

2. Слой с плоской трещиной, которая занимает область  $S_1: x = 0, |y| < \infty, a \leq z \leq b$ . На гранях слоя выполняются условия (3). Имеем два случая:

а) если берега трещины подвергаются воздействию равных по величине, но противоположных по знаку температур  $T_0$ , то из (34) найдем  $w(0, y, z, t) = 0, \omega(0, y, z, t) = 2T_0$ ;

б) в случае загрузки берегов трещины тепловыми потоками  $g_1^+ = -q_0, g_1^- = q_0$  решение уравнения (35) при  $N = 1$  имеет вид  $w(0, y, z, t) = 2q_0, \omega(0, y, z, t) = 0$ .

Температурные поля по известным плотностям  $w$  и  $\omega$  находим по формуле (27).

Предложенный метод построения потенциалов и вывод интегральных уравнений нестационарных задач теплопроводности для полосы и слоя с разрезами может быть применен при построении потенциалов и интегральных уравнений в более сложных областях, для которых можно построить фундаментальные решения. Некоторые из таких фундаментальных решений в настоящее время известны [1, 2, 6] или легко находятся для тел, имеющих форму параллелограмма, параллелепипеда, клина.

Как частные случаи из приведенных результатов получаем выражения потенциалов и интегральных уравнений нестационарной теплопроводности для полубесконечных (полуплоскости  $0 \leq z < \infty, |x| < \infty$ ; полупространства  $0 \leq z < \infty, |x| < \infty, |y| < \infty$ ) и бесконечных тел [5], потенциалы и интегральные уравнения стационарной теплопроводности для полосы, слоя, полуплоскости, полупространства, плоскости [3], пространства [4].

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений.— М.: Мир, 1964.— 517 с.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел.— М.: Наука, 1964.— 487 с.
3. Кит Г. С., Побережный О. В. Расчет температурного поля в пластине с трещинами при наличии теплообмена.— В кн.: Качество, прочность, надежность и технологичность электровакuumных приборов.— Киев: Наук. думка, 1976, с. 153.
4. Кит Г. С., Побережный О. В. Термоупругое состояние бесконечного тела с теплопроводящей круговой трещиной.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1970, вып. 9, с. 78—88.
5. Кит Г. С., Побережный О. В. Интегральные уравнения нестационарной теплопроводности для тел с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 58—63.
6. Новацкий В. Вопросы термоупругости.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.— 363 с.
7. Побережный О. В., Кит Г. С. Об определении температурного поля в пластине с шайбой при неидеальном тепловом контакте между ними.— Инж.-физ. журн., 1968, 15, № 4, с. 703—709.
8. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев: Наук. думка, 1972.— 308 с.
9. Положий Г. Н. Уравнения математической физики.— М.: Высш. школа, 1964.— 559 с.

Институт прикладных проблем  
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
14.07.80

УДК 533.6.013.42

В. В. Пороховский

#### РАССЕЯНИЕ ОГРАНИЧЕННОГО ЗВУКОВОГО ПУЧКА УПРУГОЙ ТОНКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ В ВОДЕ

Анализ эхо-сигнала, вызванного падением на упругую сферическую оболочку сферического или плоского звукового импульса, подробно изложен в работах [2, 3, 11]. Влияние направленности зондирующего импульса на переизлученные сигналы учтено в работах [1, 4—8, 10]. В данной работе исследуется задача эхо-сигнала, вызванного звуковым импульсом, распространяющимся в виде узкого конического пучка и освещающего лишь часть повер-

ности тонкой упругой сферической оболочки, заполненной сжимаемой и невязкой жидкостью.

**Постановка задачи.** В безграничной идеальной сжимаемой жидкости покоится тонкая упругая сферическая оболочка. На эту оболочку со стороны внешней акустической среды набегаёт импульс в виде узкого конического пучка, ось симметрии которого проходит через центр сферы. Источником распространения импульса является излучатель мембранного типа с идеальной характеристикой направленности [9]. Тогда давление в падающем поле имеет вид [6]

$$p_i(r, \theta, \tau) = \frac{l_0}{l} p_* f(\tau - l) [U(\tau - l) - U(\tau - l - \tau_0)] R(r, \theta), \quad (1)$$

где

$$R(r, \theta) = U\left(\sin \psi_0 - \frac{r}{l} \sin \theta\right); \quad l = \sqrt{l_0^2 - 2l_0 r \cos \theta + r^2}, \quad (2)$$

$$p_* = p_0 \operatorname{cosec}^2 \frac{\psi_0}{2}; \quad f(\tau) \equiv 0 \quad (\tau \leq 0).$$

