

7. Овакимян Р. Н., Косакян Ю. И., Мартиросян Р. М. Экспериментальное исследование устойчивости токонесущей пластинки в магнитном поле.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1974, 27, № 6, с. 68—73.
8. Moon F. Problems in Magneto-solid Mechanics.— Mech. today, 1978, 5, p. 307—390.

Институт механики АН АрмССР

Поступила в редколлегию  
08.12.80

УДК 539.377

Р. М. Кушнир, Ю. А. Музычук

#### К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СОСТАВНЫХ ПЛАСТИНКАХ

В последнее время при решении задач термоупругости для кусочно-однородных тел широко применяется метод, основанный на использовании обобщенных функций [1, 2, 5, 7—9]. Этот метод применен ниже при нахождении решений задач термоупругости для составных пластинок с помощью функции напряжений в случае обобщенного плоского напряженного состояния.

Рассмотрим составную пластинку толщиной  $2\delta$ , состоящую из  $l$  состыкованных ортотропных полос-пластинок. Пусть  $p_i$  — физико-механические характеристики  $i$ -го элемента составной пластинки. Эти характеристики для составной пластинки представим в виде

$$p(x) = p_1 + \sum_{i=1}^{l-1} (p_{i+1} - p_i) S_-(x - x_i), \quad (1)$$

где  $x_i$  — координата плоскости сопряжения  $i$ -го и  $i + 1$ -го элементов;

$$S_-(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta \geq 0, \\ 0, & \eta < 0. \end{cases}$$

Пластинка нагревается симметрично относительно ее срединной плоскости  $z = 0$  источниками тепла плотности  $w_i(x, y, z, \tau)$  и внешней средой, теплообмен с которой через поверхности  $z = \pm\delta$  пластинки осуществляется по закону Ньютона.

Для определения нестационарного температурного поля и обусловленных им квазистатических температурных напряжений имеем известные [3] уравнение теплопроводности и уравнение для определения функции напряжений  $F$ . Нахождение решений этих уравнений с помощью преобразований Фурье и Лапласа сводится к интегрированию частично вырожденных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго и четвертого порядков, которое осуществляется на основании фундаментальных систем решений, построенных в работе [4].

В качестве примера рассмотрим задачу об определении температурных напряжений в свободной от внешней нагрузки составной бесконечной пластинке, состоящей из сопряженных встык полубесконечных разнородных ортотропных пластинок и нагреваемой источниками тепла удельной мощности  $q$ , равномерно распределенными по области  $\{|x| \leq \infty, |y| \leq \varepsilon, |z| \leq \delta\}$ , где  $\varepsilon \ll \delta$ . С помощью интегрального преобразования Фурье и фундаментальной системы решений для рассматриваемого случая [4] найдем установившееся температурное поле

$$T = \frac{Q}{\pi \lambda_x^{(2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \eta) \cos \eta y d\eta, \quad (2)$$

где

$$\varphi(x, \eta) = (A_1 e^{\nu_1 x} + B_1) S_+(-x) + (A_2 e^{-\nu_2 x} + B_2) S_-(x);$$

$$A_1 = \frac{K_\lambda^{-1}(\gamma_1^2 - K_\lambda^{-1}\gamma_2^2)}{\gamma_1^2\gamma_2(K_\lambda^{-1}\gamma_2 + \gamma_1)}; \quad A_2 = \frac{K_\lambda^{-1}\gamma_2^2 - \gamma_1^2}{\gamma_1\gamma_2^2(K_\lambda^{-1}\gamma_2 + \gamma_1)}; \quad K_\lambda = \lambda_x^{(1)}/\lambda_x^{(2)};$$

$$B_1 = \frac{1}{K_\lambda\gamma_1^2}; \quad B_2 = \frac{1}{\gamma_2^2}; \quad Q = 2q\epsilon; \quad \gamma_i^2 = \eta^2 + \kappa_i^2; \quad \kappa_i^2 = \alpha_x^{(i)}/(\lambda_x^{(i)}\delta);$$

$\lambda_k^{(i)}$  ( $k = x, y$ ),  $\alpha_x^{(i)}$  — коэффициенты теплопроводности для главных направлений и коэффициент теплоотдачи с поверхностей  $z = \pm \delta$  пластинки.

