УДК 517.949.8

З. С. Бережанская, И. В. Людкевич, С. М. Левицкая

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С ВЫДЕЛЕНИЕМ ОСОБЕННОСТЕЙ

В работе [1] предложен метод решения нестационарной задачи теплопроводности путем сведения ее к интегральному уравнению первого рода с помощью теплового потенциала простого слоя. При этом предполагалось, что пространственная конфигурация представляет собой систему конечных областей сложной формы. В данной работе рассматривается случай тел вращения, причем решение существенно уточняется за счет выделения особенностей как в плотности, так и в ядре интегрального уравнения.

Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле для уравнения теплопроводности, представленного в безразмерном виде

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad T|_{t=0} = 0, \quad T|_S = \varphi(X, t)s_+(t), \quad X \in S, \tag{1}$$

$$s_+(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$$

где $S = \bigcup S_i$ — совокупность разомкнутых поверхностей; $\varphi(X, t)$ — условие на границе. Решение задачи (1) ищем в виде теплового потенциала простого слоя

$$T(\bar{X}, \bar{t}) = \int_0^t dt \iint_S q(s, t)\,\delta(R, t, \bar{t})\,ds, \quad X \in \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

Здесь $\delta(R, t, \bar{t}) = \dfrac{e^{-\frac{R^2}{4(t-\bar{t})}}}{[4\pi(\bar{t}-t)]^{3/2}}$ — функция влияния теплового источника; $R^2 = \sum\limits_{\nu=1}^{3} (x_\nu - \bar{x}_\nu)^2$ — расстояние между переменной точкой X поверхности S и фиксированной точкой $\bar{X}$ пространства; $q(s, t)$ — неизвестная плотность, определяемая из интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^{\bar{t}} dt \iint_S q(s, t)\,\delta(R, t, \bar{t})\,ds = \varphi(\bar{X}, t), \quad \bar{X} \in S. \tag{3}$$

Поскольку рассматриваемые поверхности обладают осевой симметрией, то целесообразно ввести цилиндрическую систему координат (r, z, φ), совместив ось z с осью симметрии поверхности S. Предположим согласно [3], что образующая L поверхности S не имеет точек самопересечения и задана в параметрическом виде

$$r = r(\eta), \quad z = z(\eta), \quad H_1 \leqslant \eta \leqslant H_2. \tag{4}$$

Область изменения параметров t и η разбиваем на $(n-1)$ и $(m-1)$ частей соответственно точками $t_k = (k-1)h_1$ $(k = \overline{1, n})$,

$$\eta_l = H_1 + \bar{h}_2 + (l-2)h_2 \quad (l = \overline{2, m-1}), \quad \eta_1 = H_1, \quad \eta_m = H_2 - \bar{h}_2,$$

$$\bar{h}_2 \ll h_2,$$

образуя прямоугольную сетку, где

$$h_1 = \bar{t}/(n-1), \quad h_2 = (H_2 - H_1 - 2\bar{h}_2)/(m-3).$$

Исходя из того, что плотность $q(r, z, t)$ не зависит от φ вследствие осевой симметрии поля, представим ее в каждом прямоугольнике следующим образом:

$$q(\eta,\ t) = 1/h_1\,\{q_{k-1}(\eta)(t_k - t) + q_k(\eta)(t - t_{k-1})\}, \tag{5}$$

где $t \in [t_{k-1},\ t_k]$; $q_1(\eta) = 0$;

$$q_k(\eta) = \begin{cases} 1/\bar{h}_2\left\{q_{k,2}(\eta - \eta_1) + q_{k,1}\dfrac{\eta_2 - \eta}{\sqrt{\eta - \eta_1}}\right\}, & \eta \in [\eta_1,\ \eta_2], \\ 1/h_2\,\{q_{k,l}(\eta - \eta_{l-1}) + q_{k,l-1}(\eta_l - \eta)\}, & \eta \in [\eta_{l-1},\ \eta_l], \\ 1/\bar{h}_2\left\{q_{k,m}\dfrac{\eta - \eta_m}{\sqrt{\eta_m - \eta}} + q_{k,m-1}(\eta_m - \eta)\right\}, & \eta \in [\eta_{m-1},\ \eta_m]; \end{cases}$$

$$q_{k,l} = q(\eta_l,\ t_k), \quad k = \overline{2,\ n}, \quad l = \overline{3,\ m-1}.$$