Для исследования переизлученных сигналов необходимо найти поле давления  $p_e$ , вызванное действием волны с давлением  $p_i$  и удовлетворяющее волновому уравнению

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) p_e = 0, \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \quad (3)$$

и следующим начальным и граничным условиями:

$$p_e = \frac{\partial p_e}{\partial \tau} = p_i = \frac{\partial p_i}{\partial \tau} = u_j = \frac{\partial u_j}{\partial \tau} = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad \tau = 0; \quad (4)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right) p_e = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \omega_e}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} = 0, \quad q = -p_i - p_e, \quad r = 1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2}, \quad q + p_i = 0, \quad r = r_2.$$

Предполагается, что решение ограничено в области, где оно определено. Давление в заполнителе  $p_i$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\beta_j^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) p_i = 0. \quad (7)$$

Для описания упругих волн в оболочке используются уравнения теории типа Тимошенко

$$\sum_{i=1}^3 L_{ij} u_i + q \delta_{i3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad (8)$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg}^2 \theta - \nu - \kappa^2 - (1 + a^2) \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2},$$

$$L_{12} = r_0 \left(\kappa^2 - 2a^2 \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right), \quad L_{13} = (1 + \nu + \kappa^2) \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$L_{21} = \kappa^2 - 2a^2 \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2},$$

$$L_{22} = r_0 \left\{ a^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg}^2 \theta - \nu - \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) - \kappa^2 \right\},$$

$$L_{23} = -\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad L_{31} = -(1 + \nu + \kappa^2) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \right),$$

$$L_{32} = r_0 \kappa^2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \right),$$

$$L_{33} = \kappa^2 \left( -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - 2(1 + \nu) - (1 + \alpha^2) \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}. \quad (9)$$

В формулах (1) — (8) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{ct}{R_1}; \quad \tau_0 = \frac{ct_0}{R_1}; \quad \beta_f = \frac{c_f}{c}; \\ r_2 &= \frac{R_2}{R_1}; \quad r = \frac{R}{R_1}; \quad a = \frac{H}{\sqrt{12}R_0}; \\ \kappa &= \frac{c_{20}}{c_{10}}; \quad \lambda_0 = \frac{r_0}{\beta_0}; \quad r_0 = \frac{R_0}{R_1}; \\ \beta_0 &= \frac{c_{10}}{c}; \quad h = \frac{H}{R_1}; \\ c_{10} &= \left[ \frac{E}{\rho_1 (1 - \nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad c_{20} = \left[ \frac{E k_T^2}{2\rho_1 (1 + \nu)} \right]^{\frac{1}{2}}; \\ q &= \frac{q_r}{\rho c^2 \alpha}; \quad \alpha = \frac{\rho}{\rho_1} \frac{R_0}{H} \beta_0^{-2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\rho_0$  — постоянная, имеющая размерность давления;  $f(\tau)$  — модуляция импульса;  $r, \theta$  — сферические координаты с началом отсчета в центре сферической оболочки;  $2\Phi_0$  — плоский угол развертки набегающего пучка;  $l_0$  — расстояние от центра источника до центра рассеивателя, отнесенное, как и другие линейные величины, к радиусу сферической оболочки  $R_1$ ;  $H, R_2, R_0$  — размерные толщина, внутренний радиус и радиус срединной поверхности оболочки;  $t$  — время;  $t_0$  — длительность импульса;  $U(x)$  — функция Хевисайда;  $u_1, u_3$  — тангенциальное и радиальное перемещения срединной поверхности оболочки;  $u_2$  — угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки;  $q_r$  — радиальный компонент внешней силы, приходящейся на единицу площади поверхности оболочки;  $k_T$  — коэффициент сдвига;  $c_{10}, c_{20}$  — скорости распространения фронтов волн в линейной теории оболочек типа Тимошенко;  $E, \nu, \rho_1$  — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки;  $c, \rho$  — скорость распространения волн и плотность в окружающей среде;  $c_f, \rho_f$  — скорость распространения волн и плотность заполнителя оболочки.