Решение преобразованного по Фурье уравнения для определения функции напряжений строится на основе фундаментальной системы решений уравнения

$$\frac{d^4\bar{F}}{dx^4} - 2\eta^2[p_1 + (p_2 - p_1)S_-(x)]\frac{d^2\bar{F}}{dx^2} + [q_1 + (q_2 - q_1)S_-(x)]\eta^4\bar{F} = 0, \quad (3)$$

которая приведена в работе [4], где  $n = 4$ ,  $l = 2$ ,  $x_1 = 0$ , а вид функции  $y_{ij}(x)$ ,  $y_{2k}(x)$  зависит от корней характеристических уравнений [6]

$$\mu^4 - 2p_i\mu^2 + q_i = 0. \quad (4)$$

Так, в случае вещественных и попарно равных корней ( $\pm \mu_{i0}$ ,  $\mu_{i0} > 0$ ) они запишутся в виде

$$\begin{aligned} y_{11}(x) &= e^{\eta_{i0}x}, & y_{12}(x) &= xe^{\eta_{i0}x}, & y_{13} &= e^{-\eta_{i0}x}, \\ y_{14}(x) &= xe^{-\eta_{i0}x}, & \bar{y}_{21}(x) &= \text{ch } \eta_{20}x - \frac{1}{2}\eta_{20}x \text{ sh } \eta_{20}x, \\ \bar{y}_{22}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\eta_{20}} \text{ sh } \eta_{20}x - x \text{ ch } \eta_{20}x\right), & \bar{y}_{23}(x) &= \frac{1}{2\eta_{20}}x \text{ sh } \eta_{20}x, \\ \bar{y}_{24}(x) &= \frac{1}{2\eta_{20}^2}\left(x \text{ ch } \eta_{20}x - \frac{1}{\eta_{20}} \text{ sh } \eta_{20}x\right), & \eta_{i0} &= \mu_{i0}|\eta| \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (5)$$

Общее решение преобразованного по Фурье уравнения для определения функции напряжений находим в виде

$$\bar{F} = \sum_{s=1}^4 \{C_s y_s(x, \eta) + r_s(x, \eta)\},$$

где  $y_s(x, \eta)$  ( $s = \bar{1}, 4$ ) имеют вид [4] с учетом (5);  $\bar{y}_{is}^{(0)}(x, \eta)$  ( $s = \bar{1}, 4$ ) — нормальная фундаментальная система решений в точке  $x = 0$  соответствующего (3) уравнения  $L_1[y] = 0$  [4]:

$$\begin{aligned} r_1(x, \eta) &= (l_{11}e^{\gamma_1 x}\Gamma_1 + l_{21}q_1^*)S_+(-x) + [l_{12}\Gamma_2 e^{-\gamma_2 x} + l_3 q_2^* - (l_{12}\Gamma_2 - l_{11}\Gamma_1 + \\ &+ l_3 q_2^* - l_{21}q_1^*)\bar{y}_{21}(x, \eta) + (l_{12}\gamma_2\Gamma_2 + l_{11}\gamma_1\Gamma_1)\bar{y}_{22}(x, \eta) - \\ &- (l_{12}\gamma_2^2\Gamma_2 - l_{11}\gamma_1^2\Gamma_1)\bar{y}_{23}(x, \eta) + (l_{12}\gamma_2^3\Gamma_2 + l_{11}\gamma_1^3\Gamma_1)\bar{y}_{24}(x, \eta)]S_-(x); \end{aligned}$$

$$r_2(x, \eta) = l_{31}\{q_1^*S_+(-x) + [q_2^* - (q_2^* - q_1^*)\bar{y}_{21}(x)]S_-(x)\};$$