Учитывая (4), (5) и вычисляя в (3) интегралы, зависящие от времени, получаем

$$\frac{1}{2^3\pi}\int\limits_{H_1}^{H_2} q_n(\eta)F(\eta)\,d\eta\int\limits_0^{2\pi}\{I_0^{(1)} - 1/h_1 I_1^{(1)}\}\,d\varphi = \varphi(\bar{r},\ \bar{z},\ t_n) -$$

$$-\frac{1}{2^3\pi}\sum_{k=2}^{n-1}\int\limits_{H_1}^{H_2} q_k(\eta)F(\eta)\,d\eta\int\limits_0^{2\pi}\{\nabla^2(jI_0^{(j)}) - 1/h_1\nabla^2(I_1^{(j)})\}\,d\varphi. \tag{6}$$

Здесь

$$I_0^{(j)} = 2/R\,\mathrm{erfc}(\theta);$$

$$I_1^{(j)} = 2\sqrt{jh_1/\pi e^{-\theta^2}} - R\,\mathrm{erfc}(\theta); \quad j = n - k; \quad \theta = R/(2\sqrt{jh_1});$$

∇^2 — конечная разность второго порядка соответствующих функций в точке jh_1; $F(\eta) = r(\eta)\sqrt{r_\eta'^2 + z_\eta'^2}$ — якобиан перехода от поверхностного интеграла к двойному. Интегральное уравнение (6) служит для определения неизвестной функции $q_n(\eta)$, если $q_k(\eta)$ найдены на предыдущих шагах. В левой части ядро имеет особенность, если точка удовлетворения граничным условиям совпадает с точкой интегрирования. Легко показать, что в правой части эта особенность отсутствует, т. е.

$$\lim_{R\to 0}[\nabla^2(jI_0^{(j)}) - 1/h_1\nabla^2(I_1^{(j)})] = -\frac{4}{\sqrt{\pi h_1}}\nabla^2(\sqrt{j}).$$

Сделав ряд преобразований с учетом (5), уравнение (6) преобразуем следующим образом:

$$\frac{1}{2^3\pi}\sum_{l=1}^{m} q_{n,l}A_{n,l} = \varphi(\bar{r},\ \bar{z},\ t_n) - \frac{1}{2^3\pi}\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=1}^{m} q_{k,l}A_{k,l}, \tag{7}$$

где

$$A_{k,1} = 1/\bar{h}_2\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{\Phi_{j,2}(\eta)}{\sqrt{\eta - \eta_1}}\,d\eta; \quad A_{k,m} = 1/\bar{h}_2\int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m}\frac{\Phi_{j,m-1}(\eta)}{\sqrt{\eta_m - \eta}}\,d\eta;$$

$$A_{k,l} = 1/h\left\{\int\limits_{\eta_l}^{\eta_{l+1}}\Phi_{j,l+1}(\eta)\,d\eta - \int\limits_{\eta_{l-1}}^{\eta_l}\Phi_{j,l-1}(\eta)\,d\eta\right\} \quad (l = \overline{2,\ m-1});$$

$$\Phi_{j,l}(\eta) = \int\limits_0^{2\pi}\{\nabla^2(jI_0^{(j)}) - 1/h_1\nabla^2(I_1^{(j)})\}\,d\varphi F(\eta)(\eta_l - \eta);$$

$$h = \begin{cases} h_2, & \eta \in [\eta_{l-1},\ \eta_l], \quad l = \overline{3,\ m-2}, \\ \bar{h}_2, & \eta \in [\eta_1,\ \eta_2] \vee \eta \in [\eta_{m-1},\ \eta_m]. \end{cases}$$

Если точка коллокации $\bar{\eta}_\mu = \eta_l$, то в уравнении (7) коэффициент $A_{n,l}$ имеет особенность в обоих интегралах, если же $\eta_l < \bar{\eta}_\mu < \eta_{l-1}$, то особенность имеют $A_{n,l-1}$ и $A_{n,}$ в первом и втором из интегралов соответственно. Преобразуем в каждом из них подынтегральную функцию, используя результаты работы [3]. Тогда получим

$$\Phi_{0,l}(\eta) = \overline{K}_l(\eta)\,K(p) + \overline{\Phi}_{0,l}(\eta), \tag{8}$$

