

(14) следует, в частности, что

$$A_k^1 = A_k^3 = 0 \quad (f_1(x) = f_3(x) = 0), \quad A_{2k}^2 = A_{2k}^4 = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (15)$$

С учетом (15) обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений у равного торца включений

$$\{k_1^1 - ik_2^1, k_1^2 - ik_2^2\} = -\frac{2\kappa' i}{\sqrt{a}} \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{a^2 - x^2} \{\mu f_3^*(x), f_1^*(x)/(\kappa - 1)\}$$

можно вычислить по формулам

$$k_2^1 = k_2^2 = 0, \quad \{k_1^1, k_1^2\} = \frac{2\kappa'}{\sqrt{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} \frac{a}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \{\mu A_{2n-1}^4, A_{2n-1}^2/(\kappa - 1)\}. \quad (16)$$

Система уравнений (14) решалась численно методом редукции для  $\nu_0 = \nu = 1/3$ ,  $h = 0, 0, 1 a$ . При относительной длине включений  $\lambda \equiv a/\pi \leq 2$  для достижения точности в 2% оказалось достаточным выбирать от 15 до 30 отличных от нуля членов разложения (11). На рис. 2, 3 представлены зависимости  $k_1^1$  и  $k_2^1$  от  $\lambda$  для разных относительных жесткостей включений  $k = E_0/E$ . При  $k = 0,0001$   $k_1^1$  отличается от значения общепринятого коэффициента интенсивности напряжений  $k_1$ , определенного в работе [4] для компланарных трещин, не более чем на 10%.

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.— 1108 с.
2. Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями.— ПММ, 1975, 39, вып. 3, с. 520—529.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Изд-во АН УССР, 1954.— 647 с.
4. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев: Наук. думка, 1976.— 442 с.

Институт прикладных проблем  
механики и математики АН УССР  
Львовский университет

Поступила в редколлегию  
04.02.80

УДК 550.385

С. В. Соболев

#### К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ

Исследование физических свойств вещества на различных глубинах и разведка полезных ископаемых тесно связаны с изучением электропроводности коры и мантии Земли. Методы определения электропроводности Земли [1, 3, 5] приобрели особую актуальность в связи с исследованием предвестников землетрясений (возрастание кажущейся проводимости среды в районе будущего очага) и обнаружением приуроченности зон аномальной электропроводности к областям повышенной сейсмичности (см., например, работы [4, 5, 8, 9]). Один из таких методов основан на сравнении горизонтальных компонентов напряженностей переменных электрического и магнитного полей на поверхности Земли. Проводимость однородной (или кажущейся неоднородной) среды при гармонически изменяющемся во времени электромагнитном поле определяется формулой

$$\sigma = \frac{\mu\omega}{4\pi} \frac{|H|^2}{|E|^2} \quad (1)$$

(используется гауссова система единиц). Здесь  $\mu$  — магнитная проницаемость среды;  $\omega$  — частота изменения поля;  $E$ ,  $H$  — амплитудные значения ортогональных составляющих полей по касательной к поверхности.

Формула (1) получена в предположении об установившемся процессе колебаний, вследствие чего ее применимость ограничена в основном анализом полей, создаваемых искусственными источниками. Вместе с тем используемые для изучения электропроводности глубинных слоев длиннопериодные геомагнитные вариации естественного происхождения часто имеют резко выраженное начало, и их продолжительность порядка характерного времени явления (бухты, бури). Поэтому представляет интерес решение начальной задачи скин-эффекта с последующим анализом процесса установления гармонических колебаний.

Пусть из диэлектрика ( $z < 0$ , среда 1) со свойствами вакуума на границу  $z = 0$  проводящего полупространства ( $z \geq 0$ , среда 2) по нормали падает плоская монохроматическая электромагнитная волна

$$E_{x1} = E_0 \sin(kz - \omega t), \quad H_{y1} = H_0 \sin(kz - \omega t). \quad (2)$$

Считаем, что в момент времени  $t = 0$  фронт волны совпадает с границей  $z = 0$ . Тогда

$$E_{x1} = E_0 \sin kz, \quad H_{y1} = H_0 \sin kz, \quad E_{x2} = H_{y2} = 0. \quad (3)$$

Уравнения электромагнитного поля имеют вид

$$\frac{\partial E_{x1}}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{y1}}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H_{y1}}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_{x1}}{\partial t}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_{x2}}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_{y2}}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H_{y2}}{\partial z} = \frac{4\pi\sigma E_{x2}}{c}. \quad (5)$$

