2. *Кабак В. И., Маркус А. С., Мереуца И. В.* О связи между спектральными свойствами полиномиального операторного пучка и его делителей.— Мат. исслед., 1977, № 45, с. 29—57.
3. *Ланкастер П.* Теория матриц.— М. : Наука, 1978.— 280 с.
4. *Лопатинский Я. Б.* Разложение полиномиальной матрицы на множители.— Научн. зап. Льв. политехн. ин-та, 1956, № 38, с. 3—7.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 04.01.81

УДК 517.52

Х. И. Кучминская

ДВУХМЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ РАЗЛОЖЕНИЯМ В ДВОЙНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ В ДВУХ ТОЧКАХ

Построению и исследованию многомерных цепных дробей, соответствующих разложениям в кратные степенные ряды в точке, посвящен ряд работ [1—3, 6, 8, 9]. В настоящей работе построены дроби, соответствующие разложениям в двойные степенные ряды в двух точках (0, 0) и (∞, ∞). В одномерном случае такие дроби получены в работах [5, 7].

Рассмотрим два формальных степенных ряда с комплексными коэффициентами

$$L(x, y) = \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij}x^iy^j, \quad L^*(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{c_{-i,-j}}{x^iy^j}, \tag{1}$$

которые, очевидно, можно представить в виде следующих сумм:

$$\begin{aligned} L(x, y) &= L(x, 0) + L(0, y) + \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij}x^iy^j, \\ L^*(x, y) &= L^*(x, 0) + L^*(0, y) + c_0 + \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{c_{-i,-j}}{x^iy^j}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$L(x, 0) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i0}x^i; \quad L(0, y) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{0i}y^i;$$

$$L^*(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{-i,0}}{x^i} + c_0; \quad L^*(0, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{0,-i}}{y^i} + c_0; \quad c_{-0,-0} = 3c_0.$$

Для первых двух слагаемых при выполнении известных условий на коэффициенты рядов [5, 7] можно построить соответствующие дроби, именуемые в литературе общими T-дробями [10]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n0}x\,|}{|\,1 + b_{n0}x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{0n}y\,|}{|\,1 + b_{0n}y}.$$

Третьи слагаемые запишем в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij}x^iy^j &= \frac{c_{11}xy}{1 + \frac{c_{11}}{c_0}xy + l_1(x, y)}, \\ c_0 + \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{c_{-i,-j}}{x^iy^j} &= \frac{c_{11}xy}{1 + \frac{c_{11}}{c_0}xy + l_1^*(x, y)}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $c_0, c_{11} \neq 0$; $(l_1(x, y), l_1^*(x, y))$ — пара рядов, осуществляющая формальное тождество (3).

Лемма 1. Для ряда $1+\sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{a_{ij}}{x^i y^j}$ существует обратный ряд $1+$ $+\sum_{i,j=1}^{\infty}(-1)^{i+j}\frac{d_{ij}}{x^i y^j}$ такой, что выполняется тождество

$$\left(1+\sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{a_{ij}}{x^i y^j}\right)\left(1+\sum_{i,j=1}^{\infty}(-1)^{i+j}\frac{d_{ij}}{x^i y^j}\right)\equiv 1,$$

$$d_{0j}=d_{j0}=0,\quad j=1,\,2,\,\ldots;\ d_{00}=1 \text{ и } d_{mn}=0, \text{ если } m<0$$

или $n<0$.

Доказательство леммы очевидно. Из системы уравнений для определения коэффициентов d_{ij} получаем рекуррентные формулы

$$d_{ij}=\sum_{p+k=2}^{i+j}(-1)^{p+k-1}d_{i-p,j-k}a_{pk},\quad i,\ j=1,\,2,\,\ldots \tag{4}$$

Лемма 2. Пусть пара рядов $(l_1(x,y),\ l_1^*(x,y))$ осуществляет формальное тождество (3). Тогда она имеет вид (1) (возможно, равна (0, 0)).