где

$$\overline{\Phi}_{0,l}(\eta) = \frac{16}{\sqrt{(r+\bar{r})^2+(z-\bar{z})^2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{R(\eta,\alpha)}{2\sqrt{h_1}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{R\left(\bar{\eta}_\mu, \frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{h_1}}\right)\right\} \times$$

$$\times F(\eta)(\eta_l-\eta)\frac{d\alpha}{\sqrt{1-p^2\sin^2\alpha}} + \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{R(\eta,\varphi)}{2\sqrt{h_1}}\right)\frac{R(\eta,\varphi)}{h_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\sqrt{\pi h_1}} e^{-\frac{R^2(\eta,\varphi)}{4h_1}} \right\} F(\eta)(\eta_l-\eta)\,d\varphi; \tag{9}$$

$$\overline{K}_l(\eta) = \frac{-16}{\sqrt{(r+\bar{r})^2+(z-\bar{z})^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R\left(\bar{\eta}_\mu, \frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{h_1}}\right) F(\eta)(\eta-\eta_l); \tag{10}$$

$K(p)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, который аппроксимируется выражением

$$K(p) = \sum_{s=0}^{4}\alpha_s\xi^s + \ln\frac{1}{\xi}\sum_{s=0}^{4}\beta_s\xi^s = U(\xi) + \ln\frac{1}{\xi}V(\xi), \tag{11}$$

$$\xi = 1 - p^2 = \frac{(\bar{r}-r)^2+(\bar{z}-z)^2}{(\bar{r}+r)^2+(\bar{z}-z)^2}, \quad 0<\xi\leqslant 1.$$

Значения α_s и β_s приведены в работе [2].

Примем для определенности, что имеется четыре случая расположения точек коллокации:

1. $\bar{\eta}_\mu = \eta_1$.

Во всех интегралах $A_{k,1}$ $(k=\overline{2,n})$ делаем замену переменных $\eta = \gamma^2 h_2 + \eta_1$, $\gamma \in [0, 1]$. После некоторых преобразований получим

$$A_{n,1} = 2/\sqrt{h_2}\left\{\int\limits_0^1 [\Psi(\overline{K}_2(\eta)) + \overline{\Phi}_{0,2}(\eta)]\,d\gamma + 2\overline{K}_2(\bar{\eta}_\mu)\,V(\bar{\eta}_\mu)\right\},$$

$$A_{k,1} = 2/\sqrt{h_2}\int\limits_0^1 \Phi_{i,2}(\eta)\,d\eta.$$

2. $\bar{\eta}_\mu = \eta_m$. Аналогично в интегралах $A_{k,m}$ делаем замену $\eta = \eta_m - \gamma^2 h_2$, $\gamma \in [0, 1]$. Тогда

$$A_{n,m} = 2/\sqrt{h_2}\left\{\int\limits_0^1 [\Psi(\overline{K}_{m-1}(\eta)) + \overline{\Phi}_{0,m-1}(\eta)]\,d\gamma + 2\overline{K}_{m-1}(\bar{\eta}_\mu)\,V(\bar{\eta}_\mu)\right\},$$

$$A_{k,m} = 2/\sqrt{h_2}\int\limits_0^1 \Phi_{i,m-1}(\eta)\,d\gamma.$$

3. $\bar{\eta}_\mu = \eta_l$ $(l=\overline{2,\ m-1})$. При таком выборе точек коллокации получаемая матрица системы будет квадратной с диагональным преобладанием, порождаемым особенностью ядра интегрального уравнения. Заменой $\eta^{(1)} = \gamma h + \eta_l$ в первом из интегралов $A_{n,l}$ и $\eta^{(2)} = \eta_l - \gamma h$ во втором из них

получим

$$A_{n,l}=\int_0^1[\Psi(\overline{K}_l(\eta^{(1)}))+\overline{\Phi}_{0,l}(\eta^{(1)})-\Psi(\overline{K}_{l-1}(\eta^{(2)})-\overline{\Phi}_{0,l-1}(\eta^{(2)})]\,d\gamma+$$
$$+\,2\overline{K}_l(\bar{\eta}_\mu)V(\bar{\eta}_\mu)-2\overline{K}_{l-1}(\bar{\eta}_\mu)V(\bar{\eta}_\mu).$$

