

где b , A , B — произвольные постоянные. Поле концентрации (34) вызывает физически приемлемые возмущения поля ТЭП при $b = \frac{\lambda_1 \rho_1 C_1 D}{\epsilon_0 (\lambda_1 - \rho_1 C_1 D)}$, $B = -\frac{A}{2}$. Из анализа формулы (34) следует, что $-2 < A < 0$. При этом первое из соотношений (33), определяющее закон движения границы раздела, запишется так:

$$A \left[\sqrt{\frac{b}{D}} \exp\left(b\tau + \sqrt{\frac{b}{D}} \chi\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{b\tau} + \frac{\chi}{2\sqrt{D\tau}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi D\tau}} \exp\left(-\frac{\chi^2}{4D\tau}\right) \right] = \frac{\rho_2}{\rho_1 D} \frac{d\chi}{d\tau}. \quad (35)$$

Для $b\tau \geq 10^2$, $-0,5 < A < 0$ находим приближенное решение уравнения (35):

$$\chi = \frac{\rho_1 A \sqrt{D}}{\rho_2 \sqrt{\pi}} \sqrt{\tau}. \quad (36)$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче при принятых ограничениях скорость электрохимического растворения определяется плотностью металла и электролита, коэффициентом диффузии ионов металла в электролите и уменьшается со временем.

1. Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнідець Б. М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. — К.: Наук. думка, 1978. — 230 с.
2. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. — М.: Мир, 1964. — 456 с.
3. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. — М.: Мир, 1974. — 304 с.
4. Ильющин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 287 с.
5. Павлина В. С. Кінетичні рівняння пружно-в'язкого деформування твердих тіл при наявності фізико-хімічних процесів. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1978, № 5, с. 438—441
6. Подстригач Я. С. Диффузионная теория деформации изотропной сплошной среды. — Вопр. механики реальн. твердого тела, 1964, № 2, с. 71—99.
7. Седов Л. И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1970. — Т. 1. 492 с.
8. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976. — 616 с.
9. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. — Киев: Наук. думка, 1977. — 247 с.
10. Maugin G. A. Nonlocal theories or gradient-type theories: a matter of convenience? — Arch. mech. stosow., 1979, 31, N 1, p. 15—26.

Институт прикладных проблем
механики и математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
25.09.80

УДК 539.3

Ю. З. Повстенко

ОБОБЩЕНИЕ УСЛОВИЙ ЛАПЛАСА И ЮНГА МЕХАНИЧЕСКОГО КОНТАКТА

Основные уравнения теории капиллярных явлений — это уравнения Лапласа

$$p_1 - p_2 = 2H\sigma_{12} \quad (1)$$

и Юнга

$$\sigma_{23} \cos \theta = \sigma_{13} - \sigma_{12}, \quad (2)$$

где p — давление; σ — поверхностное натяжение; H — средняя кривизна поверхности раздела; θ — краевой угол. Здесь и далее индексами 1, 2, 3 обозначаются величины, относящиеся к твердой, жидкой и газообразной фазам; индексы 12, 13, 23 характеризуют соответствующие поверхности раздела; индекс 123 принадлежит линии контакта трех сред (рис. 1, 2).

Известно, что для характеристики поверхности твердого тела вместо скаляра (поверхностного натяжения) следует рассматривать тензор поверхностных напряжений [4]. Аналогичная ситуация возникает на поверхности вязкой жидкости. Таким образом, уравнения Лапласа и Юнга необходимо обобщить на случай тензорного характера поверхностных напряжений. Для уравнения Лапласа указанное обобщение было получено в статьях [1, 3]. В настоящей работе на основе уравнения баланса количества движения единым подходом получены обобщенные уравнения Лапласа и Юнга.

