УДК 517.946

В. Н. Цымбал

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В области $D_T = \{0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим следующую задачу:

$$L_\varepsilon u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon\Lambda(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} + B(x, t)u = f(x, t), \qquad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \qquad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $\Lambda(x, t) = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1^2(x, t), \ldots, \lambda_n^2(x, t)\}$; $A(x, t)$, $B(x, t)$ — матрицы размера $n \times n$ с элементами соответственно $a_{ij}(x, t)$, $b_{ij}(x, t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$; $u(x, t)$, $f(x, t)$ — векторы-столбцы размера n.

Предполагаем, что выполняются такие условия:

1) $\lambda_1^2(x, t) < \lambda_2^2(x, t) < \cdots < \lambda_n^2(x, t)$ в D_T;

2) функции $\lambda_i^2(x, t)$, $a_{ij}(x, t)$, $b_{ij}(x, t)$, $f_i(x, t)$ достаточно гладкие для справедливости дальнейших выкладок;

3) $f(q, 0) = f_t(q, 0) = f_{xx}(q, 0) = f_{tt}(q, 0) = 0$, $q = 0, l$.

Построим асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) по степеням малого параметра ε. При этом используем метод пограничного слоя [1]. Аналогичная задача для скалярного квазилинейного уравнения второго порядка решена в работе [3].

Асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) до некоторого порядка N ищем в виде

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i v^i(x, t) + \sum_{i=0}^{2N+1} \varepsilon^{i/2}\Pi^{i/2}(\xi, t) + \sum_{i=0}^{2N+1} \varepsilon^{i/2}Q^{i/2}(\eta, t) + $$
$$+ \varepsilon^{N+1}R_N(x, t, \varepsilon). \qquad (3)$$

Здесь $\xi = x\sqrt{\varepsilon}$; $\eta = (l - x)/\sqrt{\varepsilon}$; остальные функции определены ниже.

Регулярная часть асимптотики $\sum\limits_{i=0}^{N} \varepsilon^i v^i(x, t)$ является решением следующих задач, получаемых стандартным методом теории возмущений:

$$\frac{\partial^2 v^i}{\partial t^2} + A(x, t)\frac{\partial v^i}{\partial t} + B(x, t)v^i = f^i(x, t), \qquad (4)$$

$$v^i(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial v^i(x, 0)}{\partial t} = 0, \qquad (5)$$

где $f^0(x, t) \equiv f(x, t)$, $f^i(x, t) = \Lambda(x, t)\dfrac{\partial^2 v^{i-1}}{\partial x^2}$ $(i = 1, \ldots, N)$.

В операторе L_ε произведем регуляризующее преобразование $\xi = x/\sqrt{\varepsilon}$ и разложим все коэффициенты в конечные строки Тейлора в окрестности $x = 0$. Полученный таким образом оператор обозначим M_ε. Приравнивая в $M_\varepsilon\left(\sum\limits_{i=0}^{2N+1} \varepsilon^{i/2}\Pi^{i/2}(\xi, t)\right) = 0$ коэффициенты при одинаковых степенях ε, для определения пограничных функций в окрестности $x = 0$ получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 \Pi^{i/2}}{\partial t^2} - \Lambda(0, t) \frac{\partial^2 \Pi^{i/2}}{\partial \xi^2} + A(0, t) \frac{\partial \Pi^{i/2}}{\partial t} + B(0, t) \Pi^{i/2} = G^{i/2}(\xi, t) \quad (i = 0, \ldots, 2N+1), \tag{6}$$

где $G^0(\xi, t) \equiv 0$; $G^{i/2}(\xi, t)$ $(i = 1, \ldots, 2N+1)$ линейно выражаются через $\Pi^{j/2}$, $\frac{\partial \Pi^{j/2}}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \Pi^{j/2}}{\partial \xi^2}$ $(j < i)$.

К уравнениям (6) еще необходимо присоединить начальные и граничные условия, которые получаются из выражений (2), (3) с учетом уравнений (5) и того, что функции $\Pi^{i/2}(\xi, t)$ и $Q^{i/2}(\eta, t)$ являются функциями типа пограничного слоя.

Итак,

$$\Pi^{i/2}(0, t) = v^{i/2}(0, t), \quad \Pi^{i/2}(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Pi^{i/2}(\xi, 0)}{\partial t} = 0 \quad (i = 0, \ldots, 2N+1). \tag{7}$$

Здесь и далее $v^\alpha \equiv 0$, если α не целое

Аналогично $\left(\text{регуляризующее преобразование в окрестности правой границы прямоугольника } D_T \eta = \frac{l - x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ получаются задачи для определения $Q^{i/2}(\eta, t)$ $(i = 0, \ldots, 2N+1)$:

$$\frac{\partial^2 Q^{i/2}}{\partial t^2} - \Lambda(l, t) \frac{\partial^2 Q^{i/2}}{\partial \eta^2} + A(l, t) \frac{\partial Q^{i/2}}{\partial t} + B(l, t) Q^{i/2} = H^{i/2}(\eta, t), \tag{8}$$

$$Q^{i/2}(0, t) = v^{i/2}(l, t), \quad Q^{i/2}(\eta, 0) = 0, \quad \frac{\partial Q^{i/2}(\eta, 0)}{\partial t} = 0, \tag{9}$$

где $H^0(\eta, t) \equiv 0$; $H^{i/2}(\eta, t)$ $(i = 1, \ldots, 2N+1)$ линейно выражаются через $Q^{j/2}$, $\frac{\partial Q^{j/2}}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 Q^{j/2}}{\partial \eta^2}$ $(j < i)$.