Доказательство. Из первого формального тождества (3) получаем

$$l_1(x,y)=\frac{1}{1+\frac{c_{21}}{c_{11}}x+\frac{c_{12}}{c_{11}}y+\frac{c_{22}}{c_{11}}xy+\cdots}-\frac{c_{11}}{c_0}-1. \tag{5}$$

Первое выражение правой части является формальным степенным рядом вида

$$1+\sum_{i+j=1}^{\infty}c_{ij}^{*}x^i y^j,$$

коэффициенты которого легко определяются по известным формулам [1] Следовательно, для $l_1(x,y)$ утверждение леммы выполняется и

$$l_1(x,y)=\sum_{i+j=1}^{\infty}c_{ij}^{(1)}x^i y^j, \tag{6}$$

где $c_{11}^{(1)}=c_{11}^{*}-c_{11}/c_0$; $c_{ij}^{(1)}=(-1)^{i+j}c_{ij}^{*}$ для всех остальных $i,\ j$. Со второго формального тождества следует, что

$$\frac{c_0}{c_{11}}\,\frac{l_1^*(x,y)}{xy}=\frac{1}{1+\sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{c_{-i,-j}/c_0}{x^i y^j}}-1-\frac{c_0/c_{11}}{xy}. \tag{7}$$

Согласно лемме 1 первое слагаемое правой части (7) является степенным рядом вида

$$1+\sum_{i,j=1}^{\infty}(-1)^{i+j}\frac{c_{-i,-j}^{*}}{x^i y^j},$$

коэффициенты которого находятся по формулам (4), а поэтому утверждение леммы верно для $l_1^*(x,y)$ и

$$l_1^*(x,y)=3c_0^{(1)}+\sum_{i+j=1}^{\infty}\frac{c_{-i,-j}^{(1)}}{x^i y^j}. \tag{8}$$

Здесь $c_0^{(1)}=\frac{1}{3}\left[\frac{c_{11}}{c_0}c_{-1,-1}^{*}-1\right]$ и для всех остальных $i,\ j$

$$c_{-i,-j}^{(1)}=\frac{c_{11}}{c_0}c_{-(i+1),-(j+1)}^{*}.$$

Поскольку ряды (6), (8) имеют вид (1), то их опять представим в виде сумм (2), где

$$l_1(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i0}^{(1)} x^i; \quad l_1(0, y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{0i}^{(1)} y^i;$$

$$l_1^*(x, 0) = c_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{-i,0}^{(1)}}{x^i}; \quad l_1^*(0, y) = c_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{0,-i}^{(1)}}{y^i}.$$

Первые два слагаемые разложим в соответствующие общие T-дроби, если коэффициенты рядов (6), (8) удовлетворяют определенным условиям, а третьи запишем в виде

$$\begin{gathered}\sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij}^{(1)} x^i y^j = c_{11}^{(1)} xy \left\{1 + \frac{c_{11}^{(1)}}{c_0^{(1)}} xy + l_2(x, y)\right\}^{-1}, \\ c_0^{(1)} + \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{c_{-i,-j}^{(1)}}{x^i y^j} = c_{11}^{(1)} xy \left\{1 + \frac{c_{11}^{(1)}}{c_0^{(1)}} xy + l_2^*(x, y)\right\}^{-1},\end{gathered} \tag{9}$$

где $(l_2(x, y), l_2^*(x, y))$ — пара формальных рядов, осуществляющая тождество (9); $C_{11}^{(1)} \neq 0$.

По лемме 2 убеждаемся, что ряды $l_2(x, y)$, $l_2^*(x, y)$ имеют вид (1). Продолжая этот процесс аналогично, для пары формальных степенных рядов $(L(x, y), L^*(x, y))$ получаем двухмерную цепную дробь

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i0}x \mid}{\mid 1 + b_{i0}x} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{0i}y \mid}{\mid 1 + b_{0i}y} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{11}^{(i-1)} xy \mid}{\left| 1 + \frac{c_{11}^{(i-1)}}{c_0^{(i-1)}} xy + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j0}^{(i)} x \mid}{\mid 1 + b_{j0}^{(i)} x} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{0j}^{(i)} y \mid}{\mid 1 + b_{0j}^{(i)} y} \right.}, \tag{10}$$

коэффициенты которой нетрудно определить по формулам, аналогичным известным [5].

Замечание 1. Если в дроби (10) положить $a_{01} = c_{11}^{(0)} = 0$ и все $a_{i0} = 1$, $b_{i0} = d_i$, то получим обычную T-дробь [10], если же положить только $a_{01} = c_{11}^{(0)} = 0$, то получим общую T-дробь [7, 10].

