

Р. М. Мартыняк, Г. Т. Сулим

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ КОМПЛАНАРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим периодическую задачу упругого равновесия однородной изотропной плоскости, в которой с периодом 2π расположена бесконечная система компланарных тонкостенных включений (рис. 1). Длина каждого включения $2a$, ширина $2h$; E , E_0 — модули Юнга, μ , μ_0 — модули сдвига, ν , ν_0 — коэффициенты Пуассона материалов матрицы и включений соответственно. В плоскости сосредоточены внешние усилия — сила \vec{P} и момент M , приложенные в точках $z_{01} + 2p\pi i$ и $z_{10} + 2p\pi i$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) соответственно. На бесконечности на пластинку действует поле однородных напряжений ($\sigma_y^\infty = q$, $\sigma_x^\infty = q_1$).

Каждое p -е включение ввиду его малой толщины моделируется скачком напряжений и производных смещений на его срединной линии L_p [2]:

$$\begin{aligned} (\sigma_{y1} - i\tau_{xy1}) - (\sigma_{y2} - i\tau_{xy2}) &= \\ &= f_1(z) - if_2(z) \equiv f_1^*(z), \\ (u_1' + iv_1') - (u_2' + iv_2') &= \\ &= f_3(z) + if_4(z) \equiv f_3^*(z) \end{aligned}$$

$$(z = x + 2p\pi i \in L_p), \quad (1)$$

причем $f_j(x + 2p\pi i) = 0$ при $|x| > a$, $f_j(x + 2p\pi i) = f_j(x)$ ($p = 0, \pm 1, \dots; j = 1, 2, 3, 4$). Здесь и далее $\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}$ — компоненты тензора напряжений; u, v — компоненты вектора смещений; индексы «1» и «2» характеризуют соответствующие величины, определенные в матрице снизу и сверху линии L_p ; $f_j(x)$ — заранее неизвестные функции.

Предложенный подход к решению задачи с использованием функций скачка дает возможность использовать принцип суперпозиции. Поэтому

$$\sigma_y(z) = \sigma_y^0(z) + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sigma_y^{(p)}(z), \quad \tau_{xy}(z) = \tau_{xy}^0(z) + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \tau_{xy}^{(p)}(z), \quad (2)$$

$$u(z) = u^0(z) + \sum_{p=-\infty}^{\infty} u^{(p)}(z), \quad v(z) = v^0(z) + \sum_{p=-\infty}^{\infty} v^{(p)}(z),$$

где $\sigma_y^0(z), \dots, v^0(z)$ определяют соответствующие величины в нагруженной указанным выше способом однородной плоскости при отсутствии включений, а $\sigma_y^{(p)}(z), \dots, v^{(p)}(z)$ характеризуют возмущение напряженно-деформированного состояния от заданного формулами (1) скачка напряжений и производных от смещений вдоль линии L_p ($p = 0, \pm 1, \dots$).

Прямая L_p является линией раздела верхней Π_2^p и нижней Π_1^p полуплоскостей. Тогда применение комплексных потенциалов Колосова — Мусхелишвили [3] позволяет записать, что

$$\sigma_{y_k}^{(p)} - i\tau_{xy_k}^{(p)} = \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} + z\Phi_k'(z) + \overline{\Psi_k(z)},$$

$$2\mu(u_k^{(p)'} + iv_k^{(p)'}) = \kappa\Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(z)} - z\Phi_k'(z) - \overline{\Psi_k(z)} \quad (z \in \Pi_2^p; k = 1, 2).$$

Здесь $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$ — голоморфные, исчезающие на бесконечности функции: $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

