УДК 517.946 : 519.4/5

И. М. Ковальчик

ОДНА ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ВИНЕРА

В связи с многочисленными приложениями континуальных интегралов во многих разделах науки, в частности в теоретической физике (см., например, [1]), возникает задача вычисления этих интегралов. Ниже приводится формула, позволяющая вычислять интегралы по винеровской мере от произведения функционалов, в котором первый сомножитель содержит квадратичные функционалы, а второй зависит от значений функции, по которой производится интегрирование, в конечном числе точек. Данный результат связан со следующей задачей:

$$y''(t) + y(t)\sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j(t) = 0, \quad [0 \leqslant t \leqslant 1], \tag{1}$$

$$y(1) = 1, \ y'(1) = 0. \tag{2}$$

Введем некоторые обозначения. Решение задачи (1),(2) обозначим через $y(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t)$; при этом $y(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t) \neq 0 \ \forall t \in [0, 1]$.

Пусть

$$\gamma_l(t) = q_l(t) + \frac{y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, t_l)}{y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, t)}, \quad l = \overline{1, n},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторые параметры, $-\infty < \alpha_j < +\infty$ $(j = \overline{1, n})$, $i = \sqrt{-1}$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leqslant 1$ и

$$q_l(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant t < t_l, \\ -1 & \text{при} \quad t_l \leqslant t \leqslant 1, \quad l = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Положим

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n), \quad \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m)$$

и $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j$. Пусть $D = \| (\gamma_i, \gamma_j) \|_{i,j=1}^{n}$ — матрица Грама, $(D^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v})$ — квадратичная форма, матрицей которой служит матрица D^{-1}, а R_m означает m-мерное евклидово пространство. Интеграл по мере Винера от функционала $F(x)$ $(x \in C)$ обозначается символом $\int_C F(x)\, d_W x$ (все определения приведены в работах [2, 3]).

Для дальнейшего необходимо одно вспомогательное утверждение.

Предложение. Пусть $p_j(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1, \ j = \overline{1, n})$ — непрерывные неотрицательные функции; $F(\mathbf{u})$ — действительная или комплекснозначная измеримая функция, заданная на R_n, и $G(x) \equiv G(k_1 x, \ldots, k_m(x))$ $(k_l = \text{const} \ \forall l)$ — интегрируемый по мере Винера функционал. Тогда

$$\int_C F\left[\int_0^1 p_1(t)x^2(t)\,dt, \ldots, \int_0^1 p_n(t)x^2(t)\,dt\right] G(x)\,d_W x =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_C \int_{R_{2n}} \exp(i\langle \alpha, \mathbf{u} \rangle) F(\mathbf{u})\, G\Big[k_1\Big(z(\cdot) + y(-i\alpha_1, \ldots$$

$$\ldots, -i\alpha_n, \cdot) \int_0^{(\cdot)} \frac{y_s'(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)}{y^2(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)}\, z(s)\,ds\Big), \ldots, \tag{3}$$

$$k_m\left(z(\cdot)+y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, \cdot)\int_0^{(\cdot)} \frac{y'_s(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)}{y^2(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)} z(s)\,ds\right)\Bigg] \times$$

$$\times [y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, 0)]^{-\frac{1}{2}}\, d\alpha du d_W z.$$

Доказательство. Камерон (см. библиогр. в работе [3]) показал, что при замене

$$x(t) \to z(t) = x(t) + \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds$$

верна формула

$$\int_C G(z)\, d_W z = |D_1| \int_C G\left[x + \int_0^1 K(\cdot, s)\, x(s)\, ds\right] \exp\left\{-\int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \times \right.\right.$$

$$\left.\times \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds\right]^2 dt - 2\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} K(t, s)\, x(s)\, ds\right] dx(t) -$$

$$-\int_0^1 J(s)\, d[x^2(s)]\, d_W x. \tag{4}$$

Здесь

$$K(t, s) = \begin{cases} K_1(t, s) & \text{при } 0 \leqslant t < s \leqslant 1, \\ K_2(t, s) & \text{при } 0 \leqslant s < t \leqslant 1, \\ \frac{1}{2}[K_1(t, t) + K_2(t, t)] & \text{при } 0 \leqslant t = s \leqslant 1; \end{cases}$$

$$J(s) = K_2(s, s-0) - K_1(s, s+0);$$

$$D_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 \overset{(k)}{\cdots} \int \det \| K(s_i, s_j) \|_{i,j=1}^n ds.$$