Второе уравнение в (5) не содержит плотности тока смещения, так как в рассматриваемом круге явлений ее величина пренебрежимо мала по сравнению с плотностью тока проводимости. Применяя к уравнениям (4) — (5) преобразование Лапласа, учитывая начальные (3) и граничные

$$E_{x1} = E_{x2}, \quad H_{y1} = H_{y2} \quad \text{при } z = 0 \quad (6)$$

условия, для лаплас-образов поля в среде 2 получаем выражения

$$\frac{E_{x2p}}{E_0} = -\frac{2\omega}{(\omega^2 + p^2) \left(1 + \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\mu\rho}}\right)} e^{-\frac{1}{c} \sqrt{4\pi\sigma\rho} z}, \quad (7)$$

$$\frac{H_{y2p}}{H_0} = -\frac{2\omega \sqrt{4\pi\sigma}}{\sqrt{\mu\rho} (\omega^2 + p^2) \left(1 + \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\mu\rho}}\right)} e^{-\frac{1}{c} \sqrt{4\pi\sigma\mu\rho} z} \quad (8)$$

где  $p$  — параметр преобразования. Совершая с помощью методов [2] обратное преобразование Лапласа для напряженностей электрического и магнитного полей на границе  $z = 0$  в моменты времени  $t \geq 0$ , находим

$$\frac{E_x}{E_0} = \frac{2a}{1+a^2} \left\{ \left( \cos \omega t - \frac{1}{a} \sin \omega t \right) - e^{a\omega t} [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{a\omega t})] - \right. \\ \left. - \sqrt{2a} \left[ C(\omega t) \left( \cos \omega t - \frac{1}{a} \sin \omega t \right) + S(\omega t) \left( \sin \omega t + \frac{1}{a} \cos \omega t \right) \right] \right\}, \quad (9)$$

$$\frac{H_y}{H_0} = \frac{2a}{1+a^2} \left\{ e^{a\omega t} [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{a\omega t})] - (\cos \omega t + a \sin \omega t) + \right. \\ \left. + \sqrt{2a} \left[ C(\omega t) \left( \cos \omega t - \frac{1}{a} \sin \omega t \right) + S(\omega t) \left( \sin \omega t + \frac{1}{a} \cos \omega t \right) \right] \right\}. \quad (10)$$

Здесь  $\operatorname{erf}(x)$  — интеграл вероятностей вида

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau; \quad (11)$$

$C(x)$  и  $S(x)$  — интегралы Френеля:

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau, \quad S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau. \quad (12)$$

Постоянная  $a = \frac{4\pi\sigma}{\mu\omega} = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}$  ( $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды)

с точностью до множителя  $\frac{\varepsilon}{\mu}$  имеет порядок отношения величин плотностей токов проводимости и смещения. Считая, что  $\frac{\varepsilon}{\mu} \sim 1$  ( $a \gg 1$ ), и используя асимптотическое поведение функций (11) и (12) [7], для безразмерных напряженностей полей (9) — (10) получаем

$$1) \quad \omega t \ll \frac{1}{a} \ll 1,$$

$$\frac{E_x}{E_0} \simeq 4 \sqrt{\frac{\omega t}{\pi a}}, \quad \frac{H_y}{H_0} \simeq -4 \sqrt{\frac{\omega t}{\pi a}}; \quad (13)$$

$$2) \quad \frac{1}{a} \ll \omega t \ll 1,$$

$$\frac{E_x}{E_0} \simeq \frac{2}{a} \left(1 - 2 \sqrt{\frac{a}{\pi} \omega t}\right), \quad \frac{H_y}{H_0} \simeq -2\omega t; \quad (14)$$

$$3) \quad 1 \ll \omega t \ll a, \quad \omega t \gg a,$$

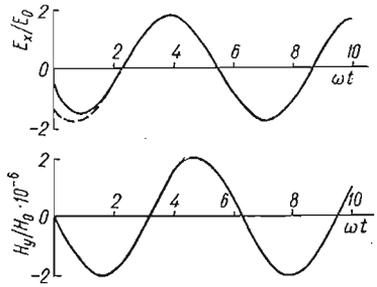
$$\frac{E_x}{E_0} \simeq -\frac{2}{\sqrt{a}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \quad \frac{H_y}{H_0} \simeq -2 \sin \omega t. \quad (15)$$

Формулы (13) — (15) по частоте падающего возмущения и измеренным полям  $\frac{E_x}{E_0}$  и  $\frac{H_y}{H_0}$  позволяют рассчитать постоянную  $a$  и тем самым определить проводимость среды  $\sigma$ . Случай 3) соответствует установившимся колебаниям, а определяемая им формула для проводимости совпадает с формулой (1). При этом время установления гармонических колебаний на границе среды не превышает нескольких периодов.