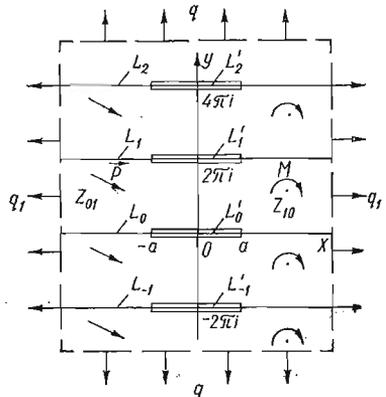


Рис. 1

Используя методику работы [2] и формулы (3), (4) работы [3, § 38], нетрудно получить соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{yk}^{(p)} - i\tau_{xyk}^{(p)} &= \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar{z} + 4\rho\pi i) + (z - \bar{z} - 4\rho\pi i) \overline{\Phi_k'(z)}, \\ 2\mu(u_k^{(p)'} + iv_k^{(p)'}) &= \kappa\Phi_k(z) + \Phi_k(\bar{z} + 4\rho\pi i) - (z - \bar{z} - 4\rho\pi i) \overline{\Phi_k'(z)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_k(z) &= \kappa' [Y(z) - 2\mu X(z)]; \quad \Phi_l(z) = \kappa' [\kappa Y(z) + 2\mu X(z)] \\ (z \in \Pi_k; \quad k, l = 1, 2; \quad k \neq l), \end{aligned} \quad (4)$$

причем

$$\kappa' = 1/(1 + \kappa), \quad \{X(z), Y(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\{f_3^*(t), -f_1^*(t)\}}{t + 2\rho\pi i - z} dt.$$

На основании соотношений (2) — (4) с использованием формул Сохоцкого — Племеля [3], а также (1.421) справочника [1] получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{yh}(x) - i\tau_{xyh}(x) &= \pm \frac{1}{2} f_1^*(x) - l_1 s_3(x) - m s_1(x) + l_1 t_3(x) + \\ &+ \frac{l_1}{2\mu} t_1(x) + \sigma_y^0(x) - i\tau_{xy}^0(x), \\ u_k'(x) + iv_k'(x) &= \pm \frac{1}{2} f_3^*(x) + m s_3(x) - l_2 s_1(x) - \frac{l_1}{2\mu} t_3(x) - \\ &- \frac{l_2}{\kappa} t_1(x) + u^0(x) + iv^0(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\{s_r(x), -\overline{t_r(x)}\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a f_r^*(t) \left\{ \operatorname{cth} \frac{t-x}{2}, \operatorname{cth} \frac{t-x}{2} - \frac{t-x}{2} \operatorname{sh}^{-2} \frac{t-x}{2} \right\} dt$$

($r = 1, 3$); $m = (1 - \kappa)/(2(1 + \kappa))$; $l_1 = 2\mu/(1 + \kappa)$; $l_2 = \kappa/(2\mu(1 + \kappa))$, а значению $k = 1, 2$ соответствует верхний или нижний знак.

Подставляя соотношения (5) в условия взаимодействия плоскости с тонкостенным включением (1.2) [2], получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_{r1} K_1 f_2(t) + \lambda_{r2} K_1 f_4(t) + \lambda_{r3} K_2 f_2(t) + \lambda_{r4} K_2 f_4(t) + \lambda_r K_3 f_2(t) + \\ + \delta_{r3} \lambda_4 K_3 f_4(t) = F_r(x) \quad (r = 1, 3), \\ \lambda_{21} K_1 f_1(t) + \lambda_{22} K_1 f_3(t) + \lambda_{23} K_2 f_1(t) + \lambda_{24} K_2 f_3(t) + \lambda_2 K_3 f_3(t) = F_2(x), \\ f_3(x) = -k_2 f_1(x), \end{aligned} \quad (6)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} \{K_1, K_2\} \varphi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \varphi(t) \left\{ \operatorname{cth} \frac{t-x}{2}, K(t-x) \right\} dt; \quad K_3 \varphi(t) = \int_{-a}^x \varphi(t) dt; \\ \lambda_{11} &= l_2 + k_1 m; \quad \lambda_{12} = m - k_1 l_1; \quad \lambda_{13} = \frac{k_1 l_1}{2\mu} - \frac{l_2}{\kappa}; \quad \lambda_{14} = l_1 \left(\frac{1}{2\mu} - k_1 \right); \\ \lambda_{21} &= -(\mu_0 l_2 + m); \quad \lambda_{22} = \mu_0 m - l_1; \quad \lambda_{23} = \frac{l_1}{2\mu} - \frac{l_2}{\mu_0 \kappa}; \quad \lambda_{24} = l \left(1 - \frac{\mu_0}{2\mu} \right); \\ \lambda_{31} &= m; \quad \lambda_{32} = -l_1; \quad \lambda_{33} = \frac{l_1}{2\mu}; \quad \lambda_{34} = -l_1; \\ \lambda_1 &= -\frac{k_0}{2h}; \quad \lambda_2 = \frac{\mu_0}{2h}; \quad \lambda_3 = -\frac{\nu_0}{2h}; \quad \lambda_4 = \frac{1}{2hk_0}; \end{aligned}$$