Пусть, в частности, $K_1(t, s) = 0$, $K_2(t, s) = -\frac{y'_s(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, s)}{y(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, s)}$, а $G(z) = G(k_1 z, \ldots, k_m z)$. Тогда $D_1 = \sqrt{y(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0)}$, а выражение под знаком экспоненты в правой части формулы (4) принимает вид

$$-\int_0^1 \left[\frac{y_t(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t)}{y(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t)}\right]^2 x^2(t)\, dt + \int_0^1 \frac{y_t(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t)}{y(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t)}\, d[x^2(t)].$$

После элементарных преобразований с учетом уравнения (1) и условий (2) это выражение будет таким:

$$-\int_0^1 \frac{y_t'(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t)}{y(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t)} x^2(t)\, dt = \int \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i(t)\, x^2(t)\, dt.$$

Теперь равенство (4) перепишется следующим образом:

$$\int_C G(k_1 x, \ldots, k_m x) \exp\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \int_0^1 p_i(t)\, x^2(t)\, dt\right] d_W x =$$

$$= [y(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0)]^{-\frac{1}{2}} \int_C G\left\{k_1\left[z(\cdot) + y(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \cdot) \times\right.\right.$$

$$\times \int_0^{(\cdot)} \frac{y_s'(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, s)}{y^2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, s)} z(s)\,ds\Bigg], \ldots, k_m\Bigg[z(\cdot) + y(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \cdot) \times$$

$$\times \int_0^{(\cdot)} \frac{y_s'(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, s)}{y^2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, s)} z(s)\,ds\Bigg]\Bigg\} d_W z,$$

или с использованием аналитического продолжения —

$$\int_C G(k_1 x, \ldots, k_m x) \exp\left[-i \sum_{j=1}^n \nu_j \int_0^1 p_j(t)\, x^2(t)\,dt\right] d_W x =$$

$$= [y(-i\nu_1, \ldots, -i\nu_n, 0)]^{-\frac{1}{2}} \int_C G\Bigg\{k_1\Bigg[z(\cdot) + y(-i\nu_1, \ldots, -i\nu_n, \cdot) \times$$

$$+ \int_0^{(\cdot)} \frac{y_s'(-i\nu_1, \ldots, -i\nu_n, s)}{y^2(-i\nu_1, \ldots, -i\nu_n, s)} z(s)\,ds\Bigg], \ldots, k_m\Bigg[z(\cdot) + y(-i\nu_1, \ldots$$

$$\ldots, -i\nu_n, \cdot) \int_0^{(\cdot)} \frac{y_s'(-i\nu_1, \ldots, -i\nu_n, s)}{y^2(-i\nu_1, \ldots, -i\nu_n, s)} z(s)\,ds\Bigg]\Bigg\} d_W z.$$

Пусть $F(\mathbf{u})$ — абсолютно непрерывная финитная функция, обладающая ограниченными производными первого порядка. Для такой функции существует преобразование Фурье $\hat{F}(\alpha)$. Значит,

$$\int_C F\left[\int_0^1 p_1(t)\, x^2(t)\,dt, \ldots, \int_0^1 p_n(t)\, x^2(t)\,dt\right] G(k_1 x, \ldots, k_m x)\, d_W x =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_C \left[\int_{R_n} \exp\left[-i \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_0^1 p_j(t)\, x^2(t)\,dt\right] \hat{F}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,d\alpha\right] \times$$

$$+ G(k_1 x, \ldots, k_m x)\, d_W x = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R_n} \hat{F}(\alpha) \Bigg\{\int_C G(k_1 x, \ldots, k_m x) \times$$

$$\times \exp\left[-i \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_0^1 p_j(t)\, x^2(t)\,dt\right] d_W x\Bigg\}\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R_n} \hat{F}(\alpha) \Bigg\{[y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, 0)]^{-\frac{1}{2}} \int_C G\Bigg[k_1\Bigg(z(\cdot) +$$

$$+ y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, \cdot) \int_0^{(\cdot)} \frac{y_s'(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)}{y^2(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)} z(s)\,ds\Bigg), \ldots,$$

$$k_m\Bigg(z(\cdot) + y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, \cdot) \int_0^{(\cdot)} \frac{y_s(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)}{y^2(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)} z(s)\,ds\Bigg)\Bigg] \times$$

$$\times d_W z\Bigg\}\, d\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_C \int_{R_{2n}} \exp(i\langle\alpha, \mathbf{u}\rangle)\, F(\mathbf{u})\, G\Bigg[k_1\Bigg(z(\cdot) + y(-i\alpha_1, \ldots$$

$$\ldots, -i\alpha_n, \cdot) \int_0^{(\cdot)} \frac{y_s(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)}{y^2(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)} z(s)\,ds\Bigg), \ldots, k_m\Bigg(z(\cdot) +$$

$$+ y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, \cdot) \int_0^{(\cdot)} \frac{y_s'(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)}{y^2(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)} z(s)\, ds \Bigg) \Bigg] \times$$

$$\times [y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, 0)]^{-\frac{1}{2}} \, d\alpha d\mathbf{u} d_W z.$$

Далее, путем предельного перехода полученная формула распространяется на финитную действительную ограниченную функцию, затем на действительную неотрицательную и, наконец, на комплекснозначную функцию $F(\mathbf{u})$.

