УДК 517.949.8+536.12

М. Д. Коркуна

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ ЛОКАЛЬНОМ ПОВЕРХНОСТНОМ НАГРЕВЕ МЕТОДОМ СЕТОК

Распределение температуры в пластине $\{x^2+y^2 \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$ при интенсивном локальном поверхностном нагреве сводится к математической задаче нахождения решения уравнения

$$c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right), \tag{1}$$

удовлетворяющего условиям

$$\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=H} = q, \tag{2}$$

$$T(r,\ z,\ \varphi,\ t)|_{z=0} = T_0, \tag{3}$$

$$T(r,\ z,\ \varphi,\ t)|_{r=b} = T_0, \tag{4}$$

$$T(r,\ z,\ \varphi,\ 0) = T_0, \tag{5}$$

где

$$q = \begin{cases} q_1 = \text{const} & \text{при } r \leqslant r_0, \\ 0 & \text{при } r > r_0, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

При $r = 0$ вместо уравнения (1) рассматривается уравнение

$$c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right). \tag{6}$$

Теплофизические характеристики $\lambda(T)$ и $c(T)$ заданы в виде кусочно-линейных функций температуры T.

Задача (1) — (6) решалась методом сеток по явной и неявной схемам. Производные в уравнениях и граничных условиях аппроксимировались с погрешностью $o(h^2)$ по переменным r и z и с погрешностью $o(\Delta t)$ по переменной t.

В случае явной схемы уравнения (1), (6) и граничное условие (2) заменены конечно-разностными уравнениями соответственно:

$$T_{i,j,k+1} = T_{i,j,k} + \frac{\Delta t}{2c_{i,j,k}h^2}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)(\lambda_{i+1,j,k}+\lambda_{i,j,k})(T_{i+1,j,k}-T_{i,j,k}) + \right.$$
$$+ (\lambda_{i,j,k}+\lambda_{i-1,j,k})(T_{i-1,j,k}-T_{i,j,k}) + (\lambda_{i,j+1,k}+\lambda_{i,j,k}) \times$$
$$\left.\times (T_{i,j+1,k}-T_{i,j,k}) + (\lambda_{i,j,k}+\lambda_{i,j-1,k})(T_{i,j-1,k}-T_{i,j,k})\right\},$$

$$T_{0,j,k+1} = T_{0,j,k} + \frac{\Delta t}{c_{0,j,k}h^2}\left\{2(\lambda_{1,j,k}+\lambda_{0,j,k})(T_{1,j,k}-T_{0,j,k}) + \right.$$
$$\left.+ \frac{1}{2}[(\lambda_{0,j+1,k}+\lambda_{0,j,k})(T_{0,j+1,k}-T_{0,j,k}) + (\lambda_{0,j,k}+\lambda_{0,j-1,k})(T_{0,j-1,k}-T_{0,j,k})]\right\},$$

$$T_{i,l,k+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2qh}{\lambda_{i,j,k}} + 4T_{i,j-1,k+1} - T_{i,j-2,k+1}\right). \tag{2'}$$

Для устойчивости вычислений соотношение между шагами Δt и h определялось из условия

$$\frac{\Delta t}{h^2} = \frac{1}{6}\frac{\min c(T)}{\max \lambda(T)}. \tag{7}$$

В случае неявной схемы, производя аналогичные аппроксимации (по r с шагом h, по z с шагом k), получаем систему уравнений

$$\left[c_{i,j,k} + \frac{\Delta t}{2h^2}\left(1+\frac{1}{i}\right)(\lambda_{i+1,j,k}+\lambda_{i,j,k}) + \frac{\Delta t}{2h^2}(\lambda_{i,j,k}+\lambda_{i-1,j,k}) + \right.$$

$$+\frac{\Delta t}{2k^2}(\lambda_{i,j+1,k}+\lambda_{i,j,k})+\frac{\Delta t}{2k^2}(\lambda_{i,j,k}+\lambda_{i,j-1,k})\Big]T_{i,j,k+1}-$$