$$r_3(x, \eta) = -(\bar{g}_1(\eta) - \alpha_y^{(1)}\gamma_2 A_2 E_y^y Q^* (K_\lambda^{-1} - 1))\bar{y}_{14}^{(0)}(x, \eta)S_+(-x);$$

$$r_4(x, \eta) = -\bar{f}_1(\eta)\bar{y}_{13}^{(0)}(x, \eta)S_+(-x); \quad l_3 = l_{22} + l_{32} - l_{31};$$

$$l_{1i} = -Q^* A_i E_y^{(i)} \alpha_y^{(i)} \beta_i^2; \quad l_{2i} = -Q^* B_i E_y^{(i)} \alpha_y^{(i)} \beta_i^2;$$

$$l_{3i} = Q^* E_y^{(i)} \alpha_y^{(i)} \lambda_x^{(2)}/\lambda_x^{(i)}; \quad \Gamma_i = (\gamma_i^4 - 2p_i\gamma_i^2\eta^2 + q_i\eta^4)^{-1};$$

$$q_i^* = (q_i\eta^4)^{-1}; \quad \beta_i^2 = \gamma_i^2 - \eta^2\alpha_x^{(i)}/\alpha_y^{(i)} \quad (i = 1, 2); \quad Q^* = \frac{Q}{\sqrt{2\pi}\lambda_x^{(2)}};$$

$$\bar{f}_1(\eta) = E_y^{(1)} \left[ \left( \frac{1}{E_y^{(1)}} - \frac{1}{E_y^{(2)}} \right) \frac{d^2\bar{F}_2}{dx^2} \Big|_{x=0} - \left( \frac{\gamma_x^{(2)}}{E_x^{(2)}} - \frac{\gamma_x^{(1)}}{E_x^{(1)}} \right) \eta^2 \bar{F}_2 \Big|_{x=0} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -(\alpha_y^{(2)} - \alpha_y^{(1)})(A_2 + B_2)Q^* \Big]; \quad \bar{g}_1(\eta) = E_y^{(1)} \left[ \left( \frac{1}{E_y^{(1)}} - \frac{1}{E_y^{(2)}} \right) \frac{d^3 \bar{F}_2}{dx^3} \Big|_{x=0} + \right. \\
& \left. + \left( \frac{1}{G_2} - \frac{\nu_x^{(2)}}{E_x^{(2)}} - \frac{1}{G_1} + \frac{\nu_x^{(1)}}{E_x^{(1)}} \right) \eta^2 \frac{d\bar{F}_2}{dx} \Big|_{x=0} + Q^* \gamma_2 A_2 (\alpha_y^{(2)} - \alpha_y^{(1)}) \right]; \\
& q_i = \frac{E_y^{(i)}}{E_x^{(i)}}; \quad p_i = \frac{E_y^{(i)}}{2} \left( G_i^{-1} - \frac{2\nu_x^{(i)}}{E_x^{(i)}} \right);
\end{aligned}$$

$\alpha_k^{(i)}$ ,  $E_k^{(i)}$ ,  $\nu_k^{(i)}$  ( $k = x, y$ ) — соответственно температурный коэффициент линейного расширения, модуль упругости, коэффициент Пуассона для главных направлений;  $G_i$  — модуль сдвига.

Определяя  $\frac{d^k \bar{F}_2}{dx^k}$  ( $k = 0, 3$ ) с учетом условий на бесконечности, получаем систему четырех алгебраических уравнений для определения постоянных  $C_s$  ( $s = 1, 4$ ). Применяя формулу обращения для преобразования Фурье, получаем выражения для установившихся температурных напряжений в составной пластинке.