Ускорения волн в жидкостях связаны с давлением зависимостями

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \tau^2} &= -\frac{R_1}{\rho c^2} \frac{\partial p_i}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 \omega_e}{\partial \tau^2} = -\frac{R_1}{\rho c^2} \frac{\partial p_e}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 \omega_f}{\partial \tau^2} &= -\frac{R_1}{\rho_f c^2} \frac{\partial p_f}{\partial r}. \end{aligned} \quad (11)$$

**Решение в пространстве изображения.** Для решения уравнений (3), (7), (8) используем преобразование Фурье по времени в виде

$$g(r, \theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(r, \theta, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (12)$$

$$\bar{g}(r, \theta, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(r, \theta, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Применяя преобразование Фурье (12) к уравнениям (3), (7), (8), удовлетворяющим условиям (4) — (6) периодичности и ограниченности решения, фурье-трансформанту давления  $p_e$  можно записать в виде ряда

$$\bar{p}_e(r, \theta, \omega) = -i l_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left( n + \frac{1}{2} \right) \sin \eta_n e^{-i\eta_n} x_n(\omega) h_n(\omega r) P_n(\cos \theta), \quad (13)$$

где

$$x_n(\omega) = -\frac{AS_n(1) - BS'_n(1)}{Aj_n(\omega) - Bj'_n(\omega)}; \quad \text{tg } \eta_n = -\frac{Aj_n(\omega) - Bj'_n(\omega)}{An_n(\omega) - Bn'_n(\omega)}; \quad (14)$$

$$A = \omega D_{20}; \quad B = \alpha D_{10} + \alpha_3 \omega D_{20} j_n(r_2 \omega_3) / j'_n(r_2 \omega_3);$$

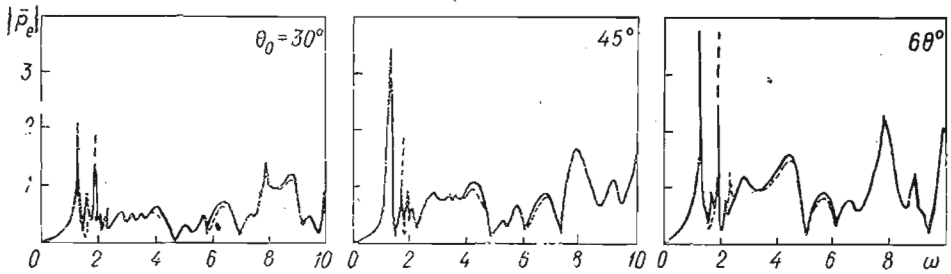


Рис. 1

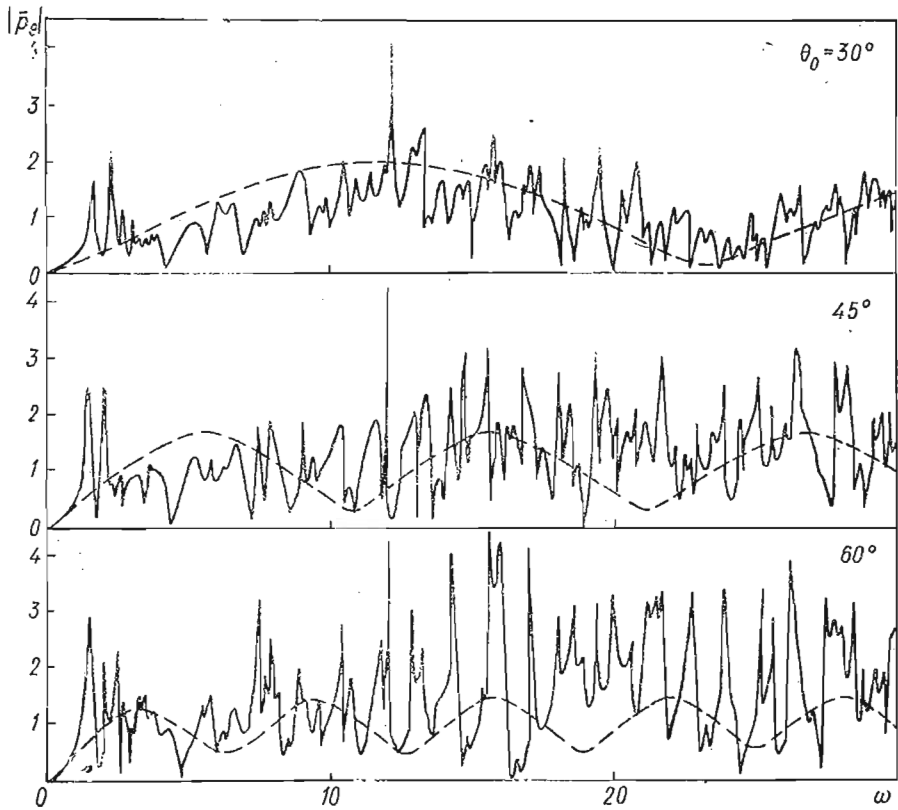


Рис. 2

$$\alpha_3 = \frac{\rho_j c_l}{\rho c}; \quad \omega_3 = \frac{\omega}{\beta_l}; \quad D_{10} = \det \|a_{ij}\|, \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$\omega_0 = \omega \lambda_0; \quad D_{20} = \det \|a_{ij}\|, \quad i, j = 1, 2;$$