Теорема. Пусть функции $F(\mathbf{u})$ и $p_j(t)$ $(j = \overline{1, n})$ удовлетворяют наложенным выше ограничениям; $G(\mathbf{v})$ — ограниченная измеримая на R_m функция, а $\gamma_l(t)$ $(l = \overline{1, m})$ — линейно независимые функции из класса $L_2[0, 1]$. Тогда

$$\int_C F\left[\int_0^1 p_1(t) x^2(t)\, dt, \ \ldots, \ \int_0^1 p_n(t) x^2(t)\, dt\right] G[x(t_1), \ \ldots, \ x(t_m)]\, d_W x =$$

$$= 2^{-n} \pi^{-n-\frac{m}{2}} (\det D)^{-\frac{1}{2}} \int_{R_{m+2n}} \exp[i\langle\alpha, \mathbf{u}\rangle - (D^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v})] [y(-i\alpha_1, \ldots$$

$$\ldots, -i\alpha_n, 0)]^{-\frac{1}{2}} F(\mathbf{u}) G(\mathbf{v})\, d\alpha d\mathbf{u} d\mathbf{v} \qquad (5)$$

при условии, что интеграл справа сходится.

Доказательство. Пусть $q_l^*(t) \in L_2[0, 1]$ $(l = \overline{1, m})$. По формуле (3)

$$\int_C F\left[\int_0^1 p_1(t) x^2(t)\, dt, \ \ldots, \ \int_0^1 p_n(t) x^2(t)\, dt\right] G\left[-\int_0^1 x(t)\, dq_1^*(t),\right.$$

$$\left.\ldots, -\int_0^1 x(t)\, dq_m^*(t)\right] d_W x = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_C \int_{R_n} \exp(i\langle\alpha, \mathbf{u}\rangle) F(\mathbf{u}) \times$$

$$\times [y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, 0)]^{-\frac{1}{2}} G\left\{-\int_0^1 \left[z(t) + y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, t) \times\right.\right.$$

$$\times \int_0^t \frac{y_s'(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)}{y^2(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)} z(s)\, ds\Bigg] dq_1^*(t), \ \ldots, \ -\int_0^1 \Bigg[z(t) + y(-i\alpha_1, \ldots$$

$$\left.\ldots, -i\alpha_n, t) \int_0^t \frac{y_s'(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)}{y^2(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)} z(s)\, ds \right] dq_m^*(t) \Bigg\} \, d\alpha d\mathbf{u} d_W z. \qquad (6)$$

Упростим запись функционала G. Пусть $l = \overline{1, m}$. Тогда

$$-\int_0^1 \left[z(t) + y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, t) \int_0^t \frac{y_s(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)}{y^2(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)} z(s)\, ds\right] \times$$

$$\times dq_l^*(t) = -\int_0^1 \left[\int_0^t \frac{dz(s)}{y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)}\right] y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, t)\, dq_l^*(t) =$$

$$= \int_0^1 \frac{Q_l(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, t)}{y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, t)} dz(t),$$

где

$$Q_l(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, t) = \int\limits_1^t y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, s)\, dq_l^*(s).$$

Пусть

$$q_l^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant t < t_l, \\ 0 & \text{при} \quad t_l \leqslant t \leqslant 1 \quad (l = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Тогда

$$-\int\limits_0^1 x(t)\, dq_l^*(t) = x(t_l) \quad (l = \overline{1, m})$$

и

$$q_l(t) = q_l^*(t) - 1, \quad t \in [0, 1].$$

Кроме того,

$$\frac{Q_l(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, t)}{y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, t)} = q_l(t) + \frac{y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, t_l)}{y(-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, t)} = \gamma_l(t).$$

Функционал G в правой части равенства (6) примет вид

$$G\left[\int\limits_0^1 \gamma_1(t)\, dz(t), \ \ldots, \ \int\limits_0^1 \gamma_m(t)\, dz(t)\right].$$

Интеграл по мере Винера от данного функционала по формуле (3.4.1) работы [5] равен

$$\pi^{-\frac{m}{2}} (\det D)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{R_m} G(\mathbf{v}) \exp\left[-(D^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v})\right] d\mathbf{v}.$$

Теперь из формулы (6) уже вытекает формула (5). Теорема доказана.