На рисунке представлены зависимости (9), (10) для случая возмущения с периодом 2 ч, отвечающим средней продолжительности бухтообразного геомагнитного возмущения. Глубина проникновения поля такого возмущения порядка 400 км, а средняя проводимость слоя такой толщины примерно равна  $10^{-2} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$  [6]. В приведенном примере эффект переходного процесса выражен практически лишь у временной зависимости напряженности электрического поля (установившимся гармоническим колебаниям соответствует штриховая кривая). Формальный расчет проводимости по первым амплитудным значениям электрического и магнитного полей на основе формулы (1) приводит к величине  $\sigma$ , завышенной примерно на 30%. При больших частотах возмущений отклонение временного хода полей от случая установившихся колебаний становится заметнее. Отсюда следует, что использование формул (9) — (14) позволяет в рассматриваемом методе более точно определять электропроводность вещества Земли.

Отметим, что учет токов смещения в исходных уравнениях приводит в случае  $\varepsilon = \mu = 1$  к следующим выражениям для напряженностей полей в среде 2 ( $z \geq 0$ ) при  $t \geq 0$ :

$$\frac{E_{x2}}{E_0} = -2 \sqrt{\frac{b\omega}{\pi}} \int_{z/c}^t f_1(u) f_2(t-u) du,$$



где

$$\frac{H_{y2}}{H_0} = -\sqrt{2b\omega} \int_{z/c}^t f_1(u) f_3(t-u) du,$$
$$f_1(x) = \left(\frac{x+z/c}{x-z/c}\right)^{1/4} e^{-\frac{bx}{2}} \left[ \frac{1-b(x-z/c)}{b(x-z/c)} I_{1/2}\left(\frac{b}{2}\sqrt{x^2-z^2/c^2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{x}{x+z/c} I_{3/2}\left(\frac{b}{2}\sqrt{x^2-z^2/c^2}\right) \right]; \quad f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \rho^{k+1} \times \\ \times \frac{(\omega x)^{k+\frac{1}{2}}}{2k+1} \sin[\omega x + \varphi(k+1)]; \quad f_3(x) = C(\omega x) \cos \omega x + \\ + S(\omega x) \sin \omega x + \frac{b}{\omega} [C(\omega x) \sin \omega x - S(\omega x) \cos \omega x];$$

$I_{1/2}$ ,  $I_{3/2}$  — модифицированные функции Бесселя;  $\rho = \left[1 + \left(\frac{b}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}$ ;  $\varphi = \text{arctg} \frac{\omega}{b}$ . Интегралы Френеля  $C$  и  $S$  определены формулами (12).

1. Ваньян Л. Л. Основы электромагнитных зондирований. — Л.: Недра, 1965. — 109 с.
2. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. — М.: Л.: Гостехтеориздат, 1951. — 319 с.
3. Рикитаки Т. Электромагнетизм и внутреннее строение Земли. — Л.: Недра, 1968. — 331 с.
4. Рикитаки Т. Предсказание землетрясений. — М.: Мир, 1979. — 388 с.
5. Рокитянский И. И. Исследование аномалий электропроводности методом магнитовариационного профилирования. — Киев: Наук. думка, 1975. — 279 с.
6. Стейси Ф. Физика Земли. — М.: Мир, 1972. — 342 с.
7. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1968. — 344 с.
8. Honkura Y. Electrical conductivity anomalies in the Earth. — Geophys. Surv., 1978, 3, p. 225—253.
9. Rikilake T. Classification of earthquake precursors. — Tectonophysics, 1979, 54, p. 293—309.

Курский педагогический институт

Получила в редколлегию  
08.09.80

УДК 550.383

В. Е. Максимчук

#### ВОЗМОЖНОСТИ МАГНИТОМЕТРИИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЗЕМНОЙ КОРЫ ЗАКАРПАТЬЯ

Тектонические процессы такие, как современные движения земной коры и землетрясения, неразрывно связаны с изменением напряженного состояния земной коры. Экспериментальные исследования на специальных полигонах в различных районах СССР и за рубежом показали возможности и перспективы использования магнитометрического метода для изучения динамики современных тектонических процессов [1, 2, 4, 8, 10—13]. Постановка таких исследований основана на изменении магнитных свойств горных пород под действием механического сжатия или растяжения — пьезомагнитном эффекте. Вариации магнитного поля, вызванные подготовкой и осуществлением землетрясений, получили название сейсмомагнитного или тектономагнитного эффекта. С целью выяснения возможностей магнитометрии при изучении динамики земной коры в Закарпатье ведутся исследования на Карпатском геодинамическом полигоне. При относительно небольших размерах (100 × 100 км) полигон охватывает разнородные тектонические элементы такие, как часть Складчатых Карпат, Выгорлат-Гутинской вулканической гряды,