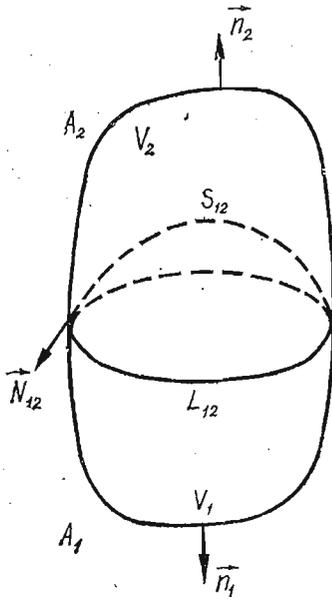


Рис. 1

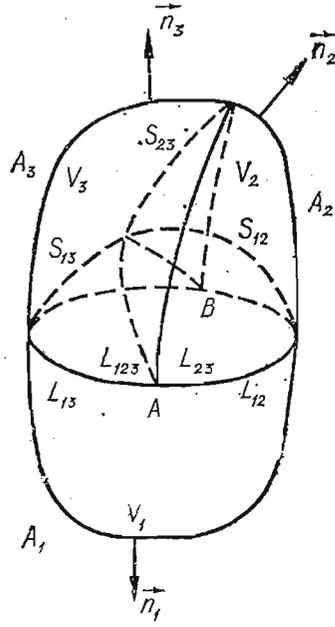


Рис. 2

Для материального объема, изображенного на рис. 1, баланс количества движения записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{V_1} \rho_1 \vec{v}_1 dV + \int_{V_2} \rho_2 \vec{v}_2 dV + \int_{S_{12}} \rho_{12} \vec{v}_{12} dS \right) = \int_{V_1} \rho_1 \vec{F}_1 dV + \int_{V_2} \rho_2 \vec{F}_2 dV + \\ + \int_{S_{12}} \rho_{12} \vec{F}_{12} dS + \int_{A_1} \vec{n}_1 \cdot \hat{\pi}_1 dA + \int_{A_2} \vec{n}_2 \cdot \hat{\pi}_2 dA + \int_{L_{12}} \vec{N}_{12} \cdot \hat{\sigma}_{12} dL. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь ρ — плотность; \vec{v} — скорость; \vec{F} — массовая сила; $\hat{\pi}$ — трехмерный тензор напряжений; $\hat{\sigma}$ — двухмерный тензор напряжений; τ — время. Остальные обозначения ясны из рис. 1.

Переходя к пределу при стягивании материального объема к точке на поверхности S_{12} , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\rho_{12} \vec{v}_{12}) + \rho_{12} \vec{v}_{12} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{12} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}_{12} + \rho_{12} \vec{F}_{12} - \vec{n}_1 \cdot \hat{\pi}_1 - \vec{n}_2 \cdot \hat{\pi}_2 + \\ + \rho_1 \vec{v}_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_{12}) \cdot \vec{n}_1 + \rho_2 \vec{v}_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_{12}) \cdot \vec{n}_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\vec{\nabla}$ — двухмерный набла-оператор.

Аналог формулы (3) для элементарного материального объема, изображенного на рис. 2, представится следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V_1} \rho_1 \vec{v}_1 dV + \int_{V_2} \rho_2 \vec{v}_2 dV + \int_{V_3} \rho_3 \vec{v}_3 dV + \int_{S_{12}} \rho_{12} \vec{v}_{12} dS + \int_{S_{13}} \rho_{13} \vec{v}_{13} dS + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{S_{23}} \rho_{23} \vec{v}_{23} dS + \int_{L_{123}} \rho_{123} \vec{v}_{123} dL) = \int_{V_1} \rho_1 \vec{F}_1 dV + \int_{V_2} \rho_2 \vec{F}_2 dV + \int_{V_3} \rho_3 \vec{F}_3 dV + \\
& + \int_{S_{12}} \rho_{12} \vec{F}_{12} dS + \int_{S_{13}} \rho_{13} \vec{F}_{13} dS + \int_{S_{23}} \rho_{23} \vec{F}_{23} dS + \int_{L_{123}} \rho_{123} \vec{F}_{123} dL + \\
& + \int_{A_1} \vec{n}_1 \cdot \hat{\pi}_1 dA + \int_{A_2} \vec{n}_2 \cdot \hat{\pi}_2 dA + \int_{A_3} \vec{n}_3 \cdot \hat{\pi}_3 dA + \int_{L_{12}} \vec{N}_{12} \cdot \hat{\sigma}_{12} dL + \\
& + \int_{L_{13}} \vec{N}_{13} \cdot \hat{\sigma}_{13} dL + \int_{L_{23}} \vec{N}_{23} \cdot \hat{\sigma}_{23} dL + \sigma_{123}^A \vec{s}^A + \sigma_{123}^B \vec{s}^B. \quad (5)
\end{aligned}$$

