10. *Шаблий О. Н.* Об установившейся ползучести осесимметрично нагруженных круглых и кольцевых пластинок и пологих сферических оболочек.— Динамика и прочность машин, 1965, вып. 1, с. 99—106.
11. *Шаблий О. Н., Данчак П. И.* Установившаяся ползучесть оболочек вращения и круглых пластин с учетом напряжений сдвига.— Изв. вузов. Машиностроение, 1977, № 1, с. 18—23.
12. *Rabotnov Yu. N.* Viscoelasticity and creep in shell Structures.— Non-classical shell problems.— Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1964, p. 355—367.

Тернопольский филиал Львовского политехнического института

Поступила в редколлегию 09.01.81.

УДК 539.3

М. В Белубекян, К. Б. Казарян

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТОКОНЕСУЩЕЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ

В последнее время токонесущие тонкие тела типа пластин и оболочек стали привлекать внимание многих исследователей в силу их широкого использования в различных областях современной техники [5, 8]. При прохождении электрического тока в твердом теле возникают механические напряжения, обусловленные взаимодействием тока с собственным магнитным полем, а также джоулевым нагревом. В работе [8] приведен подробный анализ существующих по настоящее время работ по устойчивости токонесущих стержней (проволок). В работе [4] показано, что взаимодействие электрического тока, протекающего по направлению образующих цилиндрической оболочки, с собственным полем приводит к потере упругой устойчивости оболочки. Вопросу потери термоупругой устойчивости токонесущей пластинки под действием температурных напряжений, обусловленных джоулевым теплом, была посвящена работа [3]. В работе [7] проведен эксперимент по определению критической комбинации силы тока и напряженности внешнего магнитного поля, при которой тонкая проводящая пластинка теряет устойчивость. В данной работе исследуется вопрос статической потери устойчивости упругой тонкой токонесущей пластинки-полосы. Явление потери устойчивости такой пластинки при относительно большом токе (сила тока $I_0 \sim 4000$ А) наблюдалось в лабораторных условиях [8].

Пусть по бесконечной проводящей пластинке-полосе толщины $2h$ и ширины $2a$ течет равномерно распределенный по поперечному сечению постоянный электрический ток плотностью j_0. Прямоугольная декартовая система координат выбрана так, что плоскость (x, y) совпадает со срединной плоскостью пластинки, а направление оси Ox совпадает с направлением электрического тока. В выбранной системе координат пластинка занимает область $|x| < \infty$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant h$. Принимается, что поверхности пластинки $z = \pm h$, $y = \pm a$ свободны от механических нагрузок. Джоулево тепло и индуцированные электромагнитные поля в пластинке не учитываются.

Собственное магнитное поле пластинки $\overline{H}_0$ определяется из решения краевой задачи магнитостатики и в области, занимаемой пластинкой, компоненты вектора напряженности магнитного поля имеют вид

$$H_{0x} = 0, \quad H_{0y} = \frac{2j_0}{c}\left[(h-z)\left(\operatorname{arctg}\frac{a+y}{h-z} + \operatorname{arctg}\frac{a-y}{h-z}\right) - \right.$$

$$- (h+z)\left(\operatorname{arctg}\frac{a+y}{h+z} + \operatorname{arctg}\frac{a-y}{h+z}\right) - \frac{a-y}{2}\ln\frac{(a-y)^2+(h+z)^2}{(a-y)^2+(h-z)^2} -$$

$$\left. - \frac{a+y}{2}\ln\frac{(a+y)^2+(h+z)^2}{(a+y)^2+(h-z)^2}\right], \quad H_{0z} = \frac{2j_0}{c}\left[(a+y)\left(\operatorname{arctg}\frac{h+z}{a+y} + \right.\right. \qquad (1)$$

$$+ \operatorname{arctg} \frac{h-z}{a+y}\Big) - (a-y)\left(\operatorname{arctg} \frac{h+z}{a-y} + \operatorname{arctg} \frac{h-z}{a-y}\right) +$$

$$+ \frac{z+h}{2} \ln \frac{(a+y)^2 + (h+z)^2}{(a-y)^2 + (h+z)^2} + \frac{h-z}{2} \ln \frac{(a+y)^2 + (h-z)^2}{(a-y)^2 + (h-z)^2}\Big]$$

(c — электродинамическая постоянная).