4. $\eta_{l-1}<\eta<\eta_l$ ($l=\overline{3, m-1}$). В этом случае всегда можно получить кроме квадратной и прямоугольную матрицу системы линейных алгебраических уравнений, которая решается методом наименьших квадратов и приводит к улучшению точности решаемой задачи. Пусть $A_{n,l}=I_1-(I_2+I_3)$, где

$$I_1=\int_{\eta_l}^{\eta_{l+1}}\Phi_{0,l+1}(\eta)\,d\eta;\quad I_2=\int_{\eta_{l-1}}^{\eta_l}\overline{K}_{l-1}(\eta)K(p)\,d\eta;\quad I_3=\int_{\eta_{l-1}}^{\eta_l}\Phi_{0,l-1}(\eta)\,d\eta.$$

Представим I_2 в виде суммы двух интегралов $\int_{\eta_{l-1}}^{\bar{\eta}_\mu}+\int_{\bar{\eta}_\mu}^{\eta_l}$, в каждом из которых сделаем замену переменных $\eta^{(1)}=\gamma(\bar{\eta}_\mu-\eta_{l-1})+\eta_{l-1}$ и $\eta^{(2)}=\eta_l-\gamma(\eta_l-\bar{\eta}_\mu)$ соответственно. В оставшихся интегралах I_1 и I_3 делаем замены $\eta^{(3)}=h_2\gamma+\eta_l$ и $\eta^{(4)}=h_2\gamma+\eta_{l-1}$, где $\gamma\in[0,\ 1]$. Тогда

$$A_{n,l}=\int_0^1[h_2\Phi_{0,l+1}(\eta^{(3)})-\Psi(\overline{K}_{l-1}(\eta^{(1)}))(\bar{\eta}_\mu-\eta_{l-1})+\Psi(\overline{K}_{l-1}(\eta^{(2)}))\times$$
$$\times(\eta_l-\bar{\eta}_\mu)+h_2\Phi_{0,l-1}(\eta^{(4)})]\,d\gamma-2h_2\overline{K}_{l-1}(\bar{\eta}_\mu)V(\bar{\eta}_\mu).$$

Аналогично получим

$$A_{n,l-1}=\int_0^1[\Psi(\overline{K}_l(\eta^{(1)}))(\bar{\eta}_\mu-\eta_{l-1})+\Psi(\overline{K}_l(\eta^{(2)}))(\eta_l-\bar{\eta}_\mu)+$$
$$+\,\Phi_{0,l}(\eta^{(4)})h_2-h_2\Phi_{0,l-2}(\eta^{(5)})]\,d\gamma+2h_2\overline{K}_l(\bar{\eta}_\mu)V(\bar{\eta}_\mu).$$

Здесь $\eta^{(5)}=h_2\gamma+\eta_{l-2}$. Во всех четырех случаях $\Psi(\overline{K}_l(\eta))$ имеет вид

$$\Psi(\overline{K}_l(\eta))=\overline{K}_l(\eta)\left(U+V\left(\ln\frac{(\bar{r}+r)^2+(\bar{z}-z)^2}{(\bar{\eta}_\mu-\eta_l)^2M}-B\right)\right)-$$
$$-\,\overline{K}_l(\eta)V(\eta)-\overline{K}_l(\bar{\eta}_\mu)V(\bar{\eta}_\mu)\,2\ln\left|\frac{\bar{\eta}_\mu-\eta}{\bar{\eta}_\mu-\eta_l}\right|,\qquad(12)$$

где M и B — некоторые функции, зависящие от уравнения образующей L и вычисленные в работе [3]. Полученная система рекуррентных алгебраических уравнений для определения плотности хорошо обусловлена. Определив из нее неизвестные $q_{k,l}$, найдем значение температуры в любой точке $(\bar{r},\ \bar{z})$ пространства при каждом t_n по формуле

$$T(\bar{r},\ \bar{z},\ t)=\frac{1}{2^3\pi}\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=1}^{m}q_{k,l}A_{k,l}.$$

1. *Бережанская З. С., Галазюк В. А., Людкевич И. В.* Нестационарная задача теплопроводности в пространстве с включениями.— В кн.: XIV науч. совещ. по тепловым напряжениям в элементах конструкций. Киев : Наук. думка, 1977.— с. 34.
2. *Дымарский Я. С., Лозинский Н. Н., Макушин А. Т.* Справочник программиста.— Л. : Судпромгиз, 1963.— 357 с.
3. *Людкевич И. В., Гордийчук В. И., Чухлебов А. Н.* Численное решение граничных задач теории потенциала методом интегральных уравнений.— Львов : Изд-во Льв. ун-та, 1978.— 66 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию
19.02.80