$$F_1(x) = k_0 N_- - u^{0'}(x) - k_1 \sigma_y^0(x); \quad F_2(x) = \mu_0 \left[v^{0'}(x) - \frac{\tau_{xy}^0(x)}{\mu_0} - \frac{c_1^-}{2h} \right];$$

$$F_3(x) = \nu_0 N_- - \sigma_y^0(x) - \frac{c_2^-}{2h};$$

$$k_0 = \frac{1 + \kappa_0}{8\mu_0}; \quad k_1 = \frac{3 - \kappa_0}{8\mu_0}; \quad k_2 = \frac{(k_1)^2 - (k_0)^2}{k_1};$$

δ_{rj} — символ Кронекера, причем

$$K(x) = \operatorname{cth} x - \frac{x}{2} \operatorname{sh}^{-2} \frac{x}{2}. \quad (7)$$

Величины N_- , c_1^- , c_2^- определяются формулами (2.10), (2.11) работы [2].
Функции $f_j(x)$ должны удовлетворять дополнительным условиям [2]

$$\int_{-a}^a f_j(t) dt = A' \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (8)$$

В случае абсолютно жестких включений ($E_0 = \infty$) либо щелей ($E_0 = 0$) из системы (6) следует, что

$$f_3^*(x) = 0, \quad K_1 f_1^*(t) + \frac{1}{x} \overline{K_2 f_1^*(t)} = i(u^{0'} + iv^{0'})/l_2 \quad (9)$$

либо

$$f_1^*(x) = 0, \quad K_1 f_3^*(t) - K_2 \overline{f_3^*(t)} = i(\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0)/l_1. \quad (10)$$

Анализ характеристической части системы (6) указывает на то, что ее решение должно иметь на концах промежутка интегрирования корневую особенность. Поэтому искомые функции удобно представить в виде разложений по полиномам Чебышева первого рода

$$f_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^j T_n \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{a}{2} \right) / \left(\operatorname{ch} \frac{x}{2} \sqrt{2(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} x)} \right) \quad (j = \overline{1, 4}). \quad (11)$$

В результате подстановки выражений (11) в систему (6) с использованием формул (7.344) [1] получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda_{21} J_{n1}(x) + \lambda_{23} H_n(x) + \lambda_2 J_{2n}(x)] A_n^1 &= F_2(x), \quad A_n^3 = -k_2 A_n^1, \\ \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda_{r1} J_{1n}(x) + \lambda_{r3} H_n(x) + \lambda_r J_{2n}(x)] A_n^2 &+ \\ + \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda_{r2} J_{1n}(x) + \lambda_{r4} H_n(x) + \delta_{r3} \lambda_4 J_{2n}(x)] A_n^2 &= F_r(x) \quad (r = 1, 3). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\lambda'_{21} = \lambda_{21} - k_2 \lambda_{22}; \quad \lambda'_{23} = \lambda_{23} - k_2 \lambda_{24}; \quad \lambda'_2 = \lambda_2;$$

$$J_{10}(x) = -\operatorname{th} \frac{x}{2} / \left(2 \operatorname{ch} \frac{a}{2} \right); \quad J_{20}(x) = \left[\pi - \arccos \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{a}{2} \right) \right] / \operatorname{ch} \frac{a}{2};$$