Определение 1. Подходящей дробью дроби (10) назовем конечную дробь вида

$$\frac{A_n}{B_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i0}x \mid}{\mid 1 + b_{i0}x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{0i}y \mid}{\mid 1 + b_{0i}y} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{[n/2]} \frac{c_{11}^{(i-1)} xy \mid}{\left| 1 + \frac{c_{11}^{(i-1)}}{c_0^{(i-1)}} xy + \sum_{j=1}^{n-2i} \frac{a_{j0}^{(i)} x \mid}{\mid 1 + b_{j0}^{(i)} x} + \sum_{j=1}^{n-2i} \frac{a_{0j}^{(i)} y \mid}{\mid 1 + b_{0j}^{(i)} y} \right.}, \tag{11}$$

где $[n/2]$ — целая часть числа $n/2$.

Определение 2. Двухмерную цепную дробь (10) назовем соответствующей паре $(L(x, y), L^*(x, y))$ формальных рядов (1) тогда и только тогда, когда для произвольного натурального n n-я подходящая дробь дроби (10) имеет разложение в ряд Тейлора в окрестности нулевой точки, совпадающее с

$$\sum_{i+j=1}^{n} c_{ij} x^i y^j$$

и разложение в ряд Лорана в окрестности точки (∞, ∞), совпадающее с

$$\sum_{i+j=0}^{n-1} \frac{c_{-i,-j}}{x^i y^j}.$$

Теорема. Для того чтобы для пары формальных рядов $(L(x, y), L^*(x, y))$ существовала единственная соответствующая двухмерная дробь, необходимо и достаточно, чтобы определители

$$D_{r,s,j}^{(k)} = \begin{vmatrix} c_{rj,r(1-j)}^{(k)} & c_{(r+1)j,(r+1)(1-j)}^{(k)} & \ldots & c_{(k+s)j,(r+s)(1-j)}^{(k)} \\ -c_0^{(k)} & c_{rj,r(1-j)}^{(k)} & \ldots & c_{(r+s-1)j,(r+s-1)(1-j)}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -c_{(r+s-1)j,(r+s-1)(1-j)}^{(k)} & \ldots & -c_0^{(k)} & c_{rj,r(1-j)}^{(k)} \end{vmatrix}, \qquad (12)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots; r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; s = 0, 1, 2, \ldots; D_{r,s,j}^{(k)} \equiv 1$ для $s < 0$, $j = 0, 1$; $c_{pm}^{(0)} = c_{pm}$ и коэффициенты $c_{11}^{(k)}$ для всех k были отличны от нуля.

Доказательство. Используя результаты теории общих T-дробей и последовательно применяя лемму 2, нетрудно убедиться в существовании двухмерной дроби (10). Пользуясь методом полной математической индукции, докажем, что дробь (10) — соответствующая дробь для пары $(L(x, y), L^*(x, y))$.

Пусть $n = 1, 2$. Как и в случае обычных цепных дробей разложения в степенные ряды $\frac{a_{10}x}{1 + b_{10}x}$, $\frac{a_{01}y}{1 + b_{01}y}$ будут совпадать со степенными рядами $\sum_{i\geqslant 1} c_{i0}x^i$, $\sum_{i\geqslant 1} c_{0i}y^i$ до членов первой степени включительно, а разложения в степенные ряды выражений $\cfrac{a_{10}x}{1 + b_{10}x + \cfrac{a_{20}x}{1 + b_{20}x}}$, $\cfrac{a_{01}y}{1 + b_{01}y + \cfrac{a_{02}y}{1 + b_{02}y}}$ будут совпадать со степенными рядами $\sum_{i\geqslant 1} c_{i0}x^i$, $\sum_{i\geqslant 1} c_{0i}y^i$ до всех членов второй степени включительно и с рядами $\sum_{i\geqslant 0} \frac{c_{-i,0}}{x^i}$, $\sum_{i\geqslant 0} \frac{c_{0,-i}}{y^i}$ до членов c_0, $\frac{c_{-1,0}}{x}$, $\frac{c_{0,-1}}{y}$. Следовательно, с учетом третьего слагаемого A_2/B_2 будет иметь разложение в степенной ряд, совпадающее до всех членов второй степени включительно с рядом $\sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij}x^i y^j$ и с рядом $\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{c_{-i,-j}}{x^i y^j}$ до члена $3c_0 + \frac{c_{-1,0}}{x} + \frac{c_{0,-1}}{y}$.