Взаимодействие электрического тока с собственным магнитным полем приводит к возникновению пондеромоторной силы Ампера

$$\vec{F}_0 = \frac{1}{c} [\vec{j}_0 \times \overline{H}_0]. \qquad (2)$$

Под действием силы $\vec{F}_0$ в тонкой пластинке устанавливается обобщенное плоско-напряженное состояние с усредненным механическим напряжением $\sigma_y^* = \int\limits_{-h}^{h} \sigma_y dz$, которое определяется из следующей краевой задачи:

$$\frac{d\sigma_y^*}{dy} = \frac{j_0}{c} \int\limits_{-h}^{h} H_{0z} dz; \qquad \sigma_y^* (\pm a) = 0. \qquad (3)$$

Решение задачи (3) имеет вид

$$\sigma_y^* = \frac{2j_0^2}{c^2} \Big\{ 2h \left[(a+y)^2 \operatorname{arcctg} \frac{a+y}{2h} + (a-y)^2 \operatorname{arcctg} \frac{a-y}{2h} - 4a^2 \operatorname{arcctg} \frac{a}{h} \right] +$$

$$+ \frac{8h^3}{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{a+y}{2h} + \operatorname{arctg} \frac{a-y}{2h} - \operatorname{arctg} \frac{a}{h} \right) + \frac{(a+y)^3}{3} \ln (a+y) +$$

$$+ \frac{(a-y)^3}{3} \ln (a-y) - \frac{8a^3}{3} \ln 2a + 2(a+y) \left[h^2 - \frac{(a+y)^2}{12} \right] \times$$

$$\times \ln [(a+y)^2 + 4h^2] + 2(a-y) \left[h^2 - \frac{(a-y)^2}{12} \right] \ln [(a-y)^2 + 4h^2] -$$

$$- 4a \left(h^2 - \frac{a^2}{3} \right) \ln (4a^2 + 4h^2) \Big\}. \qquad (4)$$

Функция $\sigma_y^* (y)$ в интервале $[-a, a]$ есть четная функция; при $h^2/a^2 \ll 1$ она является неположительной и монотонно возрастающей в интервале $[0, a]$ (монотонно убывающей в интервале $[-a, 0]$).

Таким образом, вследствие взаимодействия электрического тока с собственным магнитным полем в пластинке возникает сжимающее усилие $-\sigma_y^*$ и, следовательно, может иметь место потеря упругой устойчивости пластинки.

В рамках теории Кирхгофа уравнение устойчивости тонкой пластинки имеет вид

$$D \frac{d^4 w}{dy^4} - \frac{d}{dy} \left[\sigma_y^* (y) \frac{dw}{dy} \right] = 0. \qquad (5)$$

Здесь $D = 2Eh^3/3\,(1 - \nu^2)$ — цилиндрическая жесткость; w — нормальное перемещение срединной плоскости пластинки (E —модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона).

Пусть пластинка шарнирно оперта по торцам $y = \pm a$. Введем безразмерные параметры

$$u = \frac{w}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad \delta = \frac{h}{a}. \qquad (6)$$

Тогда уравнение (5) и граничные условия запишутся в виде

$$u'''' + \lambda [g(\eta) u']' = 0; \quad u(\pm 1) = u''(\pm 1) = 0 \qquad (7)$$

(штрих означает дифференцирование по η).

В (7) λ — есть безразмерная величина, характеризующая плотность электрического тока j_0; $g(\eta)$ — безразмерное выражение функции усилия σ_y^*.

$$\lambda = \frac{j_0^2 a^3 (1-\nu^2)}{Ehc^2}; \quad g(\eta) = -\frac{1}{\delta^2}\Big\{(1+\eta)^3 \ln(1+\eta) + (1-\eta)^3 \ln(1-\eta) -$$

$$-24\delta^2 \ln 2 + 4(1-3\delta^2)\ln(1+\delta)^2 + \left[6\delta^2(1+\eta) - \frac{(1+\eta)^3}{2}\right]\ln[(1+\eta)^2 +$$

$$+ 4\delta^2] + \left[6\delta^2(1-\eta) - \frac{(1-\eta)^3}{2}\right]\ln[(1-\eta)^2 + 4\delta^2] +$$

$$+ 6\delta\left[(1+\eta)^2 \operatorname{arcctg}\frac{1+\eta}{2\delta} + (1-\eta)^2 \operatorname{arcctg}\frac{1-\eta}{2\delta} - 4\operatorname{arcctg}\frac{1}{\delta}\right] +$$

$$+ 8\delta^3\left(\operatorname{arctg}\frac{1+\eta}{2\delta} + \operatorname{arctg}\frac{1-\eta}{2\delta} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\delta}\right)\Big\}. \quad (8)$$

Так как пластинка является тонкой $\delta^2 \ll 1$, то в дальнейшем $g(\eta)$ заменим на функцию

$$Q(\eta) = \lim_{\delta \to 0} g(\eta, \delta) = 12[2\ln 2 - (1+\eta)\ln(1+\eta) - (1-\eta)\ln(1-\eta)]. \quad (9)$$

Таким образом, вопрос определения критической плотности электрического тока, при которой пластинка теряет упругую устойчивость, сводится к рассмотрению краевой задачи (7) на собственные значения.