$$-\frac{\Delta t}{2h^2}\left(1+\frac{1}{i}\right)(\lambda_{i+1,j,k}+\lambda_{i,j,k})T_{i+1,j,k+1}-\frac{\Delta t}{2h^2}(\lambda_{i,j,k}+\lambda_{i-1,j,k})T_{i-1,j,k+1}-$$

$$-\frac{\Delta t}{2k^2}(\lambda_{i,j+1,k}+\lambda_{i,j,k})T_{i,j+1,k+1}-\frac{\Delta t}{2k^2}(\lambda_{i,j,k}+\lambda_{i,j-1,k})T_{i,j-1,k+1}=c_{i,j,k}T_{i,j,k},$$

$$i=\overline{1,\ N-1};\quad j=\overline{1,\ M-1}.$$

$$\Big[c_{0,j,k}+\frac{2\Delta t}{h^2}(\lambda_{1,j,k}+\lambda_{0,j,k})+\frac{\Delta t}{2k^2}(\lambda_{0,j+1,k}+\lambda_{0,j,k})+$$

t, с	Явная схема			Неявная схема			
	$h=0{,}5$ мм	$h=0{,}33$ мм	$h=0{,}25$ мм	$h=0{,}5$ мм	$h=0{,}5$ мм	$h=0{,}25$ мм	$h=0{,}25$ мм
	Δt, с						
	$0{,}32\cdot10^{-2}$	$0{,}14\cdot10^{-2}$	$0{,}8\cdot10^{-3}$	$0{,}6\cdot10^{-3}$	$0{,}1\cdot10^{-1}$	$0{,}25\cdot10^{-1}$	0,25
0,25	1114,3	1053,98	1029,39	1076,1	1054,7	881,28	751,3
0,50	1245,4	1203,78	1199,91	1182,9	1170,9	911,79	1001,6
0,75	1302,7	1282,36	1284,79	1225,8	1220,2	926,68	1096,6
1,00	1332,6	1328,56	1322,86	1239,0	1236,9	934,11	1121,5
1,25	1348,5	1351,44	1343,18	1243,8	1243,4	937,59	1122,2
1,50	1357,9	1363,47	1354,69	1245,6	1246,0	939,01	1122,6
1,75	1363,5	1370,65	1361,66	1246,3	1247,1	939,44	1123,5
2,00	1366,7	1375,02	1365,84	1246,5	1247,6	939,60	1124,6

$$+\frac{\Delta t}{2k^2}(\lambda_{0,j,k}+\lambda_{0,j-1,k})\Big]T_{0,j,k+1}-\frac{2\Delta t}{h^2}(\lambda_{1,j,k}+\lambda_{0,j,k})T_{1,j,k+1}-$$

$$-\frac{\Delta t}{2k^2}(\lambda_{0,j+1,k}+\lambda_{0,j,k})T_{0,j+1,k+1}-\frac{\Delta t}{2k^2}(\lambda_{0,j,k}+\lambda_{0,j-1,k})T_{0,j-1,k+1}=c_{0,j,k}T_{0,j,k}$$

$$j=\overline{1,\ M-1}.$$

В матричной форме эта система имеет вид

$$-C_0T_{1,j,k+1}+A_0T_{0,j,k+1}=F_0,$$

$$-C_iT_{i+1,j,k+1}+A_iT_{i,j,k+1}-D_iT_{i-1,j,k+1}=F_i,\quad i=\overline{1,\ N-1}.$$

Для нахождения значений $T_{i,m,k+1}$ в данном случае используем уравнение (2′). Решение полученной системы на каждом временно́м шаге находим методом матричной прогонки [2] в виде

$$T_{i-1}=X_iT_i+Z_i,$$

где

$$X_{i+1}=(A_i-D_iX_i)^{-1}C_i;\quad Z_{i+1}=(A_i-D_iX_i)^{-1}(D_iZ_i+F_i);\quad i=\overline{1,\ N-1};$$

$$X_1=A_0^{-1}C_0;\quad Z_1=A_0^{-1}F_0.$$

При решении этой задачи в обоих случаях схема учета нелинейностей безытерационная. Значения $\lambda(T)$ и $c(T)$ в каждом узле определялись по температурам в предыдущий момент времени. Для более точного учета нелинейности в каждом узле значение $\lambda(T)$ определяли как среднее арифметическое значений $\lambda(T)$ в соседних узлах [1].