Таким образом, функции $v^i(x, t)$ $(i = 0, \ldots, N)$ являются решениями задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (x — параметр) (4), (5), которые однозначно разрешимы с учетом предположения 2).

Если будут найдены все $v^i(x, t)$ $(i = 0, \ldots, N)$, то можно найти все $\Pi^{i/2}(\xi, t)$, $Q^{i/2}(\eta, t)$ $(i = 0, \ldots, 2N+1)$ как решения смешанных задач для гиперболических систем второго порядка (6), (7) и (8), (9) соответственно. В силу условий 1) — 3) задачи (6), (7) и (8), (9) однозначно разрешимы. Более того, $\Pi^0(\xi, t)$ отлична от нуля лишь в граничной полоске между осью t и характеристикой системы (4), выходящей из точки (0, 0) с угловым коэффициентом $\frac{1}{\lambda_n(0, 0)}$. Это следует из конечности области зависимости для гиперболических уравнений [2]. Таким образом, $\Pi^0(\xi, t)$ — функция пограничного слоя, а именно гиперболического [3, 4]. Легко видеть, что и все $\Pi^{i/2}(\xi, t)$ $(i = 0, \ldots, 2N+1)$ являются функциями гиперболического пограничного слоя в окрестности левой границы прямоугольника D_T. Аналогичный характер имеют функции $Q^{i/2}(\eta, t)$ $(i = 0, \ldots, 2N+1)$ в окрестности правой границы прямоугольника D_T.

Функция $R_N(x, t, \varepsilon)$ является решением следующей задачи:

$$L_\varepsilon R_N = F(x, t, \varepsilon), \quad R_N(x, 0, \varepsilon) = \frac{\partial R_N(x, 0, \varepsilon)}{\partial t} = R_N(0, t, \varepsilon) = R_N(l, t, \varepsilon) = 0, \tag{10}$$

где $F(x, t, \varepsilon)$ легко может быть выписана в явном виде и, что существенно, $F(x, t, \varepsilon)$ ограничена в D_T.

Методом интегралов энергии [2] получена оценка решения задачи (10), которая имеет вид

$$\| R_N (x, t, \varepsilon) \|_{L_2 (D_T)} \leqslant C, \tag{11}$$

где константа C не зависит от ε. Оценка (11) доказывает асимптотическую корректность разложения (3).

Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. При выполнении условий 1) — 3) решение задачи (1), (2) допускает асимптотическое разложение (3), где $v^i (x, t)$ $(i = 0, \ldots, N)$ являются решениями задач Коши (4), (5), функции гиперболического пограничного слоя $\Pi^{i/2} (\xi, t)$, $Q^{i/2} (\eta, t)$ $(i = 0, \ldots, 2N + 1)$ являются решениями задач (6), (7) и (8), (9) соответственно.

Замечание 1. Если $\Lambda (x, t) \equiv \Lambda (t)$, $A (x, t) \equiv A (t)$, то условие 3) можно ослабить. А именно, достаточно выполнения естественного условия согласования $f (0, 0) = f (l, 0) = 0$.

Замечание 2. Очевидно, что рассмотрение задачи (1), (2) с нулевыми начальными и граничными условиями связано лишь с простотой записи условий согласования 3).

1. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Успехи мат. наук, 1957, 12, № 5, с. 3—122.
2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1964.— 830 с.
3. *Треногин В. А.* Об асимптотике решений квазилинейных гиперболических уравнений с гиперболическим погранслоем.— Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, 1962, вып. 9, с. 112—127.
4. *Цымбал В. Н.* Смешанная задача для гиперболической системы первого порядка с малым параметром.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 4, с. 7—11.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 02.07.80

УДК 517.954

П. И. Штабалюк

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Почти периодические решения дифференциальных уравнений с частными производными привлекают все больший интерес исследователей. Некоторые условия существования почти периодических решений общих линейных уравнений указаны в работе [9]. Почти периодические решения линейных гиперболических уравнений второго порядка изучались в работах [2, 7]. В работе [6] исследованы почти периодические решения линейных эллиптических уравнений с почти периодическими коэффициентами. Почти периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений рассматривались, например, в работах [3, 4, 8]. В данной работе исследованы условия существования и единственности почти периодического по переменной t и периодического по пространственным переменным решения линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В идейном плане данная работа близка к работе [1].

В области $D = [0, \infty[\times \Omega_p$, где Ω_p — p-мерный тор, полученный отождествлением противоположных граней параллелепипеда $\{x : 0 \leqslant x_r \leqslant \leqslant \omega_r, \ r = \overline{1, p}\}$, рассмотрим бестипную систему

$$\frac{\partial^{n_j} u_j (t, x)}{\partial t^{n_j}} - \sum_{r=1}^{m} P_{jr} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p} \right) u_j (t, x) = f_j (t, x) \tag{1}$$

$$(j = \overline{1, m}).$$