$$a_{11} = -n(n+1) + (1 - \nu - \kappa^2) + (1 + a^2)\omega_0^2;$$

$$a_{12} = r_0(\kappa^2 + 2a^2\omega_0^2);$$

$$a_{13} = 1 + \nu + \kappa^2; \quad a_{21} = \kappa^2 + 2a^2\omega_0^2;$$

$$a_{22} = r_0 \{a^2[-n(n+1) + 1 - \nu + \omega_0^2] - \kappa^2\};$$

$$\begin{aligned}
 a_{23} &= -\kappa^2; & a_{31} &= (1 + \nu + \kappa^2) n(n+1); \\
 a_{32} &= -r_0 \kappa^2 n(n+1); \\
 a_{33} &= -\kappa^2 n(n+1) - 2(1 + \nu) + (1 + a^2) \omega_0^2; \\
 S_n(r) &= \int_0^\pi \frac{e^{i\omega t}}{l} R(\varphi, r) P_n(\cos \varphi) d\varphi;
 \end{aligned}$$

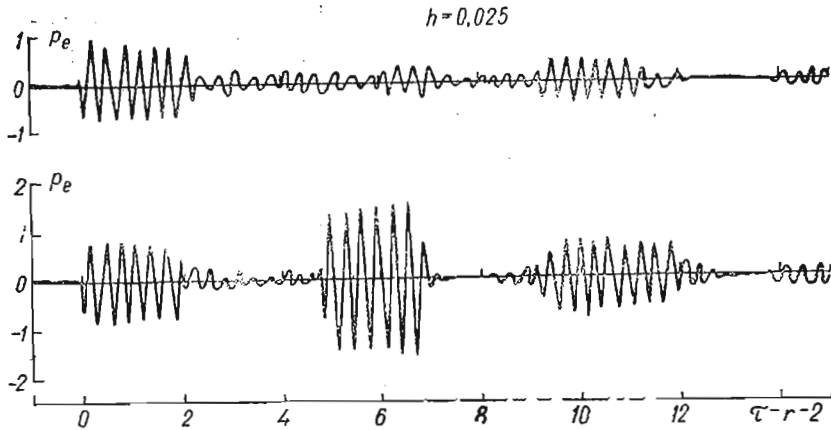


Рис. 3

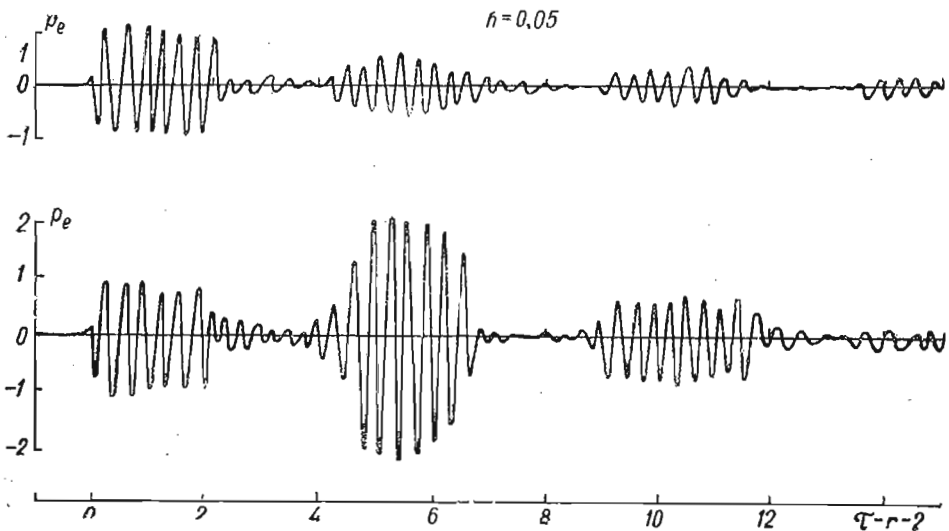


Рис. 4

$j_n(x)$ ,  $n_n(x)$ ,  $h_n(x)$  — сферические функции Бесселя;  $P_n(x)$  — полином Лежандра.

Давление в эхо-сигнале определяется по формуле

$$p_e(r, \theta, \tau) = \frac{\rho_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \bar{p}_e(r, \theta, \omega) \bar{f}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (15)$$

где  $\bar{f}(\omega)$  — фурье-трансформанта функции модуляции.