$$\{J_{1n}(x), J_{2n}(x)\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 / \left(\operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} \right), -\sqrt{2(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} x)} / \left(n \operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2} \right) \right\} \times$$

$$\times U_{n-1} \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{a}{2} \right); \quad (13)$$

$$H_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{K(t-x) T_n \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{a}{2} \right)}{\operatorname{ch} t/2 \sqrt{2(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} t)}} dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Для вычисления $H_n(x)$ в соотношении (13) можно использовать приближенное выражение ядра $K(x)$, получаемое после разложения в ряд второго слагаемого в (7) и удержания четырех первых членов ряда, что дает

$$H_n(x) = - \left(2\pi \operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} \right)^{-1} \int_{-a}^a \frac{(1 - \alpha^2 \eta^2) T_n(\eta)}{(\eta - \xi)^2 \sqrt{1 - \eta^2}} \left[\frac{\alpha^2}{3} (\eta^3 - \xi^3) + \frac{\alpha^4}{5} (\eta^5 - \xi^5) + \frac{\alpha^6}{7} (\eta^7 - \xi^7) \right] d\eta,$$

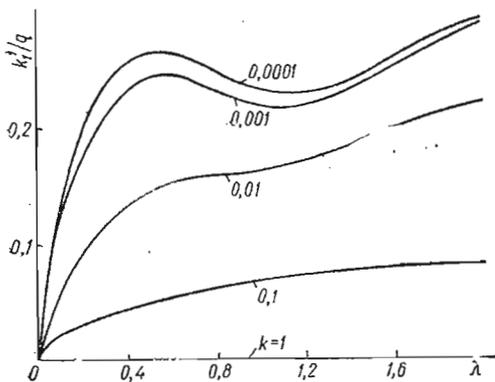


Рис. 2

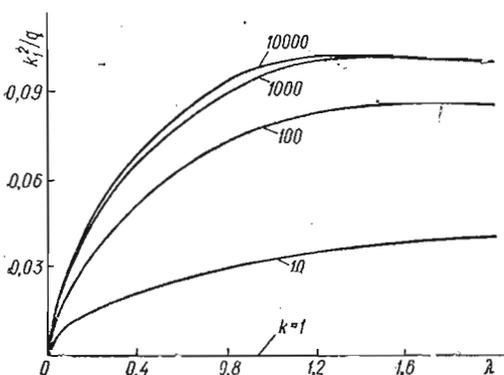


Рис. 3

причем $\eta = \operatorname{th} \frac{t}{2} \operatorname{cth} \frac{a}{2}$, $\xi = \operatorname{th} \frac{x}{2} \times \operatorname{cth} \frac{a}{2}$, $\alpha = \operatorname{th} \frac{a}{2}$. Относительная погрешность такой аппроксимации подынтегрального выражения не превышает 12%, но сама функция определяется гораздо точнее.

Умножая равенства (12) последовательно на систему функций

$$R_k(x) = \sqrt{2(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} x)} \times U_{k-1} \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{a}{2} \right) / \operatorname{ch} \frac{x}{2} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и интегрируя по x от $-a$ до a , получаем определяющую A_n^i систему уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda'_{21} \frac{\pi}{2} \delta_{nk} + \lambda'_{23} H_{nk} + \lambda'_{2} Q_{nk} \right] \times A_n^1 = G_{2k}, \quad A_n^3 = -k_2 A_n^1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_{r1} \frac{\pi}{2} \delta_{nk} + \lambda_{r3} H_{nk} + \lambda_r Q_{nk} \right] \times A_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_{r2} \frac{\pi}{2} \delta_{nk} + \lambda_{r4} H_{nk} + \right.$$

$$\left. + \delta_{r3} \lambda_4 Q_{nk} \right] A_n^4 = G_{rk} \quad (k = 1, 2, \dots; r = 1, 3). \quad (14)$$