Краевая задача (7) является самосопряженной, причем в силу неотрицательности функции $Q(\eta)$ все собственные числа задачи (7) вещественны и положительны [6].

Для определения наименьшего собственного числа λ_1, соответствующего критической плотности электрического тока γ_{0*}, рассмотрим метод последовательных приближений [6].

Согласно этому методу, который справедлив для рассматриваемой здесь краевой задачи, будем исходить из произвольной функции $F_0 = (5 - 6\eta^2 + \eta^4)/12$, удовлетворяющей граничным условиям, и определим функцию F_1 из краевой задачи

$$F_1^{IV} = -[Q(\eta) F_0']'. \quad (10)$$

Решением краевой задачи (10) является функция $F_1 = \int_{-1}^{\eta} \Phi d\eta$, где

$$\Phi(\eta) = \left[\frac{2}{15}(1+\eta)^6 - \frac{3}{5}(1+\eta)^5 + \frac{4}{3}(1+\eta)^3\right]\ln(1+\eta) -$$

$$-\left[\frac{2}{15}(1-\eta)^6 - \frac{3}{5}(1-\eta)^5 + \frac{4}{3}(1-\eta)^3\right]\ln(1-\eta) -$$

$$-\frac{11}{225}[(1+\eta)^6 - (1-\eta)^6] - \frac{27}{100}[(1+\eta)^5 - (1-\eta)^5] +$$

$$+\frac{10}{9}[(1+\eta)^3 - (1-\eta)^3] - \eta\left(\frac{18}{5}\ln 2 - \frac{28}{5}\right) + \left(4\eta^3 - \frac{2}{5}\eta^5\right)\ln 2.$$

С помощью функций F_0, F_1, определяя постоянные Шварца и их отношения, а также нижнюю границу второго собственного числа λ_2, получаем $0{,}2606 \leqslant \lambda_1 \leqslant 0{,}2688$.

Таким образом, критическая плотность тока, при которой токонесущая пластинка теряет устойчивость, определяется формулой

$$j_{0*} \approx 0{,}51 \sqrt{\frac{Ehc^2}{a^3(1-\nu^2)}}. \quad (11)$$

В таблице приведены численные значения критической силы тока $I_{0*} = 4 j_{0*} ah$ для различных проводящих пластин, полученные на основе формулы (11).

Обсудим другой подход к задачам магнитоупругости токонесущих тел, связанный с приближенным определением собственного магнитного поля H_0. Дело в том, что большинство краевых задач магнитостатики не допускают зачастую аналитического определения вектора напряженности магнитного поля (в частности, задачи определения магнитного поля токонесущей прямоугольной пластинки или соленоида конечных размеров) и, следовательно, применение приближенных методов в таких задачах является необходимым.

В работах [1, 2] для приближенного определения собственного магнитного поля токонесущей пластинки-полосы использована гипотеза магнитоупругости тонких тел, первоначально сформулированная относительно характера изменения индуцированного электромагнитного поля в тонком теле. Использование этой гипотезы значительно облегчает решение задачи магнитостатики и позволяет определить компоненты вектора напряженности собственного магнитного поля [1, 2]:

$$H_{0x} = 0, \quad H_{0y} = -\frac{4\pi j_0}{c}\left(1 - \frac{2h}{\pi a}\right) z,$$

$$H_{0z} = \frac{8 j_0 h}{ca} y. \qquad (12)$$

Подставляя формулы (12) в (3), получаем

$$\sigma_y^* (y) = -\frac{8 j_0^2 h^2 a}{c^2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right).$$

Материал пластинки	Толщина $2h$ (10^{-2} м)	Ширина $2a$ (10^{-2} м)	Сила тока I_0, кА
Алюминий	0,02	2	1,94
	0,02	10	0,86
	0,04	4	3,88
	0,04	10	2,32
	0,1	12	8,84
Цинк	0,02	1	2,04
	0,02	6	1,11
	0,06	8	5,26
	0,06	10	4,73
	0,1	10	10,2
Медь	0,02	1	2,36
	0,02	8	1,18
	0,04	6	3,77
	0,06	10	5,47
	0,1	16	9,2