В качестве примера рассмотрено решение задачи для пластины толщиной $H=4$ мм и длиной $b=12$ мм с тепловым потоком $q_1=2{,}25\times\times10^7$ ккал/ч $\cdot$ м^2. На границе пластины и в начальный момент времени задавалась температура $T_0=100°$ С. Значение температуры в точке $r=0$, $z=H$ в зависимости от времени приведено в таблице.

Из приведенных результатов видно, что при решении задачи по явной схеме дальнейшее уменьшение h и Δt, выбранных согласно (7), практически не влияет на распределение температуры. Следует отметить, что утверждение о том, что явная схема дает заниженные результаты, а неявная — завышенные [3], в нелинейном случае не подтверждается.

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.— М. : Наука, 1977.— 656 с.
2. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 592 с.
3. *Саульев В. К.* Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток.— М. : Физматгиз, 1960.— 324 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию
28.03.80

УДК 536.12 : 536.13

О. В. Побережный

ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ И СЛОЯ С ТРЕЩИНАМИ

Рассмотрим нестационарные задачи теплопроводности для полосы и слоя с произвольно расположенными в них трещинами, на которых заданы температура, тепловые потоки или условия теплопроницаемости, в предположении, что на гранях полосы или слоя заданы однородные граничные условия.

1. Пусть полоса занимает область $|x| < \infty$, $|y| < \delta$, $0 \leqslant z \leqslant h$. Предполагаем, что между боковыми поверхностями полосы и окружающей средой происходит симметричный относительно срединной плоскости $y = 0$ теплообмен по закону Ньютона. Пусть в такой полосе имеется N разрезов (трещин), проведенных вдоль гладких непересекающихся кривых L_i ($i = \overline{1, N}$), не выходящих на грани полосы. Необходимо определить температурное поле, удовлетворяющее уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \varkappa^2 T - \frac{1}{c}\frac{\partial T}{\partial t} = -\varkappa^2 T_c \tag{1}$$

при определенных начальных и граничных условиях на гранях полосы и линиях L_i.

Представим общее решение уравнения (1) в виде

$$T(x, z, t) = T_*(x, z, t) + T_0(x, z, t), \tag{2}$$

где T_* — решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $T_*(x, z, 0) = 0$ и одному из граничных условий на гранях полосы:

$$\begin{gathered} \nu = 1,\ T_*(x, 0, t) = T_*(x, h, t) = 0, \\ \nu = 2,\ \left.\frac{\partial T_*}{\partial z}\right|_{z=0} = 0,\ \left.\frac{\partial T_*}{\partial z}\right|_{z=h} = 0, \\ \nu = 3,\ \left.\frac{\partial T_*}{\partial z}\right|_{z=0} = 0,\ T_*(x, h, t) = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

и на i-м разрезе:

$$T_*^{\pm}(\sigma_0, t) = f_i^{\pm}(\sigma_0, t),\quad \frac{\partial T_*^{\pm}(\sigma_0, t)}{\partial n_i^0} = g_i^{\pm}(\sigma_0, t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial T_*^{+}(\sigma_0, t)}{\partial n_i^0} = \frac{\partial T_*^{-}(\sigma_0, t)}{\partial n_i^0},\quad \frac{\partial T_*^{\pm}(\sigma_0, t)}{\partial n_i^0} - \frac{h_i}{\lambda}\left[T_*^{+}(\sigma_0, t) - T_*^{-}(\sigma_0, t)\right] = g_i(\sigma_0, t).$$