Следует отметить, что формула (5) нова́ и в случае $n = 1$. При $G(\mathbf{v}) \equiv 1$ рассуждения приведены в работе [4].

Сделаем одно замечание по поводу обобщения теоремы.

Если воспользоваться доказанным выше предложением, положив

$$G(x) = G_1\left[\int\limits_0^1 x(t)\, dq_1(t), \ \ldots, \ \int\limits_0^1 x(t)\, dq_r(t)\right] \times$$
$$\times\, G_2\left[-\int\limits_0^1 x(t)\, dq_1^*(t), \ \ldots, \ -\int\limits_0^1 x(t)\, dq_m^*(t)\right],$$

и проделать по отношению к функционалу G те же преобразования, что и раньше, придав функциям $q_l^*(t)$ $(l = \overline{1, m})$ специальный вид, сохранив, однако, вид функций $q_k(t)$ $(k = \overline{1, r})$, то получим формулу для вычисления интегралов по мере Винера от произведения трех функционалов:

$$F\left[\int\limits_0^1 p_1(t)\, x^2(t)\, dt, \ \ldots, \ \int\limits_0^1 p_n(t)\, x^2(t)\, dt\right] \times$$
$$\times\, G_1\left[\int\limits_0^1 x(t)\, dq_1(t), \ \ldots, \ \int\limits_0^1 x(t)\, dq_r(t)\right] G_2[x(t_1), \ \ldots, \ x(t_m)].$$

1. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантовых полей.— М. : Гостехиздат, 1957.— 443 с.
2. *Далецкий Ю. Л.* Интегрирование в функциональных пространствах.— В кн.: Итоги науки. Математический анализ. М. : ВИНИТИ, 1967, с. 83—124.
3. *Ковальчик И. М.* Интеграл Винера.— Успехи мат. наук, 1963, 18, № 1, с. 97—134.

4. *Ковальчик I. М.* Про ефективне обчислення одного класу вінеровських інтегралів.— Доп. АН УРСР, 1965, № 3, с. 265—268.
5. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам.— Минск : Наука и техника, 1976.— 384 с.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 06.03.80.

УДК 513.88

А. И. Балинский, В. С. Заячковский

О КРИТЕРИЯХ ФАКТОРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В настоящей работе исследуются вопросы факторизации операторных пучков способом, основанным на систематическом использовании оператор-матриц, составленных из так называемых обобщенных моментов резольвенты операторного пучка относительно изолированной части его спектра. На этом пути получен критерий делимости одного операторного пучка другим, а также обобщена с конечномерного на случай банахова пространства теорема Лопатинского о наличии правильного делителя [4].

Обозначим через $[X, Y]$ пространство непрерывных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, $[X] = [X, X]$, $1_X = 1$ — оператор, тождественно отображающий X в себя. Если операторы $a_{ij} \in [X]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, то $n \times m$-оператор-матрица $A = \| a_{ij} \|$ определяет оператор из $[X^{(m)}, X^{(n)}]$. Здесь $X^{(k)} = \underset{k}{\oplus} X$ — пространство прямой суммы k экземпляров исходного пространства X. Наоборот, любой оператор из $[X^{(m)}, X^{(n)}]$ определяет некоторую матрицу.

С оператор-матрицами можно обращаться так же, как и с обыкновенными числовыми матрицами. В частности, если $A = \| a_{ij} \|$, то определено произведение bA (Ab); например, под bA будем понимать оператор-матрицу $\| ba_{ij} \|$.

В дальнейшем используется одностороннее функциональное исчисление. Пусть $f(\lambda)$ — аналитическая в окрестности спектра $\sigma(A)$ оператора $A \in [X^{(n)}]$ оператор-значная функция, принимающая значения в $[X]$. Тогда, например, правое значение функции $f(\lambda)$ на операторе A можно определить следующим образом:

$$f(_*A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda 1_{X^{(n)}} - A)^{-1} d\lambda.$$

Здесь Γ — граница некоторой окрестности спектра $\sigma(A)$, состоящая из конечного числа замкнутых спрямляемых кривых, ориентированных в положительном направлении.

Произвольному операторному пучку вида

$$a(\lambda) = \lambda^p + \lambda^{p-1} a_1 + \cdots + a_p, \tag{1}$$

где $a_i \in [X]$, поставим в соответствие $p \times p$-оператор-матрицы

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & \ldots & -a_1 \end{matrix} \right\|, \quad A_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & & -a_p \\ 1 & & -a_{p-1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 - a_1 \end{matrix} \right\|,$$

$$S_a = \| a_{p-i-j+1} \|, \quad i, j = \overline{1, p}; \quad a_0 = 1; \quad a_k = 0, \quad k < 0.$$