Если принять, что физико-механические характеристики каждой из состыкованных пластинок удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_x^{(i)} = \lambda_y^{(i)} = \lambda_i^{(i)}, \quad E_x^{(i)} = E_y^{(i)} = E_i, \quad \nu_x^{(i)} = \nu_y^{(i)} = \nu_i, \quad \alpha_x^{(i)} = \alpha_y^{(i)} = \alpha_i^{(i)},$$

то из полученных результатов находим выражения температурных напряжений в составной изотропной пластинке

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{Q\alpha_i^{(2)}E_2}{\pi\lambda_i^{(2)}} \int_0^\infty \left\langle \left( \frac{A_2\eta^2}{x_2^2} e^{-\gamma_2 x} - B_2 \right) S_-(x) + K_\alpha K_E \left( \frac{A_1\eta^2}{x_1^2} e^{\gamma_1 x} - B_1 \right) \times \right. \\
& \quad \times S_+(-x) - \eta^2 \{ [\mu_{12}(\eta) + |x| - X_{12}(\eta)] S_+(-x) + \\
& \quad \left. + [\mu_{21}(\eta) + |x| - X_{21}(\eta)] S_-(x) + \Psi(\eta) \} De^{-\eta|x|} \right\rangle \cos \eta y d\eta, \\
\sigma_{yy} &= \frac{Q\alpha_i^{(2)}E_2}{\pi\lambda_i^{(2)}} \int_0^\infty \left\langle -\frac{A_1\gamma_1^2 K_\alpha K_E}{x_1^2} e^{\gamma_1 x} S_+(-x) - \frac{A_2\gamma_2}{x_2^2} e^{-\gamma_2 x} S_-(x) + \right. \\
& \quad \left. + \eta^2 \left\{ [\mu_{12}(\eta) + X_{12}(\eta) \left( |x| - \frac{2}{\eta} \right)] S_+(-x) + \right. \right. \quad (6) \\
& \quad \left. \left. + [\mu_{21}(\eta) + X_{21}(\eta) \left( |x| - \frac{2}{\eta} \right)] S_-(x) + \Psi(\eta) \right\} De^{-\eta|x|} \right\rangle \cos \eta y d\eta, \\
\sigma_{xy} &= \frac{Q\alpha_i^{(2)}E_2}{\pi\lambda_i^{(2)}} \int_0^\infty \left\langle \eta \left[ \frac{A_2\gamma_2}{x_2^2} e^{-\gamma_2 x} S_-(x) - \frac{K_\alpha K_E A_1 \gamma_1}{x_1^2} e^{\gamma_1 x} S_+(-x) \right] - \right. \\
& \quad \left. - \eta^2 \operatorname{sign} x \left\{ [\mu_{12}(\eta) + X_{12}(\eta) \left( |x| - \frac{1}{\eta} \right)] S_+(-x) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + [\mu_{21}(\eta) + X_{21}(\eta) \left( |x| - \frac{1}{\eta} \right)] S_-(x) + \Psi(\eta) \right\} De^{-\eta|x|} \right\rangle \sin \eta y d\eta.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\mu_{ij}(\eta) &= \frac{1}{\alpha_i^{(2)} E_i E_j^2} \left\{ \left( R_i - \frac{\alpha_i^{(i)} B_i}{\eta^2} \right) [2E_i E_j (2 - \nu_i + \nu_i \nu_j) + E_i^2 (3 + 2\nu_j - \nu_j^2) + \right. \\
& \quad \left. + E_j^2 (1 - \nu_j^2)] - \left( R_j - \frac{\alpha_j^{(j)} B_j}{\eta^2} \right) [2E_j^2 (3 - \nu_i) + 2E_i E_j (1 + \nu_j)] \right\};
\end{aligned}$$

$$X_{ij}(\eta) = \frac{1}{\alpha_i^{(2)} E_i E_j^2} \left[ R_i(\eta - \nu_i) - \frac{\alpha_i^{(1)} B_i}{\eta} \right] [E_i^2(1 + \nu_i)(3 - \nu_i) - 2E_i E_j(1 + \nu_i)(1 - \nu_j) - E_j^2(1 + \nu_i)^2];$$

$$\Psi_{ij}(\eta) = \frac{2R_i \nu_i}{\alpha_i^{(2)} E_i E_j \eta} (3E_i + E_j - E_i \nu_j + E_j \nu_i); \quad R_i = \alpha_i^{(1)} A_i / \chi_i^2 \quad (i, j = 1, 2);$$

$$D = E_2 [3 + 2\nu_2 - \nu_2^2 + K_E^{-2} (3 + 2\nu_1 - \nu_1^2) + K_E^{-1} (10 - 2\nu_1 - 2\nu_2 + 2\nu_1 \nu_2)]^{-1};$$

$$\Psi(\eta) = \Psi_{12}(\eta) + \Psi_{21}(\eta); \quad K_\alpha = \alpha_i^{(1)} / \alpha_i^{(2)}; \quad K_E = E_1 / E_2.$$