Пусть утверждение теоремы справедливо для всех $N \leqslant n$. Докажем, что оно справедливо для $N = n + 1$. Положим $n = 2k$, но по предположению индукции дробь

$$\sum_{j=1}^{2k-1} \frac{a_{j0}^{(1)}x\,|}{|\,1 + b_{j0}^{(1)}x} + \sum_{j=1}^{2k-1} \frac{a_{0j}^{(1)}y\,|}{|\,1 + b_{0j}^{(1)}y} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{k} \frac{c_{11}^{(i-1)}xy\,|}{\left|\,1 + \frac{c_{11}^{(i-1)}}{c_0^{(i-1)}}xy + \sum\limits_{j=1}^{n-2i} \frac{a_{j0}^{(i)}x\,|}{|\,1 + b_{j0}^{(i)}x} + \sum\limits_{j=1}^{n-2i} \frac{a_{0j}^{(i)}y\,|}{|\,1 + b_{0j}^{(i)}y}\right.}$$

раскладывается в степенной ряд, коэффициенты которого при степенях $(2k - 1)$ включительно совпадают с коэффициентами при тех же степенях ряда $\sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij}^{(1)} x^i y^j$ и в ряд Лорана в окрестности точки (∞, ∞), совпадающий с $\sum_{i,j=0}^{2k-2} c_{-i,-j}^{(1)}/x^i y^j$, $c_{00}^{(1)} = 1$.

Поскольку разложения в ряды выражений $\sum_{i=1}^{2k+1} \frac{a_{i0}x|}{|1+b_{i0}x}$, $\sum_{i=1}^{2k+1} \frac{a_{0i}y|}{|1+b_{0i}y}$ совпадают с рядами

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{i0}x^i, \sum_{i=1}^{\infty} c_{0i}y^i, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{-i,0}}{x^i} + c_0, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{0,-i}}{y^i} + c_0$$

до всех членов требуемых степеней и коэффициенты $c_{ij}^{(1)}$, $c_{-i,-j}^{(1)}$ определяются через c_{21}, c_{12}, c_{31}, c_{13}, ..., $c_{1,2k}$; $c_{2k,1}$ и $c_{-2,-1}$; $c_{-1,-2}$; ...; $c_{-(2k-1),-1}$; $c_{-1,-(2k-1)}$, то, воспользовавшись тождествами (3), получим утверждение теоремы.

Аналогично доказывается утверждение теоремы и для $n = 2k + 1$. Следовательно, дробь (10) является соответствующей дробью для пары $(L(x, y), L^*(\hat{x}, y))$. Единственность дроби (10) следует из алгоритма ее построения.

Замечание 2. Аналогично можно построить дроби, соответствующие разложениям в степенные ряды в точках (0, 0) и $(\infty, 0)$ или (0, 0) и $(0, \infty)$. Для этого в качестве ряда $L^*(x, y)$ следует взять ряд $\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{c_{i,-j}}{x^i} y^j$ или $\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{c_{i,-j}}{y^j} x^i$ [4].

Замечание 3. Используя ту же методику, можно получить соответствующую n-мерную дробь для пары кратных степенных рядов ($n > 2$).

1. *Кучминская Х. И.* Соответствующая и присоединенная ветвящиеся цепные дроби для двойного степенного ряда.— Докл. АН УССР. Сер. А., 1978, № 7, с. 614—617.
2. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний гіллястий ланцюговий дріб для подвійного степеневого ряду.— В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. К. : Ін-т математики АН УРСР, 1978, с. 30—32.
3. *Кучминская Х. И.* О приближении функций цепными и ветвящимися цепными дробями.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 3—10.
4. *Фукс Б. А.* Теория аналитических функций многих комплексных переменных.— М.; Л. : Гостехтеориздат, 1948.— 472 с.
5. *Jones W. B.* Multiple point Padé tables.— In: Padé and Rational Approximation (ed. by E. B. Saff and R. S. Varga) New York : Academ. Press, 1977, p. 163—171.
6. *Lutterodt C. H.* Rational approximation by approximation C^n.— Complex analysis and its applications. V. III, Vienna, International atomic energy agency, 1976, p. 25—34.
7. *McCabe J. H. and Murphy J. A.* Continued fractions which correspond to power series expansions at two points.— J. Inst. Math. and Appl., 1976, **17**, p. 233—247.
8. *Murphy J. A., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fraction.— J. Comput. and Appl. Math., 1978, **4**, N 3, p. 181—190.
9. *Siemaszko W.* Branched continued fractions for double power series.— J. Comput. and Appl. Math., 1980, **6** N 2, p. 121—125.
10. *Waadeland H.* General T-Fractions Corresponding to Functions Satisfying Certain Boundedness Conditions.— J. Approxim. Theory, 1979, **26**, N 4, p. 317—328.

Институт прикладных проблем
механики и математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
19.11.80