + \alpha_k) l \right] + \frac{1}{2(p_n - \alpha_k)} \left[1 - \cos(p_n - \alpha_k) l + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_1}{p_n} \sin(p_n - \alpha_k) l \right], \quad C_{sm} = \frac{1}{2(\lambda_m + \beta_s)} \left[1 - \cos(\lambda_m + \beta_s) b - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma_3}{\lambda_m} \sin(\lambda_m + \beta_s) b + \frac{1}{2(\lambda_m - \beta_s)} \left[1 - \cos(\lambda_m - \beta_s) b + \frac{\gamma_3}{\lambda_m} \sin(\lambda_m + \beta_s) b \right] \right],$$

$$N_{kn} = \frac{1}{4p_n} (1 + 2\gamma_1 l - \cos 2p_n l - \sin 2p_n l),$$

$$P_{sm} = \frac{1}{4\lambda_m} (1 + 2\gamma_3 b - \cos 2\lambda_m b - \sin 2\lambda_m b), \quad \Phi(\tau) =$$

$$= \frac{hE\alpha bl}{4(1 - \nu)\sqrt{D\rho h}} \left[\frac{1}{F_{ks}} (1 - \cos F_{ks}\tau) - \frac{1}{a^2 \sigma_{mn}^4 + F_{ks}^2} (F_{ks} e^{-a\sigma_{mn}^2 \tau} - \right.$$

$$\left. - a\sigma_{mn}^2 \sin F_{ks}\tau - F_{ks} \cos F_{ks}\tau) \right], \quad F_{ks} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} (\alpha_k^2 + \beta_s^2).$$

П р и м е р 2. Если источники тепла распределены по кругу радиуса r_0 с центром в точке (x_0, y_0), то в силу выражений (12), (19) находим

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K(p_n x) M(\lambda_m y)(1 - e^{-a\sigma_{mn}^2 \tau}) I,$$

$$w = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \sin \alpha_k x \sin \beta_s y \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} Q_{kn} C_{sm} I \Phi(\tau), \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \sin \alpha_k x \sin \beta_s y \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} N_{kn} P_{sm} I \Phi(\tau), \end{cases}$$

где

$$I = \frac{W_0 r_0}{\lambda h \sigma_{mn}^2 c_n q_m} \int_0^{2\pi} \left[\cos p_n (x_0 - r_0 \cos t) + \frac{\gamma_1}{p_n} \sin p_n (x_0 - r_0 \sin t)\right] \times$$

$$\times \left[\cos \lambda_m (y_0 - r_0 \sin t) + \frac{\gamma_3}{\lambda_m} \sin \lambda_m (y_0 - r_0 \sin t)\right] dt.$$

Аналогично можно решить сформулированную задачу и при других граничных условиях на механические переменные.

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Э.* Обобщенные функции.— М. : Физматгиз, 1958.— Вып. I. 440 с.
2. *Заболотный В. П., Хапко Б. С.* Тепловые напряжения в изгибаемой пластинке, обусловленные источником тепла в форме линии.— В кн.: Математические методы в термомеханике. Киев : Наук. думка, 1978, с. 182—189.
3. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек.— Киев : Наук. думка, 1978.— 344 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 07.01.81

УДК 539.3

А. Г. Горшков, А. В. Горюнов, Р. Е. Либерзон

ОДНОСТОРОННИЙ НАГРЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, на которую перпендикулярно ее оси падает импульсный тепловой поток от бесконечно удаленного источника излучения. Считаем, что по толщине оболочки температура постоянна, теплообмен излучением отсутствует, конвективный теплообмен между оболочкой и окружающей средой происходит по закону Ньютона. Тогда искомая функция распределения температуры t в оболочке будет являться решением дифференциального уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} + \frac{\varepsilon q(\mathrm{Fo})}{h} \eta(s) \sin \pi s - G\vartheta,$$

$$\vartheta = \frac{t\lambda}{l q_m^0}, \; q(\mathrm{Fo}) = \frac{q^0(\mathrm{Fo})}{q_m^0}, \; \mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{l^2}, \; l = \pi R, \; s = \frac{s_1}{l}, \quad (1)$$

$$h = \frac{\delta}{l}, \; G = \frac{\alpha l^2}{\lambda \delta}$$

при следующих начальном и граничных условиях:

$$\vartheta(s, 0) = \vartheta_0, \; \partial\vartheta/\partial s|_{s=\pm 1/2} = 0. \quad (2)$$

Здесь τ — время; R — радиус оболочки; Fo — критерий Фурье; ε — степень черноты поверхности оболочки; q^0 (Fo) — тепловой поток; $\eta(s)$ — функция Хевисайда; λ — коэффициент теплопроводности материала оболочки; q_m^0 — максимальное значение теплового потока; a — коэффициент температуропроводности материала оболочки; s_1 — криволинейная координата на торцевом сечении оболочки; δ — толщина оболочки; α — коэффициент теплоотдачи.

Пусть $\alpha = 0$. Тогда, используя преобразование Лапласа по времени [3], решение уравнения (1) при нулевом начальном условии $\vartheta_0 = 0$ можно представить в форме

$$\vartheta = \frac{\varepsilon}{h} \eta(s) \sin(\pi s) \int_0^{\mathrm{Fo}} q(s) e^{-\pi^2(\mathrm{Fo}-\zeta)} d\zeta - \frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{2h} \int_0^{\mathrm{Fo}} [\Phi(\mathrm{Fo}, \mathrm{Fo}) -$$