**Анализ полученных результатов.** Анализ числовых результатов проведен для стальной сферы, окруженной и заполненной водой. Физические параметры следующие:  $E = 2,03^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,29$ ,  $\rho_1 = 7700$  кг/м<sup>3</sup>, а для воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1410$  м/с. Подсчеты выполнены для переизлученных

импульсов давления, поступающих в точку излучателя  $\theta = 0^\circ$ ,  $r = l_0 \gg 1$ . Набегающий сигнал является квазимонохроматическим ( $f(\tau) = \sin \omega_0 \tau$ ,  $\omega_0$  — несущая частота). Безразмерная толщина  $h$  оболочки принималась равной 0,025. На рис. 1 изображены графики функции  $|\bar{p}_e|$  при  $\theta_0 = 30, 45, 60^\circ$ , вычисленные по теории типа Тимошенко (сплошные линии) и полученные по теории упругости [4] при тех же параметрах системы (штриховые). Отклонение результатов, полученных по обеим теориям, не превышает 1%. Поэтому для тонких упругих оболочек с целью экономии времени для вычислений стационарного и нестационарного эхо-сигнала предпочтительнее вести расчеты по теории типа Тимошенко. Выигрыш затраченного на расчеты времени составляет 50%.

Из рис. 1 видно, что при увеличении угла  $\theta_0$  амплитуда  $|\bar{p}_e|$  увеличивается. Исследования модуля амплитуды стационарного эхо-сигнала показали, что кривая, соответствующая рассеянию от жесткого тела, является срединной для колеблющейся кривой, соответствующей эхо-сигналам от сферической оболочки ( $h = 0,05$ ). Это явление тем отчетливее, чем уже набегающий звуковой пучок (рис. 2). Ранее это явление было замечено при анализе аналогичной задачи для толстостенной сферы [8].

На рис. 3, 4 приведены графики эхо-импульсов от оболочек толщиной  $h = 0,025$  и  $0,05$  соответственно при различных углах  $\theta_0$ . Длительность набегающего сигнала  $\tau_0 = 2$ , а несущая частота зондирования  $\omega_0 = 20$ . Из этих рисунков видно, что при остронаправленном падении энергии рассеянного поля в направлении источника звука сосредоточена в первом отраженном сигнале. Вклад вторичных импульсов незначителен, что согласуется с результатами установившегося режима. При увеличении угла направленности  $\theta_0$  амплитуда первого отраженного импульса постепенно уменьшается, в то время как амплитуда вторичных импульсов существенно увеличивается. Резкое увеличение энергии, излученной поверхностными волнами при расширении набегающего пучка, является одним из признаков деформируемости оболочки, так как для предельных объектов это явление не наблюдается.

Таким образом, учет узкой направленности импульса посылки позволяет установить новые качественные эффекты в деформировании эхо-сигнала.

1. Метсавер Я. А. Вычисление эхо-сигнала направленного зондирующего импульса от сферической оболочки.— Акуст. журн., 1976, 22, № 6, с. 906—912.
2. Метсавер Я. А., Векслер Н. Д., Стулов А. С. Дифракция акустических импульсов на упругих телах.— М.: Наука, 1979.— 240 с.
3. Нигул У. К., Метсавер Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э. Эхо-сигналы от упругих объектов.— Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1974.— Т. 2. 345 с.
4. Поддубняк А. П., Пороховский В. В. Взаимодействие ограниченного звукового пучка с упругой поллой сферой в акустической жидкости.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 4, с. 51—54.
5. Поддубняк А. П. Рассеяние ограниченного звукового пучка на акустически мягком круговом цилиндре.— Акуст. журн., 1979, 25, № 1, с. 108—112.
6. Поддубняк А. П. Эхо-сигнал от упругой сферы при воздействии остронаправленного звукового импульса.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 9, с. 92—95.
7. Подстригац Я. С., Поддубняк А. П., Грилицкий Д. В. Дифракция остронаправленного звукового импульса на акустически мягкой сфере.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 3, с. 238—241.
8. Подстригац Я. С., Поддубняк А. П., Пороховский В. В. Анализ переизлученного сигнала от упругой сферы при воздействии направленной сферической волны.— Мат. мет. и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 47—51.
9. Ультразвуковые преобразователи / Под ред. Е. Кикучи.— М.: Мир, 1973.— 424 с.
10. Gaupaud G., C., Überall H. Acoustics of finite beams.— J. Acoust. Soc. Amer., 1978, 63, N 1, p. 5—16.
11. Hickling R. Analysis of echoes from a hollow metallic sphere in water.— J. Acoust. Soc. Amer., 1964, 36, N 4, p. 1124—1137.

Институт прикладных проблем  
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
08.07.80