Кроме введенных выше, здесь использованы обозначения: \vec{N}_{ij} — внешняя нормаль к линии контакта, лежащая в соответствующей касательной плоскости; \vec{s} — вектор, касательный к периметру смачивания; индексами A и B отмечены значения линейного натяжения σ_{123} [2] в соответствующих точках (см. рис. 2).

Стягивание материального объема к точке на линии L_{123} приводит к уравнению

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\rho_{123} \vec{v}_{123}) + \rho_{123} \vec{v}_{123} \vec{s} \cdot \frac{d\vec{v}_{123}}{ds} &= \frac{d\sigma_{123} \vec{s}}{ds} + \rho_{123} \vec{F}_{123} - \vec{N}_{12} \cdot \hat{\sigma}_{12} - \\
&- \vec{N}_{13} \cdot \hat{\sigma}_{13} - \vec{N}_{23} \cdot \hat{\sigma}_{23} + \rho_{12} \vec{v}_{12} (\vec{v}_{12} - \vec{v}_{123}) \cdot \vec{N}_{12} + \\
&+ \rho_{13} \vec{v}_{13} (\vec{v}_{13} - \vec{v}_{123}) \cdot \vec{N}_{13} + \rho_{23} \vec{v}_{23} (\vec{v}_{23} - \vec{v}_{123}) \cdot \vec{N}_{23}. \quad (6)
\end{aligned}$$

При $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = \rho_{123} = 0$, $\sigma_{123} = 0$, $(\vec{v}_1 - \vec{v}_{12}) \cdot \vec{n}_1 = 0$, $(\vec{v}_2 - \vec{v}_{12}) \times \vec{n}_2 = 0$, $\hat{\sigma}_{12} = \sigma_{12} \hat{l}$, $\hat{\sigma}_{13} = \sigma_{13} \hat{l}$, $\hat{\sigma}_{23} = \sigma_{23} \hat{l}$ из уравнений (4), (6) следуют уравнения (1), (2).

Таким образом, можно сделать вывод, что обобщенные формулы Лапласа и Юнга являются двухмерным и одномерным вариантами одного уравнения, в чем легко убедиться, сравнив выражения (4), (6).

1. Подстригач Я. С., Шевчук П. Р. Влияние тонких покрытий и промежуточных слоев на диффузионные процессы и на напряженное состояние в твердых телах. — Пробл. прочности, 1970, № 11, с. 37—40.
2. Щербаков Л. М., Рязанцев П. П. О влиянии энергии периметра смачивания на краевые условия. — В кн.: Исследования в области поверхностных сил. — М.: Наука, 1964, с. 26—28.
3. Ghez R. Equilibre mécanique et de forme de petits cristaux. — Helv. phys. acta, 1968, 41, N 3, p. 287—309.
4. Herring C. Surface tension as a motivation for sintering. — In: The Physics of Powder Metallurgy. New York: McGraw-Hill, 1951, p. 143—179.

Институт прикладных проблем
механики и математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
14.08.80

УДК 539.374

О. Н. Шаблий, М. С. Михалишин, П. И. Данчак

УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ТОНКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С УЧЕТОМ НАПРЯЖЕНИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Вопросам построения физических зависимостей между обобщенными скоростями деформаций и обобщенными напряжениями для тонких пластин и оболочек, находящихся в условиях установившейся ползучести, получению основных разрешающих уравнений установившейся ползучести таких кон-