Здесь обозначено:

$$G_{rk} = g_{rk} - C_{rk} A_0^2 - D_{rk} A_0^4; \quad C_{rk} = \lambda_{r1} d_k + \lambda_{r3} H_{0k} + \lambda_r Q_{0k};$$

$$D_{rk} = \lambda_{r2} d_k + \lambda_{r3} H_{0k} + \delta_{r3} \lambda_4 Q_{0k}; \quad G_{2k} = g_{2k} - C_{2k} A_0^4;$$

$$C_{2k} = \lambda'_{21} d_k + \lambda'_{23} H_{0k} + \lambda'_{2} Q_{0k};$$

$$\{H_{nk}, Q_{nk}, d_k, g_{rk}\} = \int_{-a}^a \{H_n(x), J_{2n}(x), J_{10}(x), F_r(x)\} R_{k-1}(x) dx$$

$$(r = 1, 3; k = 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots);$$

$$A_0^i = A^i \operatorname{ch} \frac{a}{2} / \pi \quad (i = \overline{1, 4}).$$

В качестве примера рассмотрим случай симметричного нагружения плоскости усилием $\sigma_y^\infty = q$. Тогда $A^i = 0$ ($i = \overline{1, 4}$), $F_2(x) \equiv 0$ и из системы

(14) следует, в частности, что

$$A_k^1 = A_k^3 = 0 \quad (f_1(x) = f_3(x) = 0), \quad A_{2k}^2 = A_{2k}^4 = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (15)$$

С учетом (15) обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений у равного торца включений

$$\{k_1^1 - ik_2^1, k_1^2 - ik_2^2\} = -\frac{2\kappa' i}{\sqrt{a}} \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{a^2 - x^2} \{\mu f_3^*(x), f_1^*(x)/(\kappa - 1)\}$$

можно вычислить по формулам

$$k_2^1 = k_2^2 = 0, \quad \{k_1^1, k_1^2\} = \frac{2\kappa'}{\sqrt{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} \frac{a}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \{\mu A_{2n-1}^4, A_{2n-1}^2/(\kappa - 1)\}. \quad (16)$$

Система уравнений (14) решалась численно методом редукции для $\nu_0 = \nu = 1/3$, $h = 0, 0, 1 a$. При относительной длине включений $\lambda \equiv a/\pi \leq 2$ для достижения точности в 2% оказалось достаточным выбирать от 15 до 30 отличных от нуля членов разложения (11). На рис. 2, 3 представлены зависимости k_1^1 и k_2^1 от λ для разных относительных жесткостей включений $k = E_0/E$. При $k = 0,0001$ k_1^1 отличается от значения общепринятого коэффициента интенсивности напряжений k_1 , определенного в работе [4] для компланарных трещин, не более чем на 10%.

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.— 1108 с.
2. Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями.— ПММ, 1975, 39, вып. 3, с. 520—529.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Изд-во АН УССР, 1954.— 647 с.
4. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев: Наук. думка, 1976.— 442 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР
Львовский университет

Поступила в редколлегию
04.02.80

УДК 550.385

С. В. Соболев

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ

Исследование физических свойств вещества на различных глубинах и разведка полезных ископаемых тесно связаны с изучением электропроводности коры и мантии Земли. Методы определения электропроводности Земли [1, 3, 5] приобрели особую актуальность в связи с исследованием предвестников землетрясений (возрастание кажущейся проводимости среды в районе будущего очага) и обнаружением приуроченности зон аномальной электропроводности к областям повышенной сейсмичности (см., например, работы [4, 5, 8, 9]). Один из таких методов основан на сравнении горизонтальных компонентов напряженностей переменных электрического и магнитного полей на поверхности Земли. Проводимость однородной (или кажущейся неоднородной) среды при гармонически изменяющемся во времени электромагнитном поле определяется формулой

$$\sigma = \frac{\mu\omega}{4\pi} \frac{|H|^2}{|E|^2} \quad (1)$$

(используется гауссова система единиц). Здесь μ — магнитная проницаемость среды; ω — частота изменения поля; E , H — амплитудные значения ортогональных составляющих полей по касательной к поверхности.