По формулам (6) проведены расчеты безразмерных температурных напряжений  $\sigma_i = \sigma_{it} \lambda_t^{(2)} / (\alpha_i^{(2)} E_2 Q \delta)$  ( $i = x, y$ ),  $\tau_{xy} = \sigma_{xy} \lambda_t^{(2)} / (\alpha_i^{(2)} E_2 Q \delta)$  при  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $x = 0$ , результаты которых представлены в виде графиков на рис. 1—4.

На рис. 1—3 показаны зависимости температурных напряжений  $\sigma_i$  ( $i = x, y$ ),  $\tau_{xy}$  от безразмерной координаты  $Y = y/\delta$  при  $K_\lambda = K_E = 0,5$ ,  $K_\alpha = 2$  (сплошные линии) и при  $K_\alpha = K_E = K_\lambda = 1$  (штриховые линии).

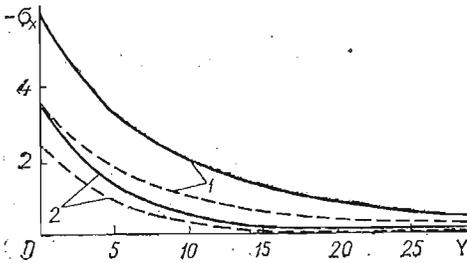


Рис. 1

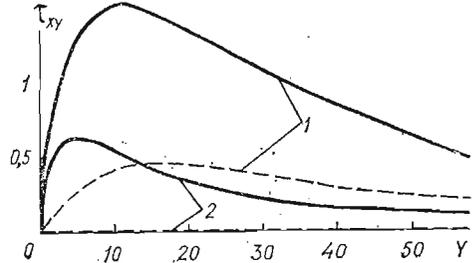


Рис. 3

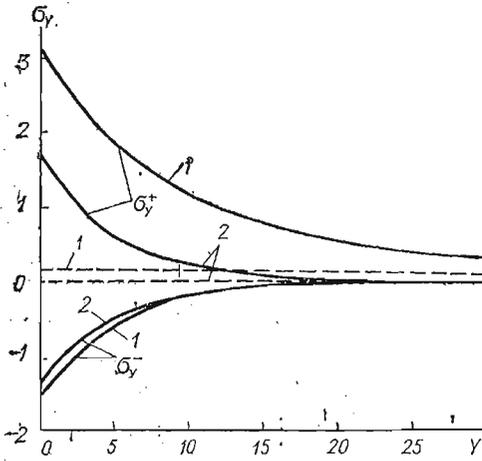


Рис. 2

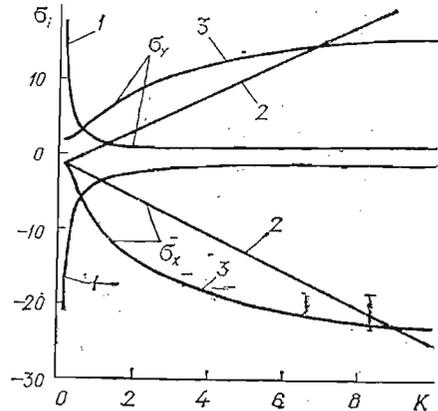


Рис. 4

Кривые 1 построены при  $Bi_1 = 0,01$ ,  $Bi_2 = 0,04$ , а кривые 2 — при  $Bi_1 = Bi_2 = 0,04$ . На рисунках обозначено  $\sigma_y^+ = \sigma_y |_{x=0+}$ ,  $\sigma_y^- = \sigma_y |_{x=0-}$ . Из полученных результатов следует, что неоднородность материала пластинки и учет кусочно-постоянного изменения коэффициента теплоотдачи значительно влияют на величину температурных напряжений.