Краевая задача на собственные значения в безразмерных величинах имеет вид

$$u'''' + \lambda [f(\eta) u']' = 0, \quad u(\pm 1) = u''(\pm 1) = 0, \quad f(\eta) = 12(1 - \eta^2). \qquad (13)$$

Для краевой задачи (13) использование метода последовательных приближений приведет к следующему соотношению для наименьшего собственного числа:

$$0{,}4285 \leqslant \lambda_1 \leqslant 0{,}4292. \qquad (14)$$

Критическая плотность тока j_{0*}, соответствующая соотношению (14), имеет вид

$$j_{0*} \approx 0{,}64 \sqrt{\frac{Ehc^2}{a^3 (1 - \nu^2)}}. \qquad (15)$$

Из сопоставления формул (11) и (15) видно, что приближенное определение собственного магнитного поля, основанное на гипотезе магнитоупругости тонких тел, приводит к качественно правильному результату.

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.— М. : Наука, 1977.— 272 с.
2. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* К задаче колебаний токонесущей пластинки-полосы.— Тр. X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин, 1975, 2, с. 3—10.
3. *Белубекян М. В., Казарян К. Б.* К задаче термоупругой устойчивости токонесущих пластин. Прикл. механика, 1975, 11, № 12, с. 42—47.
4. *Казарян К. Б.* Колебания и устойчивость токонесущей цилиндрической оболочки.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1974, 27, № 2, с. 46—57.
5. *Кнопфель Г.* Сверхсильные импульсные магнитные поля.— М. : Мир, 1972.— 391 с.
6. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения.— М. : Наука, 1968.— 503 с.

7. *Овакимян Р. Н., Косакян Ю. И., Мартиросян Р. М.* Экспериментальное исследование устойчивости токонесущей пластинки в магнитном поле.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1974, 27, № 6, с. 68—73.
8. *Moon F.* Problems in Magneto-solid Mechanics.— Mech. today, 1978, 5, p. 307—390.

Институт механики АН АрмССР

Поступила в редколлегию 08.12.80

УДК 539.377

Р. М. Кушнир, Ю. А. Музычук

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СОСТАВНЫХ ПЛАСТИНКАХ

В последнее время при решении задач термоупругости для кусочно-однородных тел широко применяется метод, основанный на использовании обобщенных функций [1, 2, 5, 7—9]. Этот метод применен ниже при нахождении решений задач термоупругости для составных пластинок с помощью функции напряжений в случае обобщенного плоского напряженного состояния.

Рассмотрим составную пластинку толщиной 2δ, состоящую из l состыкованных ортотропных полос-пластинок. Пусть p_i — физико-механические характеристики i-го элемента составной пластинки. Эти характеристики для составной пластинки представим в виде

$$p(x) = p_1 + \sum_{i=1}^{l-1} (p_{i+1} - p_i) S_-(x - x_i), \tag{1}$$

где x_i — координата плоскости сопряжения i-го и $i+1$-го элементов; $S_-(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta \geqslant 0, \\ 0, & \eta < 0. \end{cases}$

Пластинка нагревается симметрично относительно ее срединной плоскости $z = 0$ источниками тепла плотности $w_t(x, y, z, \tau)$ и внешней средой, теплообмен с которой через поверхности $z = \pm\delta$ пластинки осуществляется по закону Ньютона.

Для определения нестационарного температурного поля и обусловленных им квазистатических температурных напряжений имеем известные [3] уравнение теплопроводности и уравнение для определения функции напряжений F. Нахождение решений этих уравнений с помощью преобразований Фурье и Лапласа сводится к интегрированию частично вырожденных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго и четвертого порядков, которое осуществляется на основании фундаментальных систем решений, построенных в работе [4].

В качестве примера рассмотрим задачу об определении температурных напряжений в свободной от внешней нагрузки составной бесконечной пластинке, состоящей из сопряженных встык полубесконечных разнородных ортотропных пластинок и нагреваемой источниками тепла удельной мощности q, равномерно распределенными по области $\{|x| \leqslant \infty, |y| \leqslant \varepsilon, |z| \leqslant \delta\}$, где $\varepsilon \ll \delta$. С помощью интегрального преобразования Фурье и фундаментальной системы решений для рассматриваемого случая [4] находим установившееся температурное поле

$$T = \frac{Q}{\pi \lambda_x^{(2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \eta) \cos \eta y \, d\eta, \tag{2}$$

где

$$\varphi(x, \eta) = (A_1 e^{\nu_1 x} + B_1) S_+(-x) + (A_2 e^{-\nu_2 x} + B_2) S_-(x);$$