На рис. 4 представлены зависимости температурных напряжений  $\sigma_i$  ( $i = x, y$ ) от критерия  $K$ , характеризующего определенные отношения физико-механических характеристик составной пластинки при  $Y = 0$ . Кривые 1 построены при  $K = K_\lambda$ ,  $K_\alpha = 2$ ,  $K_E = 0,5$ ; кривые 2 — при  $K = K_\lambda$ ,

$K_\lambda = K_E = 0,5$ ; кривые 3 — при  $K = K_E$ ,  $K_\lambda = 0,5$ ,  $K_\alpha = 2$ . При этом было принято  $Vi_1 = 0,01$ ,  $Vi_2 = 0,04$ . Из графиков видно, что величина температурных напряжений резко изменяется при  $0 < K_\lambda < 1$ , а при  $3 < K_\lambda < 10$  практически не изменяется. Изменение критериев  $K_\alpha$ ,  $K_E$  существенно влияет на величину температурных напряжений.

1. Коляно Ю. М. Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно-однородных тел.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 7—11.
2. Коляно Ю. М., Кулик А. Н., Кушнир Р. М. О постановке обобщенной задачи сопряжения для уравнений термоупругости кусочно-однородных тел.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 2, с. 44—49.
3. Коляно Ю. М., Кушнир Р. М. Уравнения теплопроводности и термоупругости неоднородных и кусочно-однородных пластин с прямолинейной анизотропией.— В кн.: Обобщенные функции в термоупругости. Киев: Наук. думка, 1980, с. 19—34.
4. Кушнир Р. М. О построении решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 9, с. 55—59.
5. Лавренко В. И. К решению пространственной квазистатической задачи термоупругости для кусочно-однородных тел.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, № 3, 1979, с. 63—69.
6. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела.— М.: Наука, 1977.— 416 с.
7. Ломакин В. А., Лавренко В. И. Об одном способе решения плоских задач теории упругости кусочно-однородных тел.— Прикл. механика, 1979, 15, № 7, с. 62—67.
8. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Кушнир Р. М. Об одном методе составления уравнений термоупругости кусочно-однородных тел и построения их решений.— В кн.: XV науч. совещ. по тепловым напряжениям в элементах конструкций: Тез. докл. Киев: Наук. думка, 1980, с. 71—72.
9. Попович В. С. Термоупругость кусочно-однородных тел с плоскопараллельными границами раздела: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1978.— 21 с.

Институт прикладных проблем  
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
26.11.80

УДК 539.377

Б. С. Хапко

#### ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКЕ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЙ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Вопрос нахождения температурных полей и напряжений в пластинках с источниками тепла, распределенными по произвольной кривой, с учетом конвективного теплообмена с поверхностями исследован еще недостаточно. В работе [2] получены решения задачи для круглой пластинки нагреваемой источниками тепла по куску круговой дуги или вдоль радиуса. В настоящей работе приведен способ определения прогибов прямоугольных пластинок, вызванных источниками тепла, распределенными по произвольной кривой.

**Определение нестационарного температурного поля.** Рассмотрим прямоугольную пластинку толщиной  $h$ , находящуюся под действием источников тепла плотности  $W(x, y, \tau)$ , распределенными по кривой. На поверхностях пластинки и контуре, который предполагается свободно опертым, задается теплообмен по закону Ньютона. Температурное поле в рассматриваемой пластинке описывается линейным уравнением [3]

$$\Delta T - \alpha^2(T - t_c) = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{W}{\lambda h} \quad (1)$$

при краевых условиях

$$\frac{\partial T}{\partial x} \mp \gamma_i(T - T_c^i) = 0, \quad x = 0, l, \quad i = 1, 2; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \mp \gamma_i(T - T_c^i) = 0, \quad y = 0, b, \quad i = 3, 